



TITLE:

軟弱な地山中のトンネル土圧に関する基礎的研究( Dissertation\_全文 )

AUTHOR(S):

小田, 英一

---

CITATION:

小田, 英一. 軟弱な地山中のトンネル土圧に関する基礎的研究. 京都帝国大学, 1962, 工学博士

ISSUE DATE:

1962-02-01

URL:

<https://doi.org/10.14989/138526>

RIGHT:

軟弱な地山中のトンネル土圧に関する基礎的研究

昭和36年5月

小 田 英 一

# 目 次

## 第 1 章 緒 言

第 1 章	軟弱な地山	1
第 2 章	軟弱な地山中のトンネル土圧	6
第 3 章	本研究の目的と概要	13

## 第 1 編

第 1 章	簡単な粘弾性体と仮定できる地山	15
第 1 節	簡単な粘弾性体としての土の力学的模型	15
第 2 節	簡単な粘弾性測定結果の解析理論	17
第 3 節	簡単な粘弾性測定法	18
第 4 節	結 語	21
第 2 章	より一般化した粘弾性体と仮定できる地山	23
第 1 節	より一般化した粘弾性体としての土の力学的模型	23
第 2 節	より一般化した粘弾性測定結果の解析理論	25
第 3 節	より一般化した粘弾性測定法	28
第 4 節	結 語	40
第 3 章	摩擦性塑性体とみなされる地山	43
第 1 節	土の摩擦性塑性理論	43
第 2 節	土の剪断抵抗及びその測定法	44
第 3 節	結 語	45

## 第 2 編

	軟弱な地山中のトンネル周辺の応力分布及び変形挙動に 関する理論的考察	
第 1 章	基礎的考察	46
第 1 節	本編における研究目的と方法	46
第 2 節	素掘トンネル周辺の応力分布と変形との関連性の理論的 考察	47
第 2 章	簡単な粘弾性体とみなされる地山中の素掘円形トンネル の変形挙動	57
第 1 節	極座標による弾性体の平面歪問題	57
第 2 節	変形挙動の基礎方程式	59
第 3 節	素掘円形トンネルの変形の時間的变化	61
第 4 節	結 語	72
第 3 章	より一般化した粘弾性体とみなされる地山中の素掘円形 トンネルの変形挙動	73
第 1 節	極座標による弾性体の平面歪問題	73
第 2 節	変形挙動の基礎方程式	74
第 3 節	素掘円形トンネルの変形の時間的变化	78
第 4 節	結 語	79

第 4 章	摩擦性塑性体とみなされる地山中の素掘円形トンネルの 周辺応力分布	80
第 1 節	応力平衡条件と降伏条件	80
第 2 節	特有曲線の性質と境界条件	82
第 3 節	素掘円形トンネル周辺の応力の近似逐次法による解法	85
第 4 節	トンネル円孔周辺の弾塑性問題	94
第 5 節	結 語	110
第 5 章	粘土の地山中の円形トンネルの周辺の弾塑性問題	111
第 1 節	重積分函数による円孔周辺の応力分布の一般的問題	111
第 2 節	円形孔を有する無限平面の弾塑性問題	112
第 3 節	塑性領域、弾性領域における応力成分	117
第 4 節	結 語	127
第 6 章	摩擦性塑性体としての水平層を有する地山中のトンネル 応力分布	128
第 1 節	摩擦性塑性体の二次元問題における応力の基礎方程式	128
第 2 節	物理面における特有曲線の性質	131
第 3 節	水平層中のトンネル周辺の応力の解法	133
第 4 節	塑性流動限界	140
第 5 節	計算例	140
第 6 節	結 語	145
第 7 章	軟弱な成層を有する互層地山中の素掘円形トンネルの周 辺応力分布	149
第 1 節	軟弱な成層を有する互層の異方性	149
第 2 節	異方性体の弾性理論の基礎問題	150
第 3 節	異方性体中の孔の周辺応力分布	151
第 4 節	計算例	156
第 5 節	結 語	176
第 8 章	巻立トンネル周辺の応力分布	178
第 1 節	直交座標系による応力と変位の式	178
第 2 節	曲線座標系による応力と変位の式	181
第 3 節	解析函数の形	184
第 4 節	境界条件	187
第 5 節	解析函数中の未定係数を決定すること	189
第 6 節	巻立円形トンネルの場合の解析函数中の係数の決定	197
第 7 節	計算例	200
第 8 節	結 語	206
第 3 部	軟弱な地山中のトンネルの模型実験	
第 1 章	簡単な粘弾性体とみなされる地山中の素掘円形トンネル の变形挙動に関する模型実験	207
第 1 節	実験装置及び実験方法	207
第 2 節	実験結果及びその考察	209
第 3 節	結 語	221



第 2 章	より一般化した粘弾性体とみなされる地山中の索掘円形トンネルの変形挙動に関する模型実験	222
第 1 節	実験装置及び実験方法	222
第 2 節	実験結果及びその考察	224
第 3 節	結 語	241
第 3 章	摩擦性塑性体としての水平層を有する地山中のトンネル周辺応力及び掘り進に関する模型実験	242
第 1 節	実験装置及び実験方法	242
第 2 節	実験結果及びその考察	245
第 3 節	結 語	254
第 4 章	巻立トンネルの覆工に及ぼす土圧の模型実験	255
第 1 節	実験装置及び実験方法	255
第 2 節	実験結果及びその考察	261
第 3 節	結 語	276
第 5 章	互層地山中の索掘円形トンネル周辺応力分布に関する実験	277
第 1 節	実験装置及び実験方法	277
第 2 節	実験結果及びその考察	280
第 3 節	結 語	286
第 4 章	軟弱な地山中のトンネル土圧に関する考察	
第 1 章	軟弱な地山中のトンネルの最終土圧分析について	288
第 2 章	軟弱な地山中のトンネル土圧の経時的変化について	293
第 3 章	トンネル工法とトンネル土圧との相関性について	301
第 4 章	軟弱な成層を有する互層地山中のトンネル土圧分について	304
附 言		311
参 考 文 献		315

# 緒 論

## 第1章 軟弱な地山

軟弱な地山というものをトンネル工法上よりみて如何に定義するかは人によって多少違っているが、従来より一般に言われているものをあげれば次のようなものである。

土木工学ハンドブック<sup>1)</sup>ではトンネルの掘削工法上よりみて、「軟弱地盤とは非常に亀裂の多い地質から、凝集力の弱い土砂地盤をいい、工事用の支保工が重圧を受け、折損したり変形したりするような地盤のことである。」と表現して、この軟弱地盤のトンネル掘削法としては、ベルギー式または逆巻式掘削法、ドイツ式掘削法、イタリー式掘削法、アメリカ式掘削法、井形式掘削法または坑道式掘削法などがあげられている。また特殊工法としてシールド工法、圧気工法などの施工法をとるような地質を軟弱地層といっている。これによって判るようにトンネル工法上よりみれば、単に地質の立場からだけでなく、トンネルの掘削法、支保工の施工法、覆工の施工法よりの立場から地山が堅硬であるか軟弱であるかをいわねばならない。地山が堅硬だとか軟弱だとかいうことは抽象的な表現であって、その限界が明確でないが、いまトンネル土工の観点からいって、支保工あるいはトンネルにかかる荷が大なるもので難工事だった実例をあげて軟弱地山を説明することとする。

これまでに支保工、あるいはトンネルにかかる荷重については、色々な記録が報告され、また実験が試みられ、更には學説が提唱され、その主な原因について種々な議論があり判然としないうところがある。これはこの問題が複雑で多種多様なことを示すものであるが大体次のようにわけて考えることにする。しかし実際の場合はこの幾つかの要因が競合して加わることが多いであろう。この分類のしかたを次の第1表に示す。

第 1 表

トンネル掘削との関係	主 原 因	小 分 類	代 表 的 な 場 合	実 例	番 号
トンネル掘削の有難に陥らず、元来滑動しやすい場所	地形割、地質的に付託	(特別な)堆積物	崖壁、堆積物の冒行	外沢(大井線)	①
		(一般的)表土	軟弱な表土がなる		②
上記以外の場所	単なる重力	土砂又はゆるんだ岩塊	凝集力のない砂、玉石等が崩落	左股(津軽線)	③
		堅 岩 中	岩石が目から滑落	宇二井(小本線)	④
	潜圧圧縮力		深所で岩石地山が弾性的に膨張	志免炭鉱	⑤
	膨 張	単なる吸水膨張	粘土が水を吸って膨張	大野(大井線)	⑥
		化学変化によるもの	石膏の生成に伴い岩石が膨張	宇庄炭(伊東線)	⑦
		凍 結	水の凍結により膨張	沢辺(津軽線)	⑧

以下この各々につき、なるべく最近の例をあげて説明する。

①は崖堆 (Talus) として知られているもので、これは上部から落下して来た大小の風化岩塊が山脚に次々と堆積したものである。岩片のあるものはすっかり風化して完全に粘土化し、まだ粘土化していない岩塊の間の隙間をつめている。そして飽えず上部から新しい岩塊の供給を受け、全体として安息角に近い傾斜を率うじて安定を保っているものである。従ってこのような地質中にトンネルを掘削すれば、早晚片荷が来る傾向がある。崖堆は急峻な山の裾にしばしばみられ、多くのトンネルは蛇口附近でこの中を突破しなければならぬことになり、事実この例が多い。大糸線外沢トンネルの糸魚川方蛇口附近はこの崖堆を貫いている部分にあたる。怡保線狂之曹トンネル (延長 577m) は水子方約 1/2 が、土讃線西原敦トンネル (延長 1762m) は全長が、いずれも崖堆中を貫いているので建設当時難工事であったのは勿論のこと、開業後も年々大きな偏圧をうけて押し出されている。

②の表土のじりとは、北陸本線筒石附近を始めとする新潟県下各地や、土讃線阿波池田、大杉南、予讃線松山、宇和島南等の西国各地によくみられる。いわゆる最も普通の地じりのことを指している。このような地じりは大別して

(1) 厚い表土がじりもの

(2) 軟弱な地山の表層部がじりもの

(3) 前二者により、一箇所に崩した崩土がその後また二次的、三次的にじりもの

に区別して考えることができる。(1)は厚い風化土を作り易い結晶片岩のような岩石の地域に多く発生する。(2)は十分に固結していない若い岩石、すなわち第三紀層と略称される砂岩や頁岩類に最も多くみられるタイプである。いずれにせよこれ等の各地質はその地じり機構の詳細はさておき、元来じりやすい性質を具備していると考えられるから、この中にトンネルを掘れば当然偏圧が来ることは覚悟しなければならぬ。近畿内線日取トンネル掘削方蛇口附近に発生した地じりは、特に大きく、トンネルの掘削に変状を来さしめるに足った。このトンネルの地質は灰色ないし黒色の頁岩が主体であって、それに白色凝灰質砂岩をばさんでいる。

③の場合はトンネルの腐としては最も一般的な場合であって、砂、土砂、玉石層、極めて亀裂の発達した岩石等が代表的な場合で、地形的な見地からみれば

(1) 洪積層、沖積層のような極めて新しい時代の堆積物、時には第三紀層のうちの若い部分もこれに入る。(津軽線左股トンネル)

(2) 河岸、海岸によく発達する改良玉石層

(3) 花崗岩が風化した壤砂、石英片岩が風化した土砂等。

(4) 各岩石の極めて亀裂の発達したもの

以上の地質は土砂あるいは岩屑が夫々全体として均質と考えることがある程度まで評されるから、Rankine の土圧理論を前提としたトンネル土圧理論が当てはまるのはこのような場合である。

④の場合は岩石中に元来存在していた多くの目から岩塊が離れ、あるいはにり出そうとする場合にみられるものである。その目の出来る由来は本来地質学的なもので、トンネルを掘削してその周囲に応力集中が生じて、しばしば延滞事故を起すわけである。この岩目を成因的に分類すると次のようになる。

(1) 岩塊が冷却する際、体積の減少に伴って出来るもので、これを節理と呼び、殊に安山岩、玄武岩、次いで石英輝面岩等の浅いところで囲まれた火成岩に多い。

(2) 水成岩中に存在する地層の境目、これを成層面と呼び、古い時代の水成岩には大抵みられる。

(3) 結晶片岩、千枚岩等にある剥が易い目で、これはこれらの岩石が地中深い所で強大なる造山圧力を受けた際、各成分鉱物が偏圧の加わる方向と垂直な方向に長軸を向けて並ぶかわった結果、その方向の面から剥がれ易くなったもので、この面のことを片理面といっている。

(4) その他地殻変動に伴って出来た諸々の割目は各種の岩石を通じてみられるが、これが大規模な相対的変位を伴ったものが断層である。

これらの目は殆んど塞着していることもあり、やうの空間を残していることもあり、時には岩石が腐朽分解して生じた粘土がつまっていることもよくある。(4)の成因に属するものは、他の種のものと同様して格子状、鱗状または *mosaic* な目を発達させることがしばしばあり、この場合は一層滑移の危険性が潜伏している筈である。例えば小本線から平井トンネルは(4)と(4)が併存した場合のように思われる。火山地帯ではこれらの岩目が地下の岩漿から出る高温のガスや熱水液の通路になり易く、そのため両側の岩石が変質腐朽してくるとか、高圧のガスや熱水により岩目が押し開かれ複雑になる場合がある。目田線駅近辺トンネルの落盤はこのような地質の所のように考えられる。

⑤の場合の原因となる弾性的地圧とは、ほぼ弾性体に近いとみられる岩石地山の中で、その原有圧縮力(又は圧縮歪)のため、地山岩石が伸張しようとして生ずる地圧をいうものである。すなわちほぼ弾性体に近いと見なされる岩石の地山の中には普通の場合、その奥の地表面よりの深さと地表面迄の岩石の平均単位体積重量及びその岩石のポアソン比によって決まる垂直方向の応力成分(垂直応力)と水平方向の応力成分(水平応力)を保有しているが、かゝる地山の中に坑道を開削した場合、その坑道が空間を維持するためには、掘削の坑道周辺の地山岩石自体か、あるいはこの両者の合作によって、その外側の地山の原有応力に基づく周囲からの圧迫に抵抗しなければならぬ。この圧迫する応力が弾性的地圧である。上原博士が国鉄赤見鉄鉱所堅坑及び坑底坑道(地下4ノ5m)を工事するに当って、坑道周囲の地山をコンクリート覆工に代るに際して発生する現象を観察し計算や実験を行いながら考察された結果、深い地山の中での坑道にこのような現象を起す原因は、左巻の土原論や *Brecher* 氏などの考えた肩重でなくて、弾性的地圧であるとの結論に達しておられる。この赤見鉄鉱はその地質は第三紀に堆積した頁岩を主としている。第三紀よりもっと若いすなわち洪積世以後の地層は大抵未だ十分凝固して居らず、砂や粘土の状態にあるが、これ等についてと同様なことは十分考えられるが、然しこれについて多少異議も出る事柄もあり、⑥のところを論ずることとする。

⑥の場合は粘土が水を吸って膨張するということは以前より云はれていた。例えば大糸線大野トンネルはその典型的な例である。本トンネルは風化した凝灰岩層に出会し、掘削中この風化粘土が土圧を及ぼし難工事であった。この坑内黄色粘土の吸水膨張試験の結果によると、含水率55%で膨張を停止し、このときの吸水膨張による圧力強度は  $2.6 \text{ kg/cm}^2$  になったといわれている。粘土の吸水膨張の原因は非常に複雑な問題であるが、粘土は粘土鉱物といはれる極めて微細な鉱物の中の幾種類かが多数に集って構成され、大抵は鱗片状の薄っぺらい形をなし、常に複雑な化学組成と結晶構造をとっている。これらの結果として粘土は

- (1) 非常に表面積が大きく、表面活性が大である。
- (2) 粒子間の空隙が狭いので、透水性が非常に低い。
- (3) 著しい圧縮性を有する。

等の極めて顕著な特性を有している。従って粘土が吸水する一因は、上記の通り表面積が大だから、毛管現象により水分を吸着するのだと考えられる。然し最近では水が粘土鉱物の結晶構造そのものの中へ割込んで行つて、そのために粘土がふくれることがあると云われてきた。このような現象は化合と吸着との中間的なもので、これを収着とすが、このような膨張を膨潤といっている。

現在まで知られている所では、水による著しい膨潤はモンモリロナイトといはれる粘土鉱物にのみ見られる。特にナトリウム・モンモリロナイトは最も著しく、原体積のよゝの倍もの膨潤を示す。

然し頁岩の鱗片状膨張で有名な近畿内線目黒トンネルの場合は、多少事情が異なるようである。



粘土技術<sup>4)</sup>の観察によれば、例えば土中の地圧は掘削後水を吸収して含水比19.5%位になり、10~20%位になって、完全に plastic になっているのに同じ地帯から落ちて矢板の上に留まっているのは乾燥固化したということ、又トンネル掘削面より15~20 cm までの区間では含水比増加し、掘削面より15~20 cm の奥より100~140 cm の奥までの区間では含水比は減少している事実より、この中生代頁岩の含水比を増し、進んで粘土化せしめる水分は、地圧中から滲出してくると結論されている。全く同様の結論はバリー郊外に於ける地下鉄建設の際に遭遇した硬粘土についても報告されている。

この種の膨張の原因として考えられるのは、圧力の減少ということである。圧力の最大の減少は断面の中心に向う方向に起るので、粘土は徐々に中心に向って頂部、側部、底部が押出す。いま一つの粘土帯についてみると、このような押出しが始まると、中心に向う方向の長さは伸張し、一方これに垂直な方向の長さは圧縮されるわけで、この伸張率がその粘土の耐圧強度に対する割合を越すと、直ちに破壊が起り、これらは直ちに間隙比の増大、含水比の増大を招きいよいよ軟弱化するのである。

荷重の除去に伴う間隙比の増大は、その粘土の性質のみならず、既に圧縮を受けていたその圧力の強さにも支配されるということが知られている。バリー東方プロビンスの粘土の土取場の掘削は、掘削直後は交保工なしで充分維持されていたのに、約1週間後から膨張が始まり、3ヶ月後には土板より土圧の3倍を超える土圧に達したといわれている。巴振トンネルでも地圧は土板より土圧を超える可能性があり、とにかく厚い地層が掘削により除去された後で、粘土内には残留地層の及ぼす土圧以上の強い水平力が残存するということが認められる。

以上の現象は、ただ粘土層のみでなく、粘土の固結した頁岩層でもとより、ある種の火成岩や結晶片岩等の如く、風化が進むと粘土を相当量にかんでいて膨張する岩石にも大体あてはまるようである。

②の場合は特別な化学反応が起ってその液体質が膨張する場合のことである。風化作用に対して火山岩類が膨張性の温泉余土に示るような変化、つまり酸化帯の下で熱水溶液による変化であっていわゆる深層風化は、一般に風化といわないで変質と称している。温泉余土は伊東線宇佐美トンネル<sup>5)</sup>の実例のように安山岩や基岩など火山活動の結果生成された岩石が、火山活動の末期に地中の割目に沿って噴出した熱水蒸気や硫黄のため変質して生成された粘土である。このトンネルの岩石中のあるものは、20~27%のモンモリロナイトを含んで居り、吸水膨張性があり、岩石中に含まれている黄鉄鉱が、空気にさらされて容易に酸化されて硫酸を生じ、これが岩石中の主要成分である石灰と作用して軟弱となり、かつこのときできる石膏の結晶力は岩石の亀裂を押し広げようとする。このような争いが競合して地圧が軟弱になったといわれている。これと同様な変質作用は北陸線沢渡トンネルのように花崗岩や玢岩などにも見られる。外国では硬石膏や石膏が大規模に発達している所があり、その中にトンネルを掘削すると湧水に遭遇したため強大な圧合土圧に悩まされたという例がある。これらの変質岩石によって発生するトンネルの地圧は、吸水による膨張のみならず変質による岩石強度の劣化に左右されることが大きい。

③の場合は水の凍結の際の膨張が天然に於ける岩石の破砕、風化に大きな役割を果していることは広く知られているが、トンネルの場合もこの膨張がトンネルにかかる地圧として押出すことがある。これが急事故に至った程の例はないが、津軽線沢渡トンネルの覆工は冬になると押し出し、夏になると元に戻るということである。

断層：—これは④で説明した岩石の割目の両側の地層が互いに移動した程度のものから、大きな地殻変動のために地層に割目を生じ、その両側の地層が上下または水平方向に大きく食い違い、その付近では地層を構成する堅い岩石が破砕されて、かなり脆い断層破砕帯を伴う大規模のもの

まで、いろいろな規模のものがある。④で述べた割目は普遍的であるが断層は集中的で、また単なる割目に比べれば断層は湧水をとまう程度も著しいし、さらに破砕帯と浸透水の風化作用による風化帯とをとまうので、結局断層がトンネル工事におよぼす影響は割目の多い岩石および風化変質した岩石による影響と性質が類似し、上記各タイプの幾つかの要素の競合した形で、強大なるトンネル土圧を発生すると考えられる。大規模な断層では数10 m から数100 m に達する大きな破砕帯をとまうが、一般に破砕帯の中でも部分的に破砕の程度に差があり、完全に破砕された部分と割目が多い程度の部分とが入混っている。断層破砕帯には粘土が満たされている場合があるが、このような破砕帯にトンネル断面が入ると粘土の膨張が起り、工事中に支保工の変位や破綻が起る。また破砕帯が砂状に破砕された岩石によって満たされていることもあり、この場合は破砕岩石はトンネルに流動し、普通の砂と誤認されることもある。さらにこのような地質状態でトンネルが地下水面下にある場合は流動現象が起ることがある。

国鉄八幡浜線夜登トンネル<sup>6)</sup>の地質は、長さ6.9 km / 9.6 m ~ 8.9 km 20 m、1 m 間延長4.5 m の箇所は施工最も難渋をきわめた所で、地質は古生層結晶片岩系よりなり、緑泥片岩、石英片岩及これに介在する石灰岩等よりなっていて、この間に直立した厚い粘土及びこれに伴う断層破砕帯が発達し、これに蛇紋岩が発達して介在している。

この断層破砕帯は無數の鱗片状の圧碎滑肌を有し、中に断層角礫を保有しているものもある。

関西電力の黒部川中游発電所の大町トンネル<sup>7)</sup>は大部分火成岩で黒部側は黒雲母花崗岩で、大町側は見かけ上かなり粗粒のものと、細粒の優美色捕獲花崗岩を有するもので、その間に大町側から基岩より1691 m の地質に多量の湧水をかくむ幅80 m の大破砕帯を有する断層があつて、全般に地山の膨張現象が生じて、支保工が変曲折損して難工事であつた。

以上述べたものはトンネル工法上よりみた軟弱地山の説明であるが、同じ地山であつてもトンネル断面の大小、形の相異によりトンネル土圧も変わってくるのであつて、大なる断面のときは強大な土圧が発生しても、小なる断面ではさほどのことはない場合もあるので、単にトンネル工法上のみから論ずるわけにいかないが、実用的な面からみて一応難工事となる以上の場合のものを、ここを取扱う軟弱地山と称することとする。そうしてまた以上述べたような地山のトンネル工事は災害も発生し易いので、このような軟弱地山中のトンネル土圧の研究は、災害防止、および合理的なトンネル工法の研究にかなり大きな役割を演ずるものと考えられる。

## 第2章 軟弱な地山中のトンネル土圧

軟弱な地山では土冠り重量の一部はトンネルの周りの剪断抵抗に支えられて、トンネル巻立に作用する鉛直土圧は土冠り重量より小となる。すなわち *arch action* によってこのような土圧の軽減がおこるとみられている。しかし膨張性地山はこれとは違った土圧の発生を出現する。トンネル周辺の地山にせん断抵抗が発生するためにはトンネルより上の地山部分が僅少な変位をおこさなければならぬ。故にせん断抵抗を発生させるにはトンネル支保工又は巻立は、地山が僅少な変位を許しうるだけの可撓性をもっていなければならない。ところが支保工または巻立が非常に可撓性に乏しいものであると地山材料が破壊され、はじめは土圧が大であるが、変形の進むにつれ土圧は減つする。このことは現場の経験より定性的には知られているのであるが、支保工の部材寸法の決定や、巻立厚さの寸法の設計のための解法となると今のところあまり決定的な方法はなく、現在のところでは巻立設計には現場の支保工への荷のかかり具合を経験的に判断して土圧を推定して巻立厚さの決定を行っているようである。

破碎岩石の地山のトンネル土圧は砂の地山の場合と同様な土圧の発生根拠を呈する。珪岩や珪質砂岩の如き硬質砂岩が、例えば断層帯におけるせん断のような急い変形をうけると、その岩石は洞穴やトンネルを橋越する懸垂梁の天井を形成する能力を失う程に破碎される。甚だしきは丁度クラッシュを通してたかの如く粉碎されることさえある。もしトンネルが垂く破碎された地山の部分に近づくに、岩石中に非常に亀裂が多くなり遂には凝集力のない砂のような岩石になってしまう。然し経験によれば、砂とか全く破碎された岩石で地学的には変質していない地山中でさえも天端支保工上にかかる岩石荷重は、天端上にある岩石の重さのほんの一部にすぎず、土冠り厚さがトンネルの高さの何の何倍よりも大きくなれば、土冠りには殆んど無関係であるといわれている。これは *arch action* によるものである。

風化岩石としては火成岩や頁岩や結晶片岩が化学変化をうけて粘土化したものがある。ある岩石は完全に粘土に変化するが、ある岩石ではある鉱物成分だけが変質する。またその変質は岩塊全体に及ぶこともあり、割目にそってのみに行われることもある。何れにしても変質した岩石の性質は、原岩石の性質と全く異なり、大抵の場合それらは粘土の性質と類似するか、乃至全く同一にさえなるのである。

掘削や支保工組立ての進行に伴い、塊状の岩石、亀裂多き岩石、あるいは破碎された岩石中の場合と同様に、風化した岩石中にも *arch action* が誘発される。すなわち結局に於ける岩石荷重は普通土冠り重量より小さい。しかし風化岩石に於ける *ground arch* の発達には地学的に変質していない破碎した岩石中のトンネルと違った現象を呈する。すなわち粘土化した地山はトンネルの側面、上盤、下盤に均って押出されてきて、そのため粘土の一帯について考えれば半径方向の長さは長くなり、周辺方向の長さは短くなることとなる。この変形は内部摩擦角と粘着力の両方を活動させることとなる。そうすると上盤上部の地山中に発生した *arch action* と同時に、トンネル内に十分押出して来たためにトンネル下盤下部の地山の粘土の強度が働き出すと、その粘土は自然仰拱を形成し、同様にして側方からトンネルに押出す粘土は側拱の性質を帯び、上盤の *arch action*、側壁アーチ、底部アーチは合併して *ground arch* は *ground cylinder* を形成する。この *ground cylinder* はその背後にある粘土の及ぼす圧力の大部分を支えるのである。風化岩石に於けるかけ渡し作用の期間は、破碎岩石に於けるよりも非常に長い。それ故風化岩石に於てはトンネル支保工にかかる岩石荷重は数週間、或は数ヶ月にも亘って増大し、最初の値よりも数倍高い値にまでなるようである。堆積粘土中のトンネル工事で、これと類似した現象に出会う。事実風化岩石中のトンネルの条件は、粘土中の条件に非常に類似しているので、粘土中のトンネル工法はそ

のまゝ風化岩石中のトンネル工法に利用することができる程である。

自然の粘土層が厚い土層の荷重によって圧縮を受け、その後その層が浸蝕によって除去されるならば、粘土内の水平圧力は残留した地層によって及ぼされる圧力よりもかなり高い値になって未久に残るものと考えられるような場合がある。このような粘土は先行荷重を受けた粘土と呼んでいる。先行荷重を受けた粘土が大きな膨張性を持つとしても押し出し速度は小さく、トンネル支保工に及ぶ粘土の圧力は極めて徐々に増大する。しかし地表面下のある適当な深さでは、トンネル支保工に及ぼされる粘土土圧の終局の値は、現在の土冠り圧力より大きくなるということがありうる。

フランスのパリーの東オプロビンスに於て採掘された堅い膨張する粘土はこの好例である。この粘土層は厚さ115呎で、約65呎の水を含んだ砂とシルトで覆われている。坑道は6×6呎の四角な断面で、地表面から平均110呎の位置にあった。その深さで土冠り土圧は約7ton/ft<sup>2</sup>である。トンネルの上盤、側部、下盤は10呎の堅木の杭太材で高隙なく支えたが、掘削直後は粘土は支保工なしでも保たれていた。約一週間の後膨張が始まり、約3ヶ月の後巻立の材料は破壊され取替を要する様になった。この間にトンネルに近接する粘土の含水量は、最初の値である乾燥重量の約35%から70%に増加した。材木を破壊するに要する圧力を計算すると約25ton/ft<sup>2</sup>となるから、この値は土冠り土圧の2倍以上も大きい。この事実が粘土中の水平圧力は現在の土冠り土圧より非常に大きいことを示す。

風化岩石で水いかり浸し作用の期間を有する膨張岩石地中のトンネルに於て、トンネル支保工に及ぶ最初の荷重はWedgingによるものであるが、その後荷重増大の期間は数ヶ月に上り、この間に於て圧力は非常に堅固なトンネル支保工さえ破壊するのに十分な程強くなる。トンネル支保工の破壊はその耐圧強度の殆んど瞬間的な弛緩によって起るが、破壊されたり又はよじれた支保工材木の強度はもとのまゝの状態の同じ材木の強度より非常に小さいが、これらの材木は普通少くとも数日間は破壊後の圧力を充分支持出来るだけの強度をもっている場合がある。

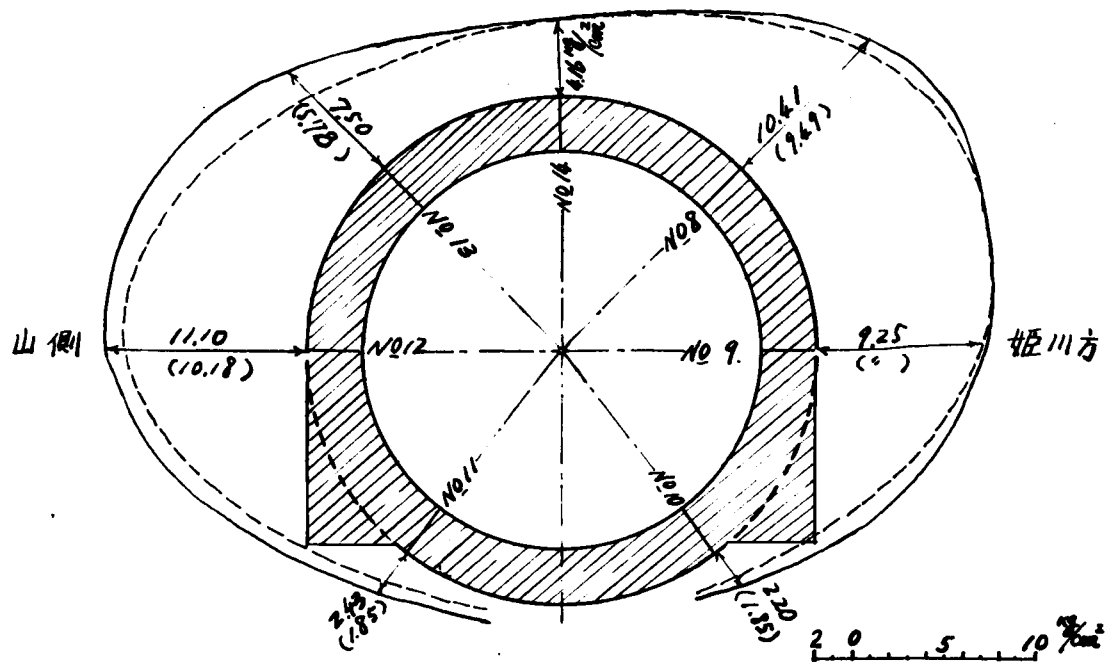
もし新しい支保工が建設されれば圧力は再び増大する。しかし前の支保工の破壊によって起った膨張は未久に圧力の終局の強さを減少させるのである。故にトンネル土圧は地質のみならずトンネル工法によって左右されることがいえるのである。次に軟弱地中のトンネルで難工事であったトンネルで土圧測定された実例につき述べる。

#### 1) 大野トンネルにおける土圧分布<sup>8)</sup>

前述の大糸北線大野トンネルは糸魚川起算27.00 Kmの地質で約700 mの延長のトンネルであるが、風化した凝灰岩の風化粘土がトンネルに土圧を及ぼし工事は難工事であった。また巻立後においてもますます土圧が増大してコンクリートが破壊され、遂にトンネル断面の設計を変更するとともに壁厚を増加して改築した。

これについては覆工に直接及ぼす圧力を測定することが考えられ、渡辺實氏<sup>9)</sup>がスプリングバレンスの原理を応用した地圧測定器（飲道省型地圧測定器）を考案した。この地圧計の現場挿入後約1ヶ年半を経て土圧の増加が停止の状況に至った。この圧力強度をトンネル覆工の断面にプロットしてみれば第1図(a)、(b)の如き分布を示している。



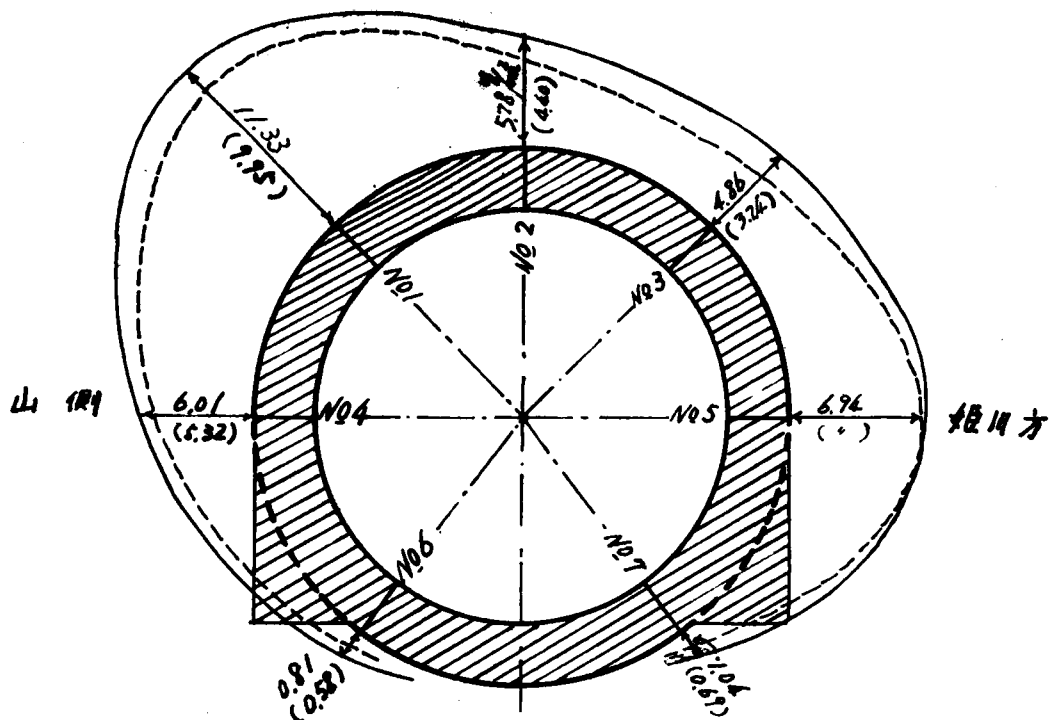


第1図 (a) 大野トンネル奥川起東 7.923 km

この圧力分布状態からみると最大部を覆工周壁の中央部をつなぐ直線上に存じ、拱頂と底部をつなぐ直線上には最小部を有する楕円状分布をなしていることが判明した。また地圧計挿入後の圧力の増加傾向は第3図に示すごときもので、これによって最初地圧増加率は大であるが時間の経過に従って増加率が小さくなっていることがわかる。

ス)、伊東線宇佐美トンネルにおける土圧分布<sup>10)</sup>

前述<sup>5)</sup>の伊東線宇佐美トンネルは温泉作用により安山岩が変質して生じたいわゆる温泉余土を掘進中坑内に於て強大な圧力をうけたので大糸北線大野トンネルと同じ地圧測定機を北口蛇門起東807m附近の本坑及び同ノ53m附近コンクリート遮断底設導坑に挿入してその土圧増減を測定している。本トンネルは温泉余土中に散在鉄筋した炭鉄鉱が掘進中大気に融れて酸化され高熱を発生し、水に化合して硫酸を生じ鉄材、コンクリート類の腐蝕を来すおそれがあるので土圧計の導圧管頭部に特殊な耐酸鋼を使用している。これによって土圧の実測を行ったときの土圧の時間とともに増加する傾向は第3図、第4図に示す。また土圧分布図は第5図に示すおきものである。第3図は前述大野トンネルの土圧傾向と類似しているが、第4図は当初土圧は緩慢に増加して後急激に増加して、その後定常状態に達している。



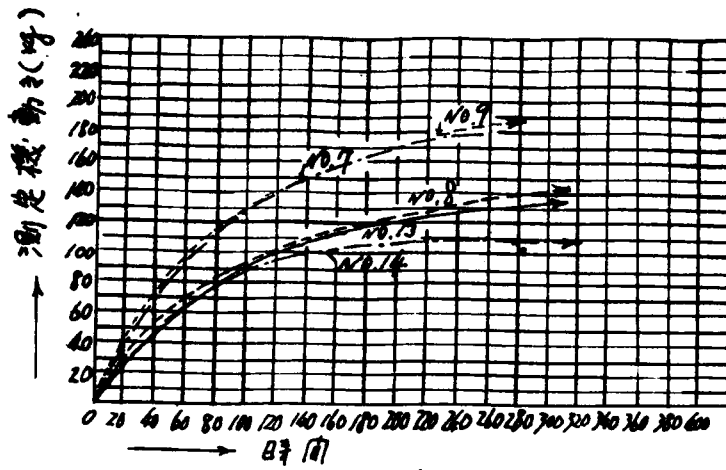
才 1 図 (4) 大野トンネル奥側 7.95km

(2) 近富内線日振トンネル土圧<sup>(1)</sup>

日振トンネルの地質は上部礫石層で、その主体をなすものは灰色ないし黒色の頁岩で、それに白色凝灰質砂岩を混ざっている。トンネル附近は激しい攪乱を受け、層理など測定することはほとんど不可能である。トンネル附近の地質が激しい攪乱を受けているのは、川筋層との不整合面に近い上部礫石層がしばしば次の地殻変動により圧力およびそれに伴う熱水溶液の浸透により変質をこうむっているからである。そのため灰色ないし黒色の頁岩は極めてぜい弱となり、内部まで破碎され、あるいは粘土化している。熱水溶液が浸透した事実、トンネル掘削中しばしば石膏および方解石の岩脈に遭遇したことより知ることができる。日振トンネルの強大なる土圧は、風化頁岩の吸湿膨張あるいは流動性に起因するといわれて来た。頁岩の風化した青色粘土の $\rho$ は $\rho_{スス}$ 、 $\rho_{ム}$ 、 $\rho_{ム々々}$ である。両坑口の放りの薄い部分においては、粘土より水が滲出して含水比は $\rho_{ム}$ 位であった。従って内部摩擦角が初めからの近く、プラスチックな粘土の地表までの全重量が強大なる土圧となって、支保工あるいは覆工に作用したように思われる。しかし放りが $10 \sim 15m$ になると風化頁岩の含水比は $\rho_{ム}$ から $\rho_{スス}$ で内部摩擦角も相当あり、掘削後 $10 \sim 14$ 日して初めて含水比は $\rho_{スス}$ から $\rho_{ム}$ で内部摩擦角は約 $50^\circ$ となる。従ってこの部分の土圧は粘土の流動及び吸水膨張によるものと思われる。

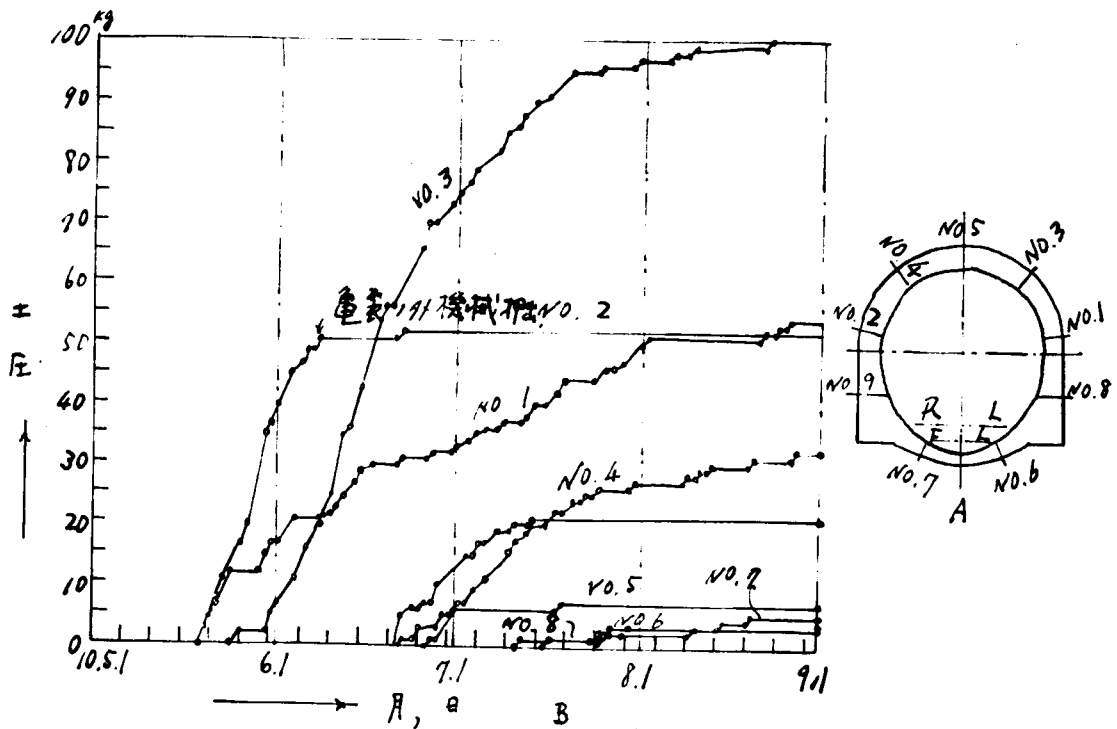
このトンネルでは数多く土圧測定がされたがその一例を次に述べる。

昭和28年8月23日より9月31日の間に坑内地圧調査のため富内起兵560mの地質より試掘導坑が掘削され、已設トンネル切羽より底設掘進し、その断面は幅2m、高さ2mで側壁はいくぶん丸味を有し、アーチはピリケン型である。支保工は直接地山にきかせないでいくぶん遊間を設け、これに粗糸を入れ、クッションとして天井および土平の剥落土砂をうけるだけのもので、従って地山はある程度自由に膨張押出し得るようにしたものである。この試掘導坑の地質概況は風化性の頁岩を主体として所々に白い石膏の薄層を介入している。頁岩の成層ははっきりしない。所々に至り硬い塊が出てくる。頁岩の風化したものは細かく破碎され、各破片の表面は多くは粘土化し、時にはプラスチックなゴム状の部分が薄層をなして見出される。石膏層の走向から考察すると、地全体が相当もまれていたことがわかる。湧水はなく、掘削面は油脈をなす所もあり、掘削後まもなく岩脈にひどく汗をかくこともある。

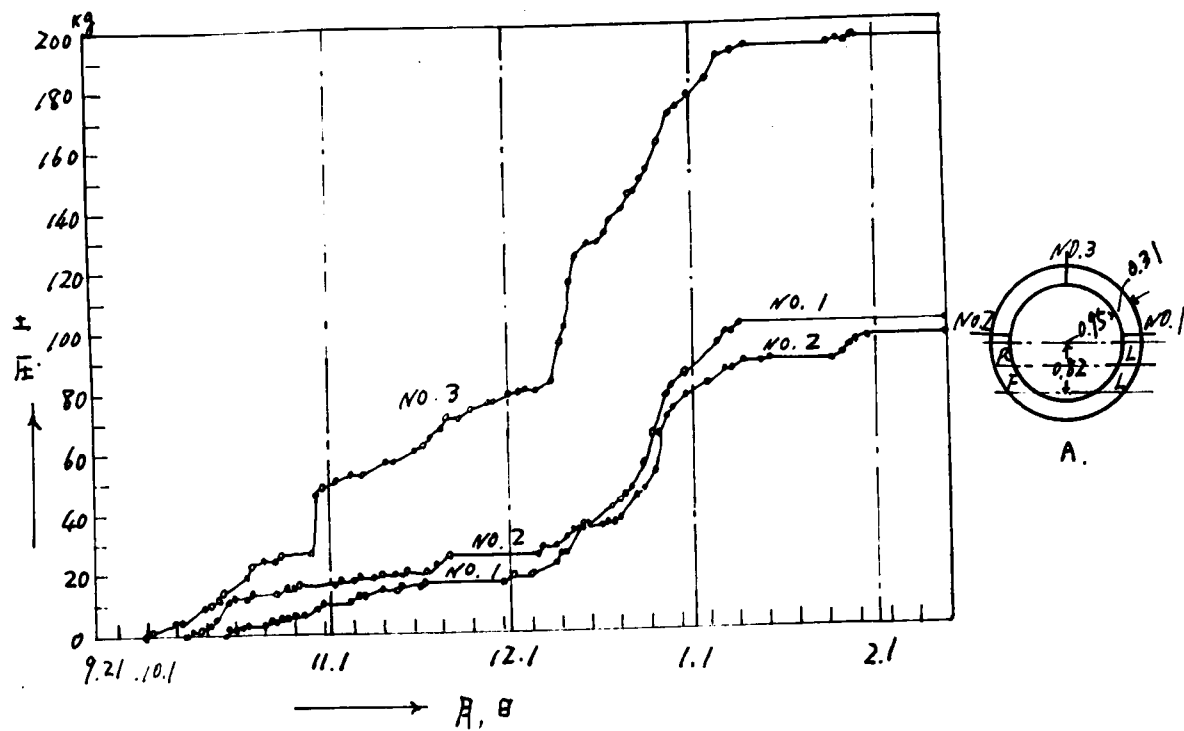


地圧の变化状態

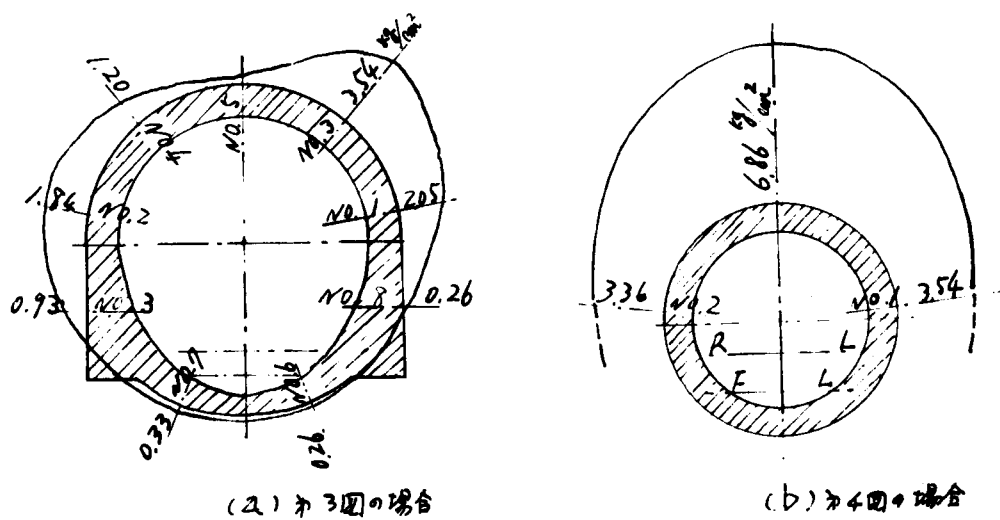
才 2 図 大野トホ土圧変化.



才 3 図 宇佐美トホ北口破門起来 807m 地圧測定値



宇佐美トンネル北口坑内起表1053m  
地圧測定値

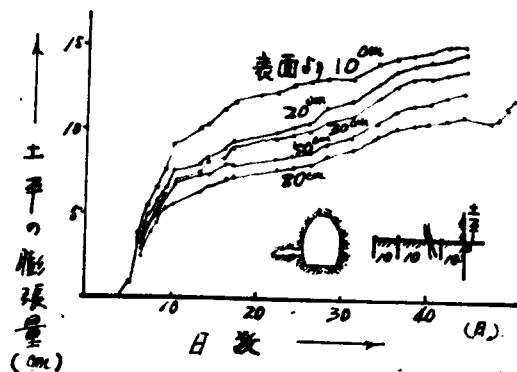


宇佐美トンネル地圧分布

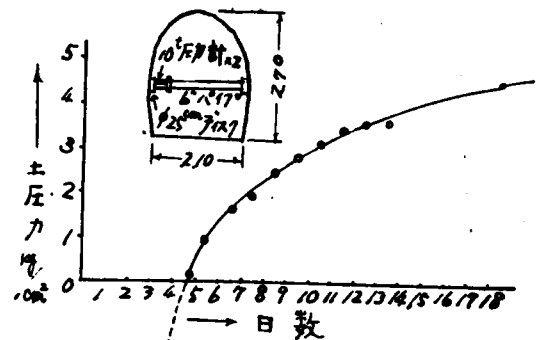


試験導坑入口より3mの右側の地点に施工断面より高さ0.56mの側壁土平内に、横孔1m0を穿て表面より10cm間隔に1箇所に15cm釘を打ち込み、各釘頭から8号鉄線を側壁表面に引出して鉄線の末端の動きを測定することにより、土平内の地山の押出し量を観測した。横孔はできるだけ小さく掘り、施設後は直ちに岩盤で埋めた。3mの右側地点には10cmより80cmまで8号導坑掘削後4日目に施設した。その測定結果を第6図に示す。これによれば掘削後10日まで活発に動き、その後は緩慢ながらもなお押出しを続けており大体60日位まではおろついている。経過日数67日において10cm釘は221mm、80cm釘は156mmに達した。

つぎに試験導坑入口より12mの地点に中心の高さ1m15の所に直径25cmの鋼製円板を載荷板として、10tonのフーレービングリング圧力計を上面組合わせ、これを直径15cmパイプを切抜として略水平に取付け、楔をきかせて地圧の変化を測定した。測定結果は第7図に示されている。本実測では最高2220kgを示し、なお緩急増大の傾向がある。もしこの地圧を載荷板の面積491cm<sup>2</sup>で割ると平均4.52kg/cm<sup>2</sup>の圧力となる。この測定においても土圧は時日と共に増加しているが、増加率は時日と共に減少していることがうかがえる。



第6図  
日振トシル試験導坑土平膨張量



第7図  
日振トシル試験導坑土圧測定値

ただし、本施設は掘削後4日を経過し、圧力計取付直前に側壁が厚さ20cmほど大きく割れて膨出したのでこれを全部取払ったのであるから、掘削直後であれば更に強大な圧力がかかったであろう。地山の押出し量が大きい箇所ほど恐らく地圧も大きいと考えられる。本装置のように押出しを阻止するようにして圧力を測定すれば押出しが速きに從って圧力は増大することになるが、幸災はある程度押出せば自然落ち着くのであるから、実際の圧力強度は押出しの初期に設置した圧力計で最大で、押出した後設置した圧力計では減退し、充分押出して設置した圧力計では更に減退するであろう。従って時日の経過とともに地圧は減退するはずである。また圧力の測定に多くの圧力計はその弾性を利用して歪み量で圧力を読み取るのであるから、この場合には強い圧力計を用いるほど大きい値を示す傾向がある。

## 第3章 本研究の目的と概要

従来のトンネル土圧に関する研究を大別すると、地山が弾性体とみなされる場合のトンネル周辺の応力分布に関するものと、地山が土砂の如きものよりなる場合のトンネル土圧について土質工学的に理論式が考えられているものがある。前者に関しては山口昇、荒井利一郎、谷本勉之助、伊藤番雄、岡本舜三、H. Schmid, R.D. Mindlin の諸氏の研究があるが、これは大部分は堅岩中のトンネルの場合に適用されるものである。後者に関しては Bierbaumer, Terzaghi, Willmann, 小野諒三、横井耕彦、伊藤番雄の諸氏の研究がある。軟弱な地山中のトンネル土圧は大部分は後者のごとく地山が土砂のようなものよりなるとみなされるときのものである。この場合の研究もトンネル上盤の土圧の求め方については多く研究されているが、側圧や下盤の膨張にともなうインバートアーチに作用する土圧の求め方についてはあまり研究されていない。しかも時局的経過に伴いトンネル土圧が増加する問題、または軟弱地山中の掘進トンネル周囲の変位の時局的変化、すなわち押込量の時局的変化についてはその理論が従来ほとんど研究されていない。しかしながらこの問題はトンネル施工上の合理化の観点からみて重要な問題であり、また覆工に作用する土圧の長期に亘る変化に対して覆工設計上如何にこれに対処するかという重要な問題に関連があり、これらの問題が未解決となっている。この実を注目してこの問題の解決を目的として研究を行った。つぎに粘性土のような軟弱な地山中のトンネル土圧は、トンネル周辺に生ずる Ground Cylinder すなわち原状土体形成によって軽減されるといわれているが、この理論的解が正しいので、これに関して理論的に研究し、粘性土地山中のトンネル周辺の応力分布に関連した

Ground Cylinder の作用の解明を試みた。また軟弱な地山の一種として成層岩の中に軟弱な成層の存在によって特異な崩壊現象を呈するので、この問題の基本的研究としてこのような地山中のトンネル周辺応力分布について研究を進め崩壊現象の原因を探究せんとするのである。

軟弱な地山中のトンネル土圧を研究するには、基本的に軟弱な地山の力学的性質についてまず研究しなければならない。破碎岩石で化学的変質作用を受けてない地山は前章で述べたように粘着力のない砂のような地山とほとんど同様にみなされ、このような地山中のトンネル土圧は摩擦性塑性体理論において粘着力が零の場合として求めることができる。また化学的に変質作用を受けた風化岩の地山は粘性土と同様な力学的関係を有し、この場合の地山の応力関係は摩擦性塑性体理論において粘着力及び内部摩擦角の存在する場合の理論により求めることができる。また粘性土地山の変形挙動の問題の研究には、地山物質の土質工学的性質として力学模型をレオロジーの性質を有するものとして考察し、レオロジー論より導いて基本式を見出した。またこの基本式よりレオロジー的諸係数を求める実験方法を提唱して、地山の力学的性質の解明につとめた。

摩擦性塑性体とみなされる地山中のトンネル周辺の応力分布の理論は次のようにして導いた。摩擦性塑性体とみなされる地山が重力の作用を受けていて、この地山中にトンネルを掘削したときの応力平衡条件式と降伏条件式とより連立偏微分方程式を求め、これより特異連立偏微分方程式を導き、物理面の特異曲線が二重線となり、双曲型偏微分方程式をうる結果、塑性流動領域内の解はトンネル周囲上の境界条件よりのみ求められ、この二重線に沿って近似的逐次法によってトンネル周辺の応力分布を求めることができる。この解法はトンネル周辺の地山材料が常に降伏状態にある場合のものであるが、トンネルよりある程度離れた地山の中は次第に自然の地山の応力状態に持続してゆくのである。この外方の領域では降伏条件は未だ成立しないで弾性的な地山の状態となっている。故にトンネルの周辺近くの塑性流動領域とその外側の弾性的な領域の境界があって、これがいわゆる ground cylinder と考えられるが、粘着力と内部摩擦角を有する一般적の粘性土の地山の場合についてはこれを求める理論は厳密解については未だ不明である。しかしながら粘着力のみ

を有し内部摩擦角のない粘土の地山の場合は、この弾塑性領域の境界を求める理論は弾性論と塑性論とを用いて求めることができる。

この場合の弾塑性領域の境界はトンネルを包囲する滑円形となることわかる。<sup>ある条件では</sup>

このことより摩擦性塑性体としての地山の場合でもこの境界はトンネルを包囲することが期待できる。

なお摩擦性塑性体としての水平層を有する地山中のトンネル応力分布に関しては上述と同じ理論によって理論式を求め、これによる数値計算による理論値と模型実験による測定値とを比較して、この理論の妥当性を検証した。

つぎに地山がより一般化した粘弾性体と仮定できるときにトンネル周辺地山の变形挙動について理論を誘導した。地山材料の力学模型をレオロジー的持性をもつものとして、これを応力偏差、歪偏差の両面に適用する。すなわち応力偏差が作用するときの力学模型としては、1個のバネと下駄降式値の応力偏差に相当するスライダを並列に加えた *Voigt* 要素とを直列に組合わせたものである。ただし *Voigt* 要素の粘性係数は単純な *dash pot* でなく、*Eyring* の粘性理論を拡張展開して統計力学的に求めた構造粘性式で表されるものである。これを基本式として变形挙動の時間函数を求める。トンネル周辺地山の变形挙動を求めるには、別に弾性論より重力の作用する地山中のトンネル周辺の変位を求め、これに時間函数を乗じて求められることを証明した。またこれをトンネル模型実験によって検証した。この結果従来よりトンネル現場に於て観測された押込量の時間的変化の実測値の傾向は上述の理論より求めた傾向と類似しており、トンネル掘削に作用するトンネル土圧の発生機構についてよく説明しうることが判明した。

つぎに互層地山で、その中に軟弱な層をもつ地山中のトンネル周辺応力分布については、異方性体としての地山中にトンネル円孔があるとき、この円面に地山荷重に相当する荷重が作用したときの異方性体理論により、トンネル円孔周辺の応力分布を求め、これより応力集中が均質等方性の弾性体とみなされる地山中のトンネル応力の集中状況と比較して差異があることが判った。ただしこの異方性体理論に於て互層中の軟弱な層はその弾性係数が極めて小さなものとして計算する。

このようにしてトンネル周辺の応力集中より、この場合の崩壊機構について研究した。

軟弱地山中のトンネル土圧の維持の模型実験として、トンネル掘削に相当するものにゴールドベック式の土圧計を周囲にとりつけて、地山材料として粘性土及び砂を用いて地山荷重に相当する荷重をかけトンネル土圧を測定し、地山荷重とトンネル土圧の相関性や、粘性土地山と砂地山の場合の土圧分布の機構の相違についても知ることができた。この実験と弾性論および塑性論のトンネル周辺の変位、応力理論とを基にして、実際のトンネル土圧を求める方法も提案した。

このようなことが明白になると軟弱地山中のトンネルの施工上の問題や、掘削設計上の問題解決に必要な基礎をうることができる。こうしてこの種トンネル工法の合理化に寄与することができることになったので、以下これについて述べることにする。

# 第1編 軟弱な地山の土質力学的特性

## 第1章 簡単な粘弾性体と仮定できる地山<sup>(12)</sup>

### 第1節 簡単な粘弾性体としての土の力学模型

トンネル掘削の後、その周囲の各点の変位の時間的变化の様子は、緒論のオス章に示した実験より明かにされているように、トンネル掘削直後急激な変位の増加が生じ、ある時間を経過してから後はその変位の増加量が減少したり、またはその変位はそれ以後ほとんど増加しない状態となっていることが観測されている。

このことよりトンネル周辺の地山中の各点の変位も、トンネル周囲と同じような変位の時間的变化を生じていると考えられる。この現象を説明するには地山材料が粘弾性的性質を有しているとして、トンネル周辺の変形挙動を論ずるのが妥当である。

地山が土の如きものよりなっているものでも、またある種の岩石よりなっているものでもこのような粘弾性性質を有するものと考えられる。土は一般に可塑物質として取扱われる一方、弾性体としても考えられている。すなわち長時間作用する力に対してはそのまま変形し、力を取り去っても復元することはないが、弾性波の如き短周期の波動はその中を経過するのである。このように土は全く異なる二性質を併有するものであって、吾々はこのような性質を表わすに粘弾性の名称を採用する。いまこの土の粘弾性性質を二方面から調べてみる。すなわち土の破壊に關係しない挙動と破壊に關係した挙動とに別けて取り扱ってみる。吾々は物体が破壊なしに起る変形を取扱う場合には、その粘弾性物質の性質を調査する必要がある。このことについては石本、飯田博士<sup>(13)</sup>の研究がある。トンネルの場合でも崩壊をおこさずに変形をなす場合には地山材料の粘弾性性質を調査する必要がある。ところが土の場合で地表において観測する地山に、山崩れ等のような土の破壊的現象と考えられる現象の解析には、土の破壊に與与するせん断抵抗の測定が必要である。地山材料の粘弾性物質とみなしての変形挙動の説明は本編のオス章及びオス章においておこない、せん断抵抗の測定が必要となるとみなされる場合については本編のオス章で説明することとする。

また岩石についての粘弾性性質に関する研究は数少ないが、粘板岩、頁岩、凝灰岩、石炭片岩等の風化岩にはこのような性質がみられる。Griggs, David T.<sup>(14)</sup>によれば Salenhofen limestone についてのクリープ試験の結果より、土と類似した粘弾性体としての変形挙動を示すことが明らかにされている。また伊豆新島産の湧石について飯田博士がクリープ試験によって、岩石の粘弾性諸係数を求めておられる。これによって明らかにこの種の岩石においては、長期間かかる荷重によって土と同様な変形挙動を呈し、粘弾性性質を有するものがあることがわかる。或はこのような地山材料よりなる地山中のトンネル周辺の変形挙動は粘弾性理論によって説明できる。そこでこのトンネル周辺の変形挙動の数値計算をするには、地山材料の粘弾性体としての力学模型の型式を如何にとるかということと、その中に含まれる粘弾性諸係数を決定する方法が必要となる。

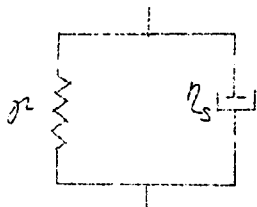
rheology の立場より粘性土の変形特性を論ずる場合には、場合によっては、Voigt 型、Maxwell 型、その他の型が考えられ宮部博士は Maxwell の塑性方程式を用いて説明しており、石本、飯田博士は Voigt 型モデルがよくあてはまるとし、藤田技師はバネと Voigt 要素を並列に組合わせた三要素模型で表わしている。また村山博士は Eyring の粘性理論を拡張して説明しておられる。しかしトンネル孔の変形挙動の数理的取扱いをなす場合、粘性土の rheology よりみた理論的な力学模型を応力平衡条件式と結合して解く場合、非常に困難がある故、まず最初に石本、飯田博士の行ったごとく、粘性土の地山材料は Voigt 型の力学模型を有するとして、これ



を応力平衡条件式に代入してトンネル孔周辺の時間的変形挙動の数学的説明がえられた。しかしある種の粘性土では近似的にVoigt型の力学模型を有するものもある故、ここに簡単な粘弾性体と仮定できる地盤材料の力学模型をVoigt型であるとして論ずることとする。

粘弾性物質の性質は一定の歪における応力～時間関係（緩和特性）、一定の荷重におけるヒズミ～時間関係（クリープ特性）、一定時間におけるヒズミの増加率～応力関係（流動特性）、あるいは一定時間における応力～ヒズミ関係（強度特性）などで表現されている。rheologyの研究方法は物質構造と現象との相関関係を明らかにする微視的取り扱いと流動の現象に重点をおいた巨視的取り扱いとに分けられる。しかしrheology本来の使命は後者の巨視的取り扱い、すなわち物質の変形と流動の現象論的研究にあった。これは粘結帯におけるHookeの弾性変形と純液体におけるNewtonの粘性流動を両極端にある物質の理想型とし、その間に前者を代表する弾性バネと後者を代表する粘性機構（粘性液体が満たされたダッシュポット）の適当な組み合わせによって力学模型を仮定して、物質の流動性を近似的に表現しようとするものである。

物質の粘弾性を論じる場合に力学模型を用いることは、複雑な挙動を直観的に描くのに便利なため多くの研究者によって採用されてきた方法で、バネ、ダッシュポット及び降伏面をもつ塑性物質の模型としてのスライダーの三つの基本的要素から構成されている。トンネルの変形の問題を取り扱う場合はクリープ特性によって誘導されねばならぬ故に、この場合の力学模型としてはバネと



第 1.1 図

ダッシュポットを並列に組み合わせたVoigt要素として第 1.1 図に示すごときものを考えることとする。

いま  $R$ : 粘性土のせん断弾性係数、 $\eta$ : 粘性土の粘性係数、 $T$ : この力学模型に作用するせん断外力、 $e$ : このときのせん断ヒズミ、とすれば、Voigt要素の力学模型の equation of state は次式となる。

$$T = Re + \eta \frac{de}{dt} \quad (1.1.1)$$

すなわち外力  $T$  によりあつた応力は弾性力と粘性力とである。上式がVoigt要素の力学模型の一般的な数学的表示であるが、トンネルの変形挙動に用いるには上式を次の形にする方が取り扱いがよい。すなわち

$$P_{ij} = 2R \cdot e_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij} \quad (1.1.2)$$

ただし  $\dot{e}$  は時間  $t$  による微分を表わし、 $e_{ij}$ : ヒズミの deviator,  $P_{ij}$ : 応力の deviator, とする。また直交座標軸の  $i, j$  軸方向の微分体素の変形量をそれぞれ  $u, v$  とすれば (1.1.2) 式において  $i, j$  平面のせん断ヒズミ  $e_{ij}$  は次式の形をとると定義している。

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial j} + \frac{\partial v}{\partial i} \right) \quad (1.1.3)$$

このときのせん断外力を  $T_{ij}$  とすれば (1.1.2) 式より

$$T_{ij} = 2R e_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij} \quad (1.1.4)$$

となり、(1.1.3) 式を (1.1.4) 式に代入すれば

$$T_{ij} = R \left( \frac{\partial u}{\partial j} + \frac{\partial v}{\partial i} \right) + \eta \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u}{\partial j} + \frac{\partial v}{\partial i} \right) \quad (1.1.5)$$

となる。(1.1.1) 式において  $i, j$  直交座標系をとる場合は弾性論において

$$e_{ij} = \frac{\partial u}{\partial j} + \frac{\partial v}{\partial i}$$

と定義している故に(1.1.5)式より

$$\tau_{ij} = \sigma e_x + \eta_s \frac{de_x}{dt}$$

となり、(1.1.2)式より(1.1.1)式が得られる。ただしこの場合の $\tau_{ij}$ は $\tau$ となる。

#### 第2節 簡単な粘弾性測定結果の解析理論

トンネル周辺の変形挙動の数値計算をするとき、土のせん断弾性係数 $\sigma$ および粘性係数 $\eta_s$ の値が必要となる。これらの値を求めるために、荷重制御式三軸圧縮試験機を利用して一定荷重を載荷して、クリープヒズミを測定するクリープ試験の測定結果より $\sigma$ と $\eta_s$ の値を求める理論につき次に述べる。

いま荷重制御式三軸圧縮試験機にかかる土の円柱形状試体の中心鉛直軸を $i$ 軸とし、これと直交して互いに直角をなす二軸を $j$ 軸、 $k$ 軸とする。 $i, j, k$ 軸方向の直ヒズミをそれぞれ $e_i, e_j, e_k$ とし、また $i, j, k$ 軸方向が主応力方向であり、その直応力をそれぞれ $P_i, P_j, P_k$ とする。体積ヒズミ $\Delta = e_i + e_j + e_k$ であり、ヒズミのdeviatorをそれぞれ $e_{oi}, e_{oj}, e_{ok}$ とすれば

$$e_{oi} = e_i - \frac{\Delta}{3}, e_{oj} = e_j - \frac{\Delta}{3}, e_{ok} = e_k - \frac{\Delta}{3} \quad (1.1.6)$$

となる。平均直応力 $P_m$

$$P_m = \frac{1}{3} (P_i + P_j + P_k)$$

なる故に、応力のdeviatorをそれぞれ $P_{oi}, P_{oj}, P_{ok}$ とすれば

$$P_{oi} = P_i - P_m, P_{oj} = P_j - P_m, P_{ok} = P_k - P_m \quad (1.1.7)$$

となる。(1.1.6)式、(1.1.7)式を(1.1.2)式に代入し、 $i$ 方向のものに関する式をかけば

$$P_i - P_m = \sigma \left( e_i - \frac{\Delta}{3} \right) + \eta_s \frac{d \left( e_i - \frac{\Delta}{3} \right)}{dt} \quad (1.1.8)$$

いま土の円柱状試体の $i$ 軸方向に荷重がかかり、側液圧を零とすると、 $i$ 軸と直交する他の二軸方向のヒズミは、 $e_j = e_k = -\rho e_i$ となる。ここに $\rho$ は粘性土のポアッソン比、とする。また $P_j = P_k = 0$ なるゆえに、(1.1.6)式、(1.1.7)式及び(1.1.8)式を用いて次式がえられる。

$$\eta_s \frac{de_i}{dt} + \sigma e_i = \frac{P_i}{2(1+\rho)} \quad (1.1.9)$$

この微分方程式の解を  $t=0$  のとき、 $e_i=0$  なる初期条件を用いてとけば

$$e_i = \frac{P_i}{2(1+\rho)\sigma} \left\{ 1 - \exp \left( -\frac{\sigma}{\eta_s} t \right) \right\} \quad (1.1.10)$$

となる。(1.1.10)式で $t=\infty$ のときの $e_i$ の値を $(e_i)_{t=\infty}$ とすれば

$$\sigma = \frac{P_i}{2(1+\rho)(e_i)_{t=\infty}} \quad (1.1.11)$$

となり、クリープ試験で $(e_i)_{t=\infty}$ の値を観測することによって $\sigma$ がえられる。つぎに(1.1.10)式を変形して

$$\frac{P_i}{2(1+\rho)\sigma} - e_i = \frac{P_i}{2(1+\rho)\sigma} \exp \left( -\frac{\sigma}{\eta_s} t \right)$$

の形とし、この式の両辺の自然対数を取り、これを常用対数に変えれば

$$\log_{10} \{ (e_i)_{t=\infty} - e_i \} = \log_{10} (e_i)_{t=\infty} - 0.434 \frac{\sigma}{\eta_s} t \dots\dots\dots (1.1.12)$$

(1.1.12) 式の形より  $t$  を横軸に普通目盛にとり、 $(e_i)_{t=\infty} - e_i$  を対数目盛で縦軸にとり、測定値をこの半対数座標に plot すると図 1, 2 に示すような直線がえられる。この直線において  $t$  の増分  $\Delta t$  に対して  $\Delta \log_{10} \{ (e_i)_{t=\infty} - e_i \}$  の増分があるゆえに (1.1.12 式) から

$$\Delta \log_{10} \{ (e_i)_{t=\infty} - e_i \} = -0.434 \frac{\sigma}{\eta_s} \Delta t$$

となり、これより

$$\eta_s = - \frac{\sigma}{2.303 \Delta \log_{10} \{ (e_i)_{t=\infty} - e_i \} \Delta t} \dots\dots\dots (1.1.13)$$

となって、 $\eta_s$  は図 1, 2 の直線部分の傾斜を用いて求められる。

### 第3節 簡単な粘弾性測定法

粘弾性物質のせん断弾性係数  $\eta$ 、粘性係数  $\eta_s$  を測定するために行うクリープ試験装置は同重制御式三軸圧縮試験機を利用して行うもので写真 1.1 に示す。その説明図を図 1.3 に示す。



写真 1.1

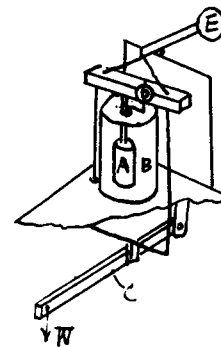


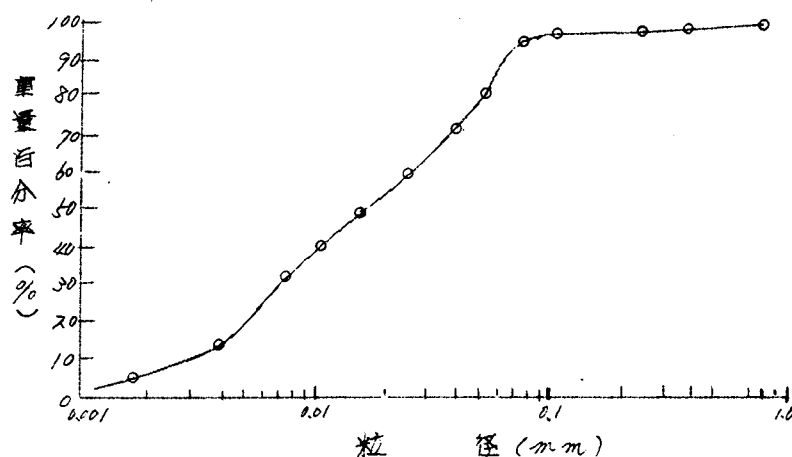
図 1.3

この図において A は円柱状に成型した土の試料で、この円柱は直径 3.5 cm、高さ 9 cm のものを用いる。これを水室 B の中に設置する。載荷方式は lever 比 1/10 の下部懸吊式 lever C に

よって行い、一定荷重 $W$ を所定時間 $t$ 載荷し、クリープヒズミをダイヤルゲージ $D$  ( $1/100\text{ mm}$  読み)によって測定した。Eは平衡値である。

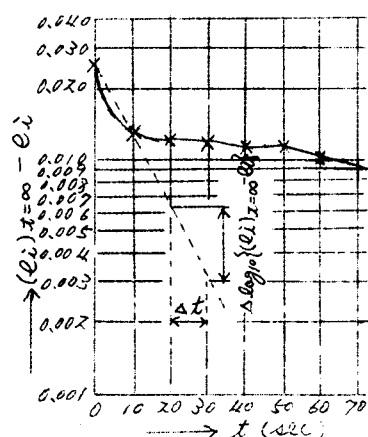
実験方法としては第1.4図の $W$ の荷重をかけてよりの経過時間 $t$ におけるダイヤルゲージの読みを測定する。これによりクリープヒズミ $e_i$ を求め、 $\{(e_i)_{t=\infty} - e_i\}$ を対数目盛で縦軸にとり、横軸にこれに対応する時間 $t$ を普通目盛にとって、実験曲線をPlotする。

粒 径 加 積 曲 線



第 1.4 図

この実験に使用した土は徳島市大工町の土で、その物理的性質は比重 $2.69$ 、 $L.L. 61.8\%$ 、 $P.L. 40.8\%$ 、 $P.I. 21.0\%$ であって、粒度分析の結果粘土分、 $19.5\%$ 、シルト分 $60\%$ 、砂分 $20.5\%$ 、の *silty loam* であり、その粒径加積曲線は第1.4図に示す。後述の第3編第1章のトンネル模型実験で述べるように、トンネル模型用土箱にこの土をつめ、 $0.291\text{ kg/cm}^2$ の荷重をかけて圧密を完了させた地山模型材料より、クリープ試験用の土を攪乱しないようにして採取して円柱状試料を作成する。これを荷重制御式三軸圧縮試験機の水室に設置して、一定荷重  $0.208\text{ kg/cm}^2$  をかけてクリープヒズミを測定した。この測定結果を表1.1に示す。これを第1.4図の方法によって  $\log_{10} \{(e_i)_{t=\infty} - e_i\} \sim t$  曲線を描けば第1.5図となる。



第 1.5 図

実験に使用した土のポアッソン比 $\nu$ については、伊藤<sup>20)</sup>氏の静土圧係数 $K$ の測定において、 $\sigma_R$  : 表面が水平な地山内の水平圧力、 $\sigma_v$  : この地山内の鉛直圧力、とするとき

$$K = \frac{\sigma_R}{\sigma_v} = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (1.1.14)$$

となり、*silt*では $K = 0.98 \approx 1$  なる結果がえられている。本実験に使用した土は *silty loam* であるから、近似的に $K=1$ とみなすことができる。

時間  $t$  と  $\{(e_i)_{t=\infty} - e_i\}$  との測定値

時間 $t$ (sec)	$i$ 軸方向変形量 $\Delta l$ (cm)	$e_i = \frac{\Delta l}{l}$	$\{(e_i)_{t=\infty} - e_i\}$	備 考
0	0	0	0.0258	一定荷重
10	0.1880	0.0131	0.0127	
20	0.1240	0.0138	0.0120	
30	0.1280	0.0142	0.0116	
40	0.1310	0.0146	0.0112	$P_i = 0.208 \text{ kg/cm}^2$
50	0.1330	0.0148	0.0110	
60	0.1400	0.0156	0.0102	
90	0.1580	0.0176	0.0082	
120	0.1640	0.0182	0.0076	試 験 体
150	0.1670	0.0186	0.0072	
180	0.1700	0.0189	0.0069	
240	0.1740	0.0193	0.0065	
300	0.1780	0.0198	0.0060	直 径 $\phi = 2.5 \text{ cm}$
360	0.1840	0.0204	0.0054	
420	0.1860	0.0207	0.0051	
480	0.1880	0.0209	0.0049	
540	0.1900	0.0211	0.0047	高 さ $l = 9.0 \text{ cm}$
600	0.1920	0.0213	0.0045	
720	0.1950	0.0217	0.0041	
840	0.1970	0.0219	0.0039	
960	0.1994	0.0222	0.0036	$(e_i)_{t=\infty} \doteq 0.0258$
1080	0.2008	0.0223	0.0035	
1200	0.2021	0.0225	0.0033	
1500	0.2052	0.0228	0.0030	
1800	0.2079	0.0231	0.0027	
2100	0.2106	0.0234	0.0024	
2400	0.2122	0.0236	0.0022	
2700	0.2139	0.0238	0.0020	
3000	0.2150	0.0239	0.0019	
3300	0.2155	0.0239	0.0019	
3600	0.2161	0.0240	0.0018	
4200	0.2176	0.0242	0.0016	
4800	0.2181	0.0242	0.0016	
5400	0.2198	0.0244	0.0014	
6000	0.2219	0.0247	0.0011	
6600	0.2220	0.0247	0.0011	
7200	0.2221	0.0247	0.0011	

7800	0.2225	0.0247	0.0011
8400	0.2230	0.0248	0.0010
9000	0.2231	0.0248	0.0010
61200	0.2310	0.0257	0.0001
68400	0.2320	0.0258	0

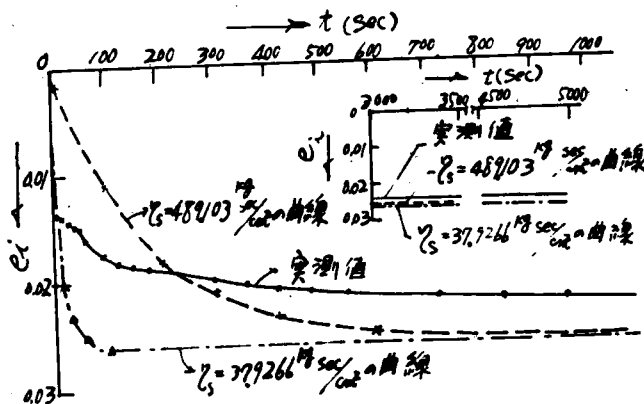
ゆえに(1.1.14)式より、 $p = 0.5$ とみなすことができる。クリープ試験の結果  $(e_i)_{t=\infty} = 0.0258$  となり、 $P_i = 0.208 \text{ kg/cm}^2$  であるから、(1.1.11)式に代入して  $\eta = 2.688 \text{ kg/cm}^2$  とする。

第1.5図より(1.1.13)式によって粘性係数  $\eta_s$  を求めるには、この図の曲線中の直線部分の傾斜を求めるべきであるが、実験に使用した土は完全にDaigt型ではないと考えられ、第1.5図において  $t < 10 \text{ sec}$  では急な傾斜となり、 $t > 10 \text{ sec}$  ではゆるやかな傾斜となっている。

(1)  $0 < t < 10 \text{ sec}$  では  $\Delta t = 80 \text{ sec}$  に対して  $\Delta \log_{10} \{ (e_i)_{t=\infty} - e_i \} = -0.308$  となり、(1.1.13)式より、 $\eta_s = 37.93 \text{ kg sec/cm}^2$  とする。

(2)  $t > 10 \text{ sec}$  において  $\Delta t = 80 \text{ sec}$  に対して  $\Delta \log_{10} \{ (e_i)_{t=\infty} - e_i \} = -0.191$  となり、(1.1.13)式より、 $\eta_s = 489.10 \text{ kg sec/cm}^2$  とする。

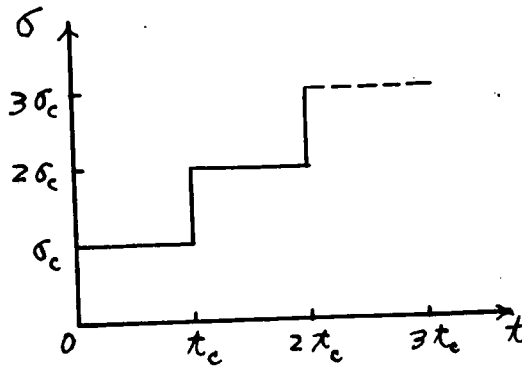
この二つの  $\eta_s$  の値について(1.1.10)式に代入して  $e_i \sim t$  関係求めた曲線と実測曲線とを第1.6図に示す。[1]の場合の  $\eta_s$  の値をとった場合が実測値に近いため  $\eta_s = 37.93 \text{ kg sec/cm}^2$  とみなすことができる。



第1.6図

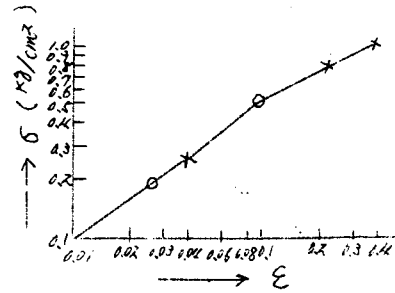
#### 第4節 結 語

粘性土に持続荷重をかけると試料内に生じた応力が、通常の試験方法により求めた破壊強度よりかなり小さくても時間の経過とともに変形が進んでクリープ破壊に至ることがあるが、荷重がある限度以下であれば実際上何ら不都合を生じない。この限度は村山博士、張田博士によって研究された上限降伏値に相当するものである。この上限降伏値を求める方法は長時間かけてクリープ試験を行う代りに、荷重制御の圧縮試験によって簡単に上限降伏値が求められる。



第 1.7 図

荷重制御圧縮試験応力-ひずみ関係



第 1.8 図

荷重制御の圧縮試験とは第 1.7 図のごとき応力-時間関係を与えるものであって、一定荷重  $\sigma_c$  を一定時間  $t_c$  保った後、荷重を  $2\sigma_c$  に増して  $t_c$  時間載荷、さらに  $3\sigma_c$ ,  $4\sigma_c$ , ... と破壊まで続けて、その間の応力-ひずみ関係を調べるものである。この際の各段階の載荷速度は  $\alpha = d\sigma/dt = \sigma_c/t_c$  にて定義しておく。

前節のクリープ試験において土が粘弾性状態にあるかどうかを調べるため、荷重制御式三軸圧縮試験機を用いて、側液圧を零として荷重制御の単軸圧縮試験を行い、クリープ強度を求めた。このときの載荷速度は  $\alpha = 1.63 \times 10^{-2} \text{ kg/cm}^2/\text{min}$  である。鉛直圧力  $\sigma$  - ひずみ  $\epsilon$  の関係を両対数目盛に plot したものを第 1.8 図に示す。これより第 1 折点を求めれば上限降伏値は  $0.52 \text{ kg/cm}^2$  となる。ゆえに前節のクリープ試験における  $P_c = 0.208 \text{ kg/cm}^2$  はこの上限降伏値  $0.52 \text{ kg/cm}^2$  より小なるゆえに、土の粘弾性状態で実験を行ったこととなる。

第 1.6 図のクリープ試験の  $\sigma \sim \epsilon$  の関係図で判るように実測値の方は  $\sigma = 100 \text{ sec}$  付近までは急激な変化があり、その後は漸増しているが、土を Voigt 要素の力学模型とみなした場合の理論値では  $\sigma = 100 \text{ sec}$  付近までは急激な変化があるが、それ以後は  $\epsilon$  は一定の値となっている。しかし  $\sigma = \infty$  においては実測値と理論値との差は実用的には非常に少くなっている。この差異は理論値が Voigt 要素の力学模型と仮定したことから由来すると考えられ、これに關しては次章において更に土をより一般化した粘弾性体と仮定して考察することとする。

## 第2章 より一般化した粘弾性体と仮定できる地山

### 第1節 より一般化した粘弾性体と仮定できる地山<sup>22)</sup>

前章における土のクリープ試験結果によれば、時間とヒズミとの関係は、ある経過時間まではヒズミの変化は急激であるが、その後時間の経過に従ってヒズミが緩慢に増加してゆく傾向がみられた。ところが土の力学模型としては Voigt 要素の力学模型と仮定したため実験値とある差異を生じた。そこで土の力学模型はより一般化した粘弾性体の力学模型として如何なる型式をとるべきかが問題となる。

かつその型式より簡潔してトンネルの周辺の変形挙動の理論がえられるようにしなければならない。これに関して村山博士、張田博士<sup>23)</sup>は rheology の立場より Eyring の粘性理論を拡張展開して統計力学的に求めた構造粘性を導入することにより新たな力学模型を提唱されている。この理論においてはクリープ試験にて土試料に加えられる鉛直圧力と鉛直方向のヒズミに関する理論である。もとより Eyring は一般に物体の流動性をもつためには物体には物体の中に粒子の移動できる空孔が存在しなければならないと考え、流動の要素過程はせん断応力による粒子と空孔との位置交換であるとして粘性機構を求めている。第3編第3章で述べるようにトンネル周辺の変形挙動の理論と結びつけるには、この新しい力学模型をせん断応力とせん断ヒズミに適用して考える方がよい。そこで (1.1.1) 式と (1.1.2) 式との関係があることに注目して、この場合は応力の deviator とヒズミの deviator とに関してこの新しい力学模型を適用すればよい。このときの力学模型について次に述べる。

第1.9図の力学模型はバネ(せん断弾性係数  $\mu_1$ ) と下限降伏応力<sup>24)</sup>の応力の deviator  $P_0$  に相当するスライダーを並列に加えた Voigt 要素(せん断弾性係数  $\mu_2$ , 粘性係数  $\eta_s$ ) とを直列に組合わせたものである。ただし Voigt 要素の粘性係数 ( $\eta_s$ ) は単純なる dash pot ではなく、Eyring

の粘性式で示される構造とする。このような rheology 的特性をもつ物質の力学模型の equation of state は次式で表わされる。

$$e = e_1 + e_2 \quad (1.2.1)$$

$$P = \sigma_1 e_1 \quad (1.2.2)$$

$$P = \sigma_2 e_2 + \frac{P - P_0}{B_2} \sinh^{-1} \left\{ \frac{1}{A_2 (P - P_0)} \frac{de_2}{dt} \right\} + P_0 \quad (1.2.3)$$

ただし  $P$ : 応力の deviator,  $e_1$ :  $P$  なる応力の deviator による  $\mu_1$  のヒズミの deviator,

$e_2$ :  $P - P_0$  なる応力の deviator による  $\mu_2$ ,  $P_0$ ,  $\eta_s$  の並列要素のヒズミの deviator,  $\mu_2$ : 粘性係数  $\eta_s$  に加わる応力の deviator,  $A_2$ ,  $B_2$ : rheology 的係数とする。(1.2.3) 式。

$$\frac{de_2}{dt} = A_2 (P - P_0) \sinh \left( \frac{B_2 P_2}{P - P_0} \right)$$

より求めた粘性係数

$$\eta_s = \frac{1}{A_2 \sinh \left( \frac{B_2 P_2}{P - P_0} \right)}$$

とバネ  $\mu_2$  を並列に組合わせた Voigt 要素としての equation of state である。



(1.2.3)式より  $e_x$  と  $t$  との関係を求める。

$$\frac{de_x}{dt} = A_x(P-P_0) \sinh \left[ \frac{B_x \{(P-P_0) - \lambda \eta_x e_x\}}{P-P_0} \right]$$

これより

$$\int \frac{de_x}{\sinh \left[ \frac{B_x \{(P-P_0) - \lambda \eta_x e_x\}}{P-P_0} \right]} = A_x(P-P_0) \int dt + C$$

ここに  $C$  は積分定数である。これを解いて

$$-\frac{(P-P_0)}{\lambda \eta_x B_x} \log \tanh \left[ \frac{B_x \{(P-P_0) - \lambda \eta_x e_x\}}{\lambda (P-P_0)} \right] = A_x(P-P_0)t + C \quad (1.2.4)$$

$t=0$  のとき  $e_x=0$  となる初期条件より積分定数  $C$  を定めると

$$C = -\frac{(P-P_0)}{\lambda \eta_x B_x} \log \tanh \left( \frac{B_x}{\lambda} \right)$$

これを (1.2.4) 式に代入して

$$\log \tanh \left[ \frac{B_x \{(P-P_0) - \lambda \eta_x e_x\}}{\lambda (P-P_0)} \right] = -\lambda A_x B_x \eta_x t + \log \tanh \left( \frac{B_x}{\lambda} \right) \quad (1.2.5)$$

これより  $e_x$  と  $t$  との関係を求めると

$$e_x = \frac{P-P_0}{\lambda \eta_x} - \frac{\lambda (P-P_0)}{\lambda \eta_x B_x} \tanh^{-1} \left\{ \exp(-\lambda A_x B_x \eta_x t) \tanh \left( \frac{B_x}{\lambda} \right) \right\} \quad (1.2.6)$$

となる。

(1.2.6)式と(1.2.2)式とを(1.2.1)式に代入して

$$e = \frac{1}{\lambda} (P-P_0) \left[ \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} - \frac{\lambda}{B_x \eta_2} \tanh^{-1} \left\{ \exp(-\lambda A_x B_x \eta_x t) \tanh \left( \frac{B_x}{\lambda} \right) \right\} \right] + \frac{P_0}{\lambda \eta_1} \quad (1.2.7)$$

がえられ、いま

$$T(t) = \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} - \frac{\lambda}{B_x \eta_2} \tanh^{-1} \left\{ \exp(-\lambda A_x B_x \eta_x t) \tanh \left( \frac{B_x}{\lambda} \right) \right\} \quad (1.2.8)$$

とすれば、(1.2.7)式は簡単な形

$$e = \frac{1}{\lambda} (P-P_0) T(t) + \frac{P_0}{\lambda \eta_1} \quad (1.2.9)$$

として表わせる。

$$e_x > \frac{P-P_0}{\lambda B_x \eta_2} \quad (\lambda B_x \eta_2 < 1) \text{ なる場合には } t \rightarrow \infty \text{ とすると } e_x = \frac{P-P_0}{\lambda \eta_2} \text{ なるゆえ}$$

に(1.2.1)式と(1.2.2)式とを解合わせて

$$e_{t \rightarrow \infty} \equiv e_{el} = (P-P_0) \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right] + \frac{P_0}{\lambda \eta_1} \quad (1.2.10)$$

がえられる。 $e_{el}$  は平衡状態より求められるヒズミの deviator である。

$$e_0 = \frac{P_0}{\lambda \eta_1} \neq 0 \text{ とおけるから、(1.2.9)式は、}$$

$$e = \frac{1}{2} (P - P_0) T(x) \dots\dots\dots (1, 2, 11)$$

とすることができる。また(1, 2, 10)式を

$$e_{x \rightarrow \infty} \equiv e_{e1} = \frac{1}{2} (P - P_0) \left[ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \dots\dots\dots (1, 2, 12)$$

とすることができる。

## 第2節 より一般化した粘弾性測定結果の解析理論

前節の(1, 2, 11)式, (1, 2, 12)式より誘導される *equation of state* の中に含まれる *rheology* 的諸係数を求めるため、荷重制御式三軸圧縮試験機を利用して、一定荷重をかけてクリープヒズミを測定するクリープ試験結果の解析法について次に述べる。

いま三軸圧縮試験機にかける土の円柱形状試体の鉛直軸を  $i$  軸とし、これと直交して互に直角をなす二軸を  $j$  軸,  $k$  軸とする。 $i, j, k$  軸方向の直ヒズミをそれぞれ  $e_i, e_j, e_k$  とし、また  $i, j, k$  軸方向が主応力方向であって、その直応力をそれぞれ  $P_i, P_j, P_k$  とする。体積ヒズミ  $\Delta = e_i + e_j + e_k$  であるゆえに、ヒズミの *deviator* の  $i, j, k$  軸方向のものとしてそれぞれ  $e_{oi}, e_{oj}, e_{ok}$  とすれば

$$e_{oi} = e_i - \frac{\Delta}{3}, \quad e_{oj} = e_j - \frac{\Delta}{3}, \quad e_{ok} = e_k - \frac{\Delta}{3} \dots\dots\dots (1, 2, 13)$$

平均直応力は、 $P_m = \frac{1}{3} (P_i + P_j + P_k)$  であって、 $i, j, k$  軸方向の応力の *deviator* をそれぞれ  $P_{oi}, P_{oj}, P_{ok}$  とすれば

$$P_{oi} = P_i - P_m, \quad P_{oj} = P_j - P_m, \quad P_{ok} = P_k - P_m \dots\dots\dots (1, 2, 14)$$

(1, 2, 13)式及び(1, 2, 14)式を(1, 2, 11)式に代入して、 $i$  軸方向のものに関する式をかけば

$$\left( e_i - \frac{\Delta}{3} \right) = \frac{1}{2} \{ P_i - P_m - (P_{i0} - P_{m0}) \} T(x) \dots\dots\dots (1, 2, 15)$$

となる。 $P_{i0}, P_{m0}$  は下限降伏点における  $P_i, P_m$  の値である。

いま土の円柱形状試体の  $i$  軸方向に荷重がかかり、測液圧を零とすると、 $\nu$  をポアッソン比として  $P_j = P_k = 0, e_j = e_k = -\nu e_i$  となるゆえに

$$P_{oi} = \frac{2}{3} P_i, \quad \Delta = (1 - 2\nu) e_i, \quad e_{oi} = \frac{2(1 + \nu)}{3} e_i$$

となり、また下限降伏点において  $P_{i0} - P_{m0} = \frac{2}{3} P_{i0}$  となるゆえに、(1, 2, 15)式より

$$\frac{2(1 + \nu)}{3} e_i = \frac{1}{2} (P_i - P_{i0}) T(x)$$

となり、これから  $e_i$  を求め

$$e_i = \frac{P_i - P_{i0}}{2(1 + \nu)} T(x) \dots\dots\dots (1, 2, 16)$$

となる。また(1, 2, 12)式より  $i$  軸方向に関して

$$\frac{2(1 + \nu)}{3} (e_i)_{e1} = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} P_i - \frac{2}{3} P_{i0} \right) \left[ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right]$$

となり、これより  $(e_i)_{e1}$  を求めると

$$(e_i)_{e1} = \frac{P_i - P_{i0}}{2(1 + \nu)} \left[ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \dots\dots\dots (1, 2, 17)$$

となる。(1, 2, 17)式を利用して(1, 2, 16)式を

$$e_i = \frac{(e_i)_{el.}}{\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right]} T(x) \quad (1, 2, 18)$$

の形とすることが出来る。(1, 2, 18)式のT(x)は(1, 2, 8)式で示されているから

$$e_i = \frac{(e_i)_{el.}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} \left[ \frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2} - \frac{2}{2B_2 r_2} \tanh^{-1} \left\{ \exp(-2A_2 B_2 r_2 x) \tanh\left(\frac{B_2}{2}\right) \right\} \right] \quad (1, 2, 19)$$

となり、この式を変形して

$$\log \tanh \left[ \frac{\{(e_i)_{el.} - e_i\} B_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}{2(e_i)_{el.}} \right] = -2A_2 B_2 r_2 x + \log \tanh \left( \frac{B_2}{2} \right) \quad (1, 2, 20)$$

さて(1, 2, 20)式において

$$\frac{B_2}{2} > 1 \quad (\text{条件: 1})$$

であり、かつ

$$2B_2 > \frac{2\{(e_i)_{el.} - e_i\} B_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}{(e_i)_{el.}} > 1 \quad (\text{条件: 2}) \quad (1, 2, 21)$$

なる条件、すなわち

$$e_i < (e_i)_{el.} \left\{ 1 - \frac{1}{2B_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} \right\} \quad (1, 2, 22)$$

の範囲において次のような近似が可能である。

$$\begin{aligned} & \log \tanh \left[ \frac{\{(e_i)_{el.} - e_i\} B_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}{2(e_i)_{el.}} \right] - \log \tanh \left( \frac{B_2}{2} \right) \\ &= \log \left[ 1 - 2 \exp \left\{ -\frac{\{(e_i)_{el.} - e_i\} B_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}{(e_i)_{el.}} \right\} + 2 \exp \left\{ -\frac{2\{(e_i)_{el.} - e_i\} B_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}{(e_i)_{el.}} \right\} - \dots \right] \\ & \quad - \log \left[ 1 - 2 \exp(-B_2) + 2 \exp(-2B_2) - \dots \right] \\ &\approx \log \left[ 1 - 2 \exp \left\{ -\frac{\{(e_i)_{el.} - e_i\} B_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}{(e_i)_{el.}} \right\} + 2 \exp \left\{ -\frac{2\{(e_i)_{el.} - e_i\} B_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}{(e_i)_{el.}} \right\} - \dots \right] \quad (\text{条件: 1に近}) \\ &\approx -2 \exp \left[ -\frac{\{(e_i)_{el.} - e_i\} B_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}{(e_i)_{el.}} \right] \quad (\text{条件: 2に近}) \end{aligned}$$

従って(1, 2, 20)式は近似的に

$$\frac{\{e_i - (e_i)_{el.}\} B_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}{(e_i)_{el.}} = \log A_2 B_2 r_2 x$$

となり、これを変形して $e_i$ を求めれば

$$e_i = (e_i)_{el.} \left[ 1 + \frac{1}{B_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} \log A_2 B_2 r_2 x + \frac{1}{B_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} \log x \right] \quad (1, 2, 23)$$

いま自然対数を常用対数に直して

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 + \frac{\gamma}{B_2 \gamma_2 \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right)} \log_{10} A_2 B_2 \gamma_2 \\ b &= \frac{\gamma}{B_2 \gamma_2 \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1, 2, 24)$$

とすれば

$$\Phi(t) = a + b \log_{10} t \dots\dots\dots (1, 2, 25)$$

において、(1, 2, 23)式は簡単に

$$e_i = (e_i)_{e_1} \cdot \Phi(t) \dots\dots\dots (1, 2, 26)$$

の形になる。

つぎに(1, 2, 22)式を満足しない場合、すなわち

$$e_i > (e_i)_{e_1} \left\{ 1 - \frac{1}{2 B_2 \gamma_2 \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right)} \right\} \dots\dots\dots (1, 2, 27)$$

に対して考察する。(1, 2, 19)式において $t \rightarrow \infty$ とすると

$$(e_i)_{t \rightarrow \infty} = (e_i)_{e_1} \dots\dots\dots (1, 2, 28)$$

となる。(1, 2, 25)式と(1, 2, 26)式より

$$\frac{e_i}{(e_i)_{e_1}} = a + b \log_{10} t \dots\dots\dots (1, 2, 29)$$

の形がえられ、この式よりクリーア試験の測定値より求めた  $e_i / (e_i)_{e_1} = e_i / (e_i)_{t \rightarrow \infty}$  の値を縦軸に普通目盛にとり、時間 $t$ の値を横軸に対数目盛にとってplotすると、そのときえられる曲線の直線部の傾斜より $b$ の値が求められ、 $t=1$ のとき  $\log_{10} t = 0$  となるから、 $t=1$ のときの  $e_i / (e_i)_{t \rightarrow \infty}$  の値が $a$ の値となることより、*rheology* 的常数 $a, b$ が求められる。

つぎに $\gamma_1, \gamma_2$ なるせん断弾性係数が直列につながった力学模型の全体としてのせん断弾性係数を $\gamma$ とすれば、(1, 2, 17)式と(1, 2, 28)式より

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} = \frac{(e_i)_{t \rightarrow \infty}}{P_i - P_{i0}} \cdot 2(1+\nu)$$

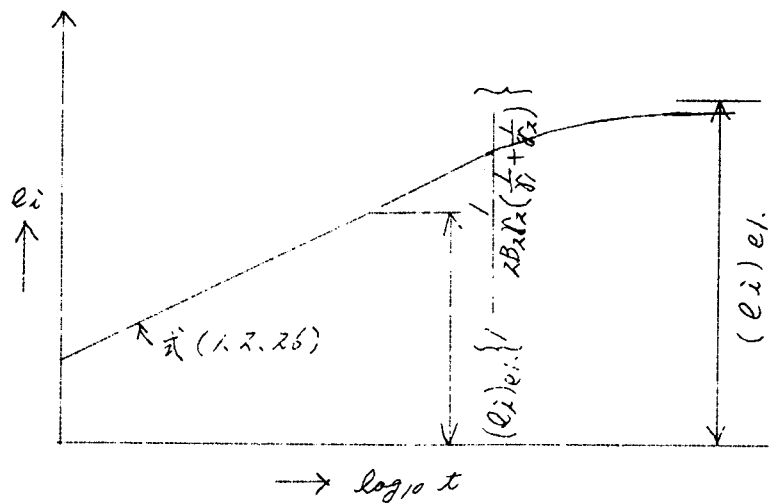
となり、これより

$$\nu = \frac{P_i - P_{i0}}{2(1+\nu)(e_i)_{t \rightarrow \infty}} \dots\dots\dots (1, 2, 30)$$

として $\nu$ が求められる。また(1, 2, 24)式の第2式より

$$\left\{ 1 - \frac{1}{2 B_2 \gamma_2 \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right)} \right\} = 1 - \frac{b}{4.6} \dots\dots\dots (1, 2, 31)$$

として求められる。



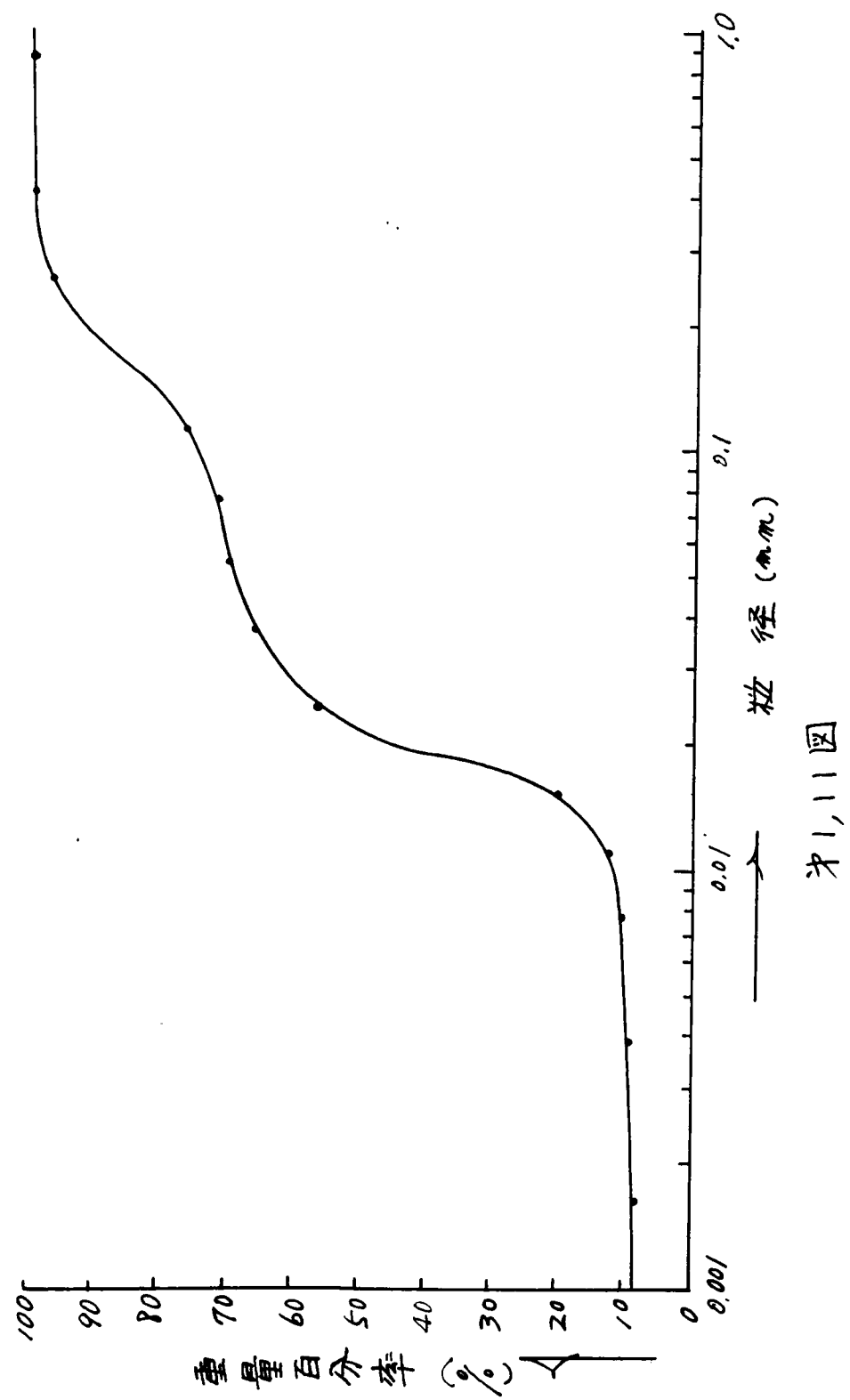
第 1.10 図

つぎに (1.2.26) 式と (1.2.28) 式の関係を図示すれば、第 1.10 図のようになる。この図では縦軸に  $e_i$  を普通目盛にとり、横軸には時間  $t$  を対数目盛にとれば、(1.2.26) 式の条件のもとでは、(1.2.26) 式のあらわすものは直線となり、(1.2.27) 式の条件のもとでは時間の経過とともにヒズミは (1.2.28) 式に漸近し、ついにヒズミの進行が停止することになる。

#### 第3節 より一般化した粘弾性測定法

より一般化した粘弾性物質のせん断弾性係数  $\mu$ 、*shear* 的係数  $a$ 、 $\alpha$  を測定するために行うクリープ試験装置は荷重制御式三軸圧縮試験機を利用して行うもので写真 1.1 に示す。その説明図と前章と同じ第 1.3 図である。このクリープ試験機の荷重制御式装置は Lever 比 1/10 の下部懸吊式で、測液圧は零としてクリープヒズミを dial gage (1/100 mm 読み) により測定した。なお、Lever の荷重をかける装置の重さに対して平衡錘でバランスをとっている。

このクリープ試験に使用した土は徳島市南陽町沖積土で、その物理的性質は真比重 2.77、 $L, L, 38.5\%$ 、 $P.L. 21.7\%$ 、 $P.I. 16.8\%$  であって、その粒度分析の結果粘土分 10%、シルト分 60%、砂分 30% の silty loam であり、その粒径加積曲線は第 1.11 図に示す。後述の第3節第2章のトンネル模型実験で述べるように、トンネル模型用本箱はこの土をつめ、これに荷重 0.288  $\text{kg/cm}^2$  をかけて圧入させ 550 分で一次圧入が完了し、それより後は二次圧入状態となり、載荷後 4200 分で荷重を 0.572  $\text{kg/cm}^2$  に増加して 100 分で一次圧入を完了し、その後二次圧入状態になって荷重増加後 1500 分で除荷して地山材料を作成した。



この模型地山材料よりクリープ試験用の灰試体を攪乱しないようにして多数採取して円柱状試料を作成した。これらの試料を荷重制御式三軸圧縮試験機の水室に設置して、一定荷重  $P_i = 0.208, 0.416, 0.520, 0.624, 0.832 \text{ kg/cm}^2$  をそれぞれ単独にかけて多数のクリープ試験を行い、そのときのそれぞれの荷重のときのクリープヒズミを測定したものを表〜1、2に示す。

表〜1、2 (I)

クリープ試験測定値

$P_i = 0.208 \text{ kg/cm}^2$  の場合

時間 $t$ (sec)	$i$ 軸方向変形量 $\Delta l$ (cm)	$e_i = \frac{\Delta l}{l}$	$e_i / (e_i)_{t \rightarrow \infty}$	備 考
0	0	0	0	灰試体 直径 $3.5 \text{ cm}$ 高さ $l = 8.5 \text{ cm}$ $(e_i)_{t \rightarrow \infty} = 0.0406$ 含水比 $27.9\%$ 単位体積重量 $1.94 \text{ g/cm}^3$
10	0.1950	0.0229	0.5640	
20	0.2060	0.0242	0.5961	
30	0.2160	0.0254	0.6256	
40	0.2220	0.0261	0.6429	
50	0.2280	0.0268	0.6601	
60	0.2350	0.0276	0.6798	
90	0.2470	0.0291	0.7167	
120	0.2560	0.0301	0.7414	
150	0.2630	0.0309	0.7611	
180	0.2690	0.0316	0.7783	
210	0.2750	0.0324	0.7980	
240	0.2785	0.0328	0.8079	
300	0.2850	0.0335	0.8252	
360	0.2900	0.0341	0.8399	
420	0.2930	0.0345	0.8498	
480	0.2960	0.0348	0.8571	
540	0.2980	0.0351	0.8645	
600	0.3010	0.0354	0.8719	
720	0.3045	0.0358	0.8818	
900	0.3085	0.0363	0.8941	
1200	0.3150	0.0371	0.9138	
1800	0.3230	0.0380	0.9360	
2700	0.3250	0.0382	0.9409	
3600	0.3260	0.0384	0.9458	
5400	0.3300	0.0388	0.9557	
43200	0.3450	0.0406	1.000	

表~1、2 (II)

クリープ試験測定値

 $P_i = 0.416 \text{ kg/cm}^2$  の場合

時間 $t$ (sec)	$x$ 軸方向変形量 $\Delta l$ (cm)	$e_i = \frac{\Delta l}{l}$	$e_i / (e_i)_{t \rightarrow \infty}$	備 考
0	0	0	0	試体 直径 $\phi = 5 \text{ cm}$ 高さ $l = 8.5 \text{ cm}$ $(e_i)_{t \rightarrow \infty} = 0.0849$ 含水比 28.1% 単位体積重量 $1.938 \text{ g/cm}^3$
10	0.4800	0.0565	0.6659	
20	0.5180	0.0609	0.7172	
30	0.5400	0.0635	0.7479	
40	0.5700	0.0671	0.7902	
50	0.5950	0.0700	0.8245	
60	0.6040	0.0711	0.8375	
90	0.6260	0.0736	0.8669	
120	0.6395	0.0752	0.8857	
150	0.6490	0.0763	0.8987	
180	0.6560	0.0772	0.9092	
210	0.6615	0.0778	0.9164	
240	0.6660	0.0783	0.9223	
300	0.6730	0.0792	0.9329	
360	0.6790	0.0799	0.9411	
420	0.6835	0.0804	0.9470	
480	0.6865	0.0808	0.9517	
540	0.6895	0.0811	0.9553	
600	0.6915	0.0813	0.9576	
720	0.6950	0.0818	0.9635	
900	0.6990	0.0822	0.9682	
1200	0.7040	0.0828	0.9753	
1800	0.7050	0.0829	0.9764	
2700	0.7100	0.0835	0.9835	
3600	0.7120	0.0838	0.9870	
5400	0.7145	0.0841	0.9906	
7200	0.7150	0.0841	0.9906	
10800	0.7180	0.0845	0.9953	
25200	0.7220	0.0849	1.0000	



表~1、2 (Ⅲ)

クリープ試験測定値

 $P_i = 0.520 \text{ kg/cm}^2$  の場合

時間 $t$ (sec)	$i$ 軸方向変形量 $\Delta l$ (cm)	$e_i = \frac{\Delta l}{l}$	$e_i / (e_i)_{t \rightarrow \infty}$	備 考
0	0	0	0	炭試体 直径 $\phi = 2.5 \text{ cm}$ 高さ $l = 8.5 \text{ cm}$ $(e_i)_{t \rightarrow \infty} = 0.1122$ 含水比 $27.9\%$ 単位体積重量 $1.917 \text{ g/cm}^3$
10	0.5900	0.0694	0.6185	
20	0.6400	0.0753	0.6711	
30	0.6650	0.0782	0.6970	
40	0.6840	0.0805	0.7175	
50	0.6980	0.0821	0.7317	
60	0.7100	0.0835	0.7442	
90	0.7360	0.0866	0.7718	
120	0.7550	0.0888	0.7914	
150	0.7690	0.0905	0.8066	
180	0.7800	0.0918	0.8182	
210	0.7880	0.0927	0.8261	
240	0.7950	0.0935	0.8333	
300	0.8090	0.0952	0.8485	
360	0.8200	0.0964	0.8592	
420	0.8280	0.0974	0.8681	
480	0.8360	0.0985	0.8789	
540	0.8420	0.0991	0.8832	
600	0.8510	0.1001	0.8922	
720	0.8600	0.1012	0.9020	
900	0.8720	0.1026	0.9144	
1200	0.8750	0.1029	0.9171	
1800	0.9000	0.1059	0.9438	
2700	0.9280	0.1092	0.9733	
3600	0.9310	0.1095	0.9759	
5400	0.9410	0.1100	0.9866	
7200	0.9540	0.1122	1.0000	

表 1.2 (IV)

クリープ試験測定値  
 $P_A = 0.624 \text{ kg/cm}^2$  の場合

時間 $t$ (sec)	変形量 $\Delta l$ (cm)	$e_i = \frac{\Delta l}{l}$	$e_i / (e_i)_{t \rightarrow \infty}$	備 考
0	0	0	0	試体 直径 $\phi = 5 \text{ cm}$ 高さ $l = 8.5 \text{ cm}$ $(e_i)_{t \rightarrow \infty} = 0.1795$ 含水比 $27.7\%$ 単位体積重量 $1.958 \text{ g/cm}^3$
10	0.9250	0.1088	0.6061	
20	1.0000	0.1176	0.6552	
30	1.0400	0.1224	0.6819	
40	1.0750	0.1265	0.7047	
50	1.1040	0.1299	0.7237	
60	1.1270	0.1326	0.7387	
90	1.1840	0.1393	0.7760	
120	1.2190	0.1434	0.7989	
150	1.2520	0.1473	0.8206	
180	1.2840	0.1511	0.8418	
210	1.3080	0.1539	0.8574	
240	1.3260	0.1560	0.8691	
300	1.3560	0.1595	0.8886	
360	1.3820	0.1626	0.9058	
420	1.4000	0.1647	0.9175	
480	1.4220	0.1673	0.9320	
540	1.4300	0.1682	0.9370	
600	1.4480	0.1704	0.9493	
720	1.4690	0.1728	0.9627	
900	1.4940	0.1758	0.9794	
1200	1.5255	0.1795	1.0000	

表 1.2 (V)

クリープ試験測定値

$P_i = 0.832 \text{ kg/cm}^2$  の場合

時間 $t$ (sec)	$i$ 軸方向変形量 $\Delta l$ (cm)	$e_i = \frac{\Delta l}{l}$	$e_i / (e_i)_{t \rightarrow \infty}$	備 考
0	0	0	0	試験体 直径 $\phi = 2.5 \text{ cm}$ 高さ $l = 2.5 \text{ cm}$ $(e_i)_{t \rightarrow \infty} = 0.2089$
10	1.1100	0.1306	0.6252	
20	1.1950	0.1406	0.6730	
30	1.2350	0.1453	0.6955	
40	1.2700	0.1494	0.7152	含水比 27.9% 単位体積重量 1.90 g/cm <sup>3</sup>
50	1.3000	0.1529	0.7319	
60	1.3200	0.1553	0.7434	
90	1.3710	0.1613	0.7721	
120	1.4080	0.1656	0.7927	
150	1.4370	0.1690	0.8090	
180	1.4620	0.1720	0.8233	
210	1.4820	0.1743	0.8344	
240	1.5030	0.1768	0.8463	
300	1.5380	0.1809	0.8660	
360	1.5675	0.1844	0.8827	
420	1.5940	0.1875	0.8975	
480	1.6150	0.1900	0.9095	
540	1.6300	0.1918	0.9181	
600	1.6520	0.1943	0.9301	
720	1.6812	0.1978	0.9468	
900	1.7210	0.2025	0.9693	
1200	1.7760	0.2089	1.0000	

表 1.2 に示すクリープ試験結果より  $e_i \sim \log_{10} t$  の関係として plot したものが第 1.12 図である。(1.2.17) 式を (1.2.26) 式に代入して

$$e_i = \frac{P_i - P_{i0}}{2(1+p)} \left[ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right] \cdot (a + b \log_{10} t) \quad (1.2.32)$$

となる。この式は  $t = \text{const.}$  とした場合に  $e_i$  と  $(P_i - P_{i0})$  が比例関係にあることを示している。そこでクリープ試験の結果から時間  $t$  をパラメーター (10", 30", 60", 120", 300", 1200", ) として  $P_i$  と  $e_i$  との関係を描いたものが第 1.13 図である。いずれも上限降伏値  $(P_i)_u$  以下で下限降伏点  $P_{i0}$  をほぼ通る直線となって (1.2.32) 式の内容と一致している。このことより  $P_i \sim e_i$  曲線の

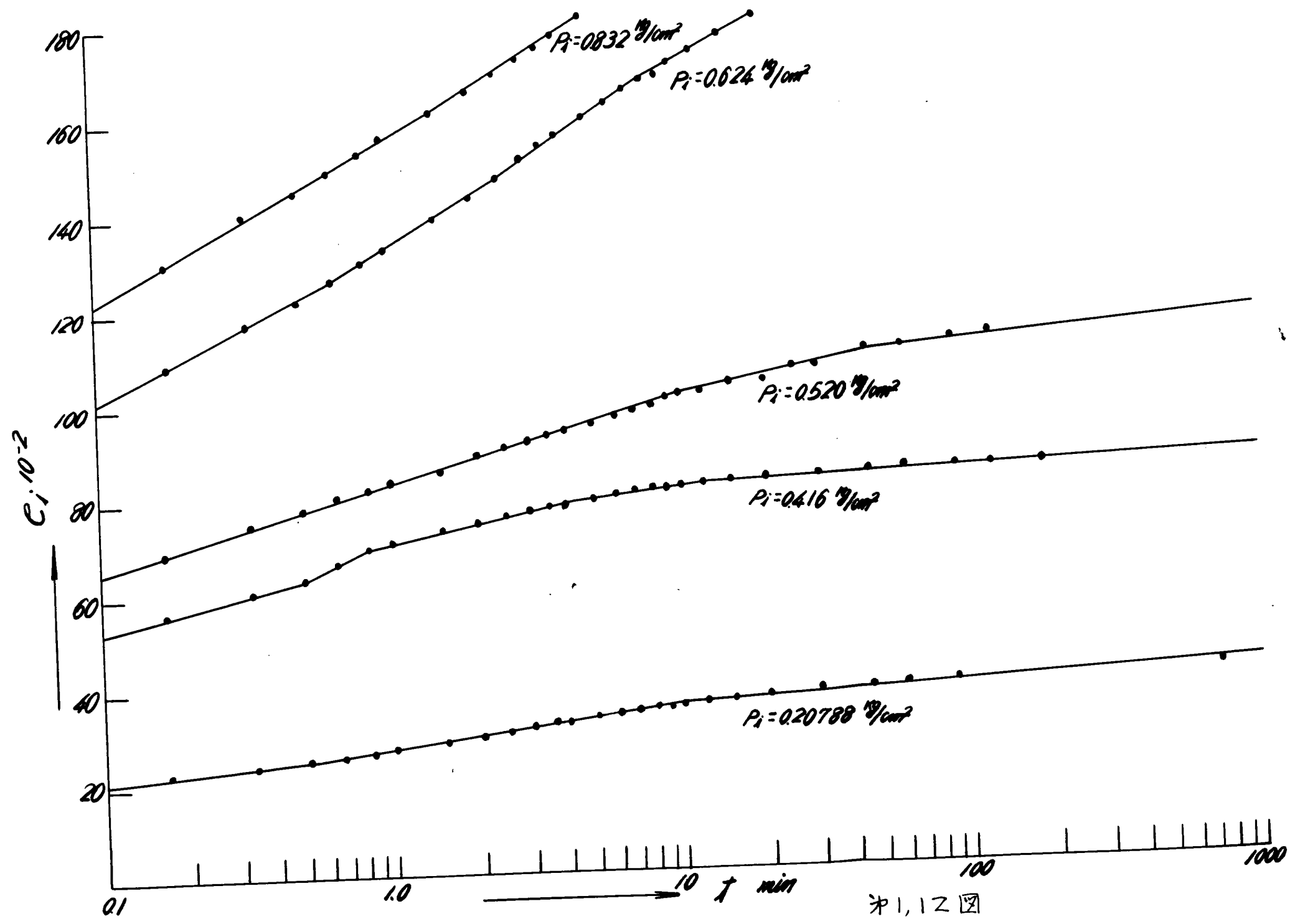
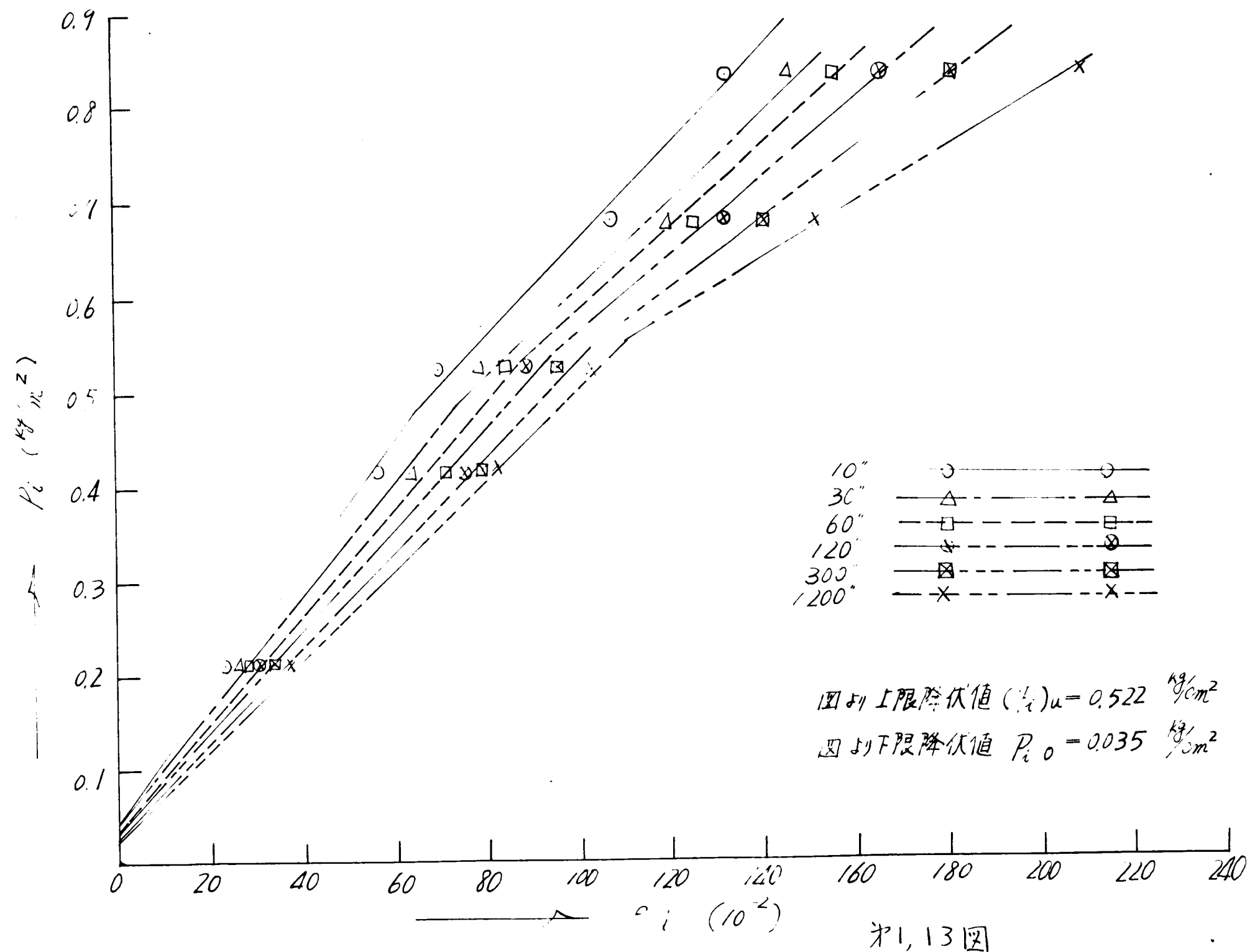
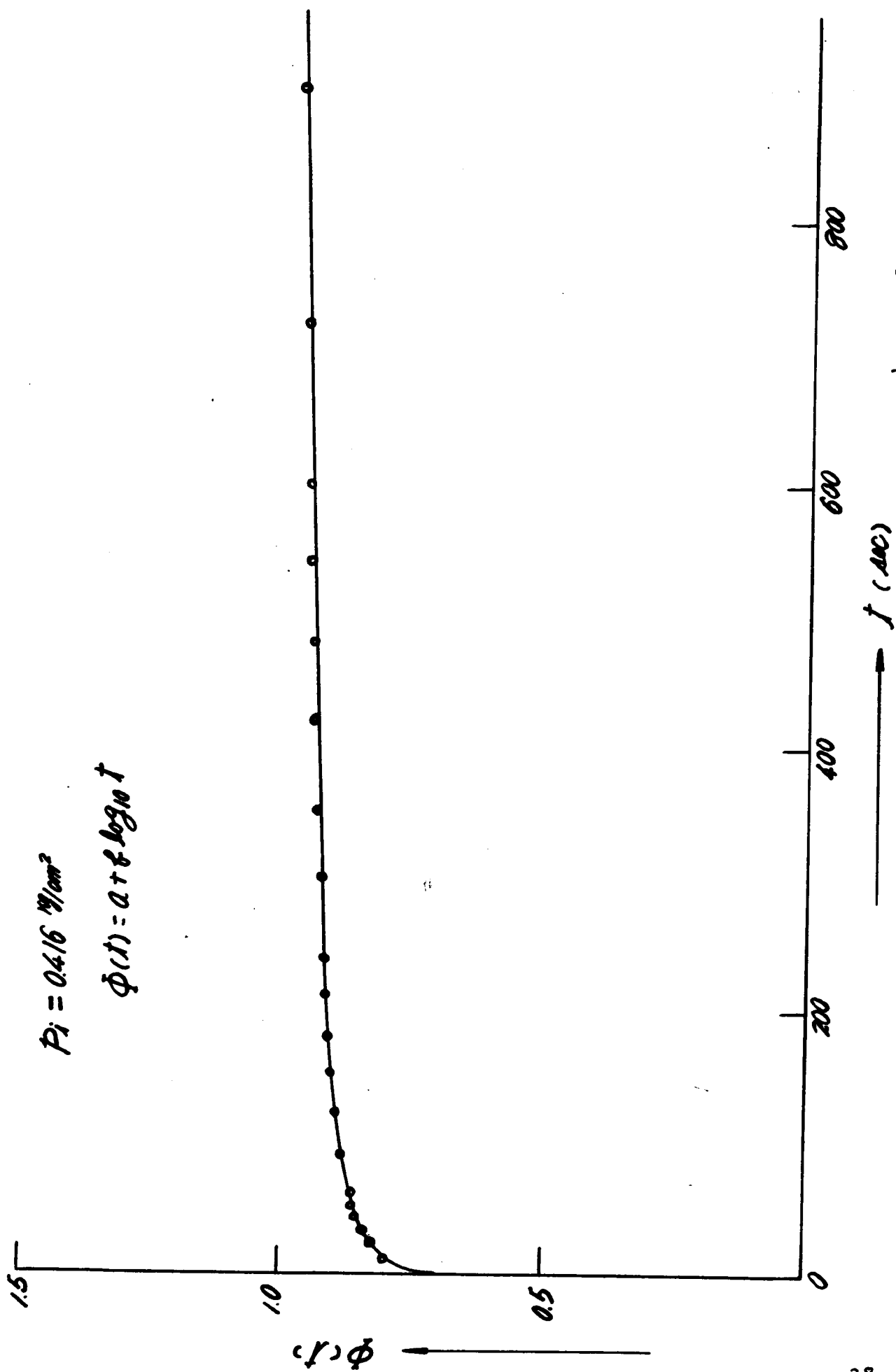


图 1, 12

( $P_i$ )<sub>u</sub> 以下の直線部からの  $P_i$  の値を示す破線との交点を求めることにより、下限降伏値は  $P_{i0}$   
 $= 0.035 \text{ kg/cm}^2$  とする。また  $P_i \sim e$  の関係直線の折れた点はいずれの点でも同じ値をと  
 り、これが上限降伏値であって、その平均値として ( $P_i$ )<sub>u</sub>  $= 0.522 \text{ kg/cm}^2$  とする。







1,15 図



つぎに使用した土の地山材料のポアッサン比 $\nu$ の測定を行うには、伊藤<sup>20)</sup>氏の考案による実験装置（これをポアッサン比測定器と呼ぶことにする）による。その装置の写真へノスに示す。この装置の油室の中は直径 $5\text{ cm}$ 、高さ $7.5\text{ cm}$ の円柱状試体を作成して設置する。この試体の横ヒズミを常に脈ながら上下圧 $\sigma_v$ を加圧用ピストンにより加え、そのとき生ずる側圧 $\sigma_h$ を測定する。 $\sigma_h$ はアルーベングリングにより、 $\sigma_v$ はブルドンゲージによって測定する。写真へノスに示すポアッサン測定器のシリンドラの側方についているハンドルは調整用ピストン押し込み用ハンドルで、油は完全な非圧縮性を有するものでなく、また油に接する部分の弾性変形もあるから、それらによる容積変化を補正するためにあらかじめ求めておいた規定量だけそれぞれ側圧に応じて調整用ピストンを押し込むことにより、試体の横ヒズミを防止す

写真へノス

るのである。

$\sigma_v \sim \sigma_h$  の測定値の相関関係を図に plot したものが第 1、16 図である。これより (1、1、14) 式によって

$$K = \frac{\sigma_h}{\sigma_v} = \frac{\nu}{1-\nu} = 0.90$$

となり、ポアッサン比は  $\nu = 0.474$  となる。

使用した土の地山材料のせん断弾性係数を求めるには、上限界状態以下のクリープ試験測定結果を用いて (1、2、30) 式によって計算すれば表へノス となる。

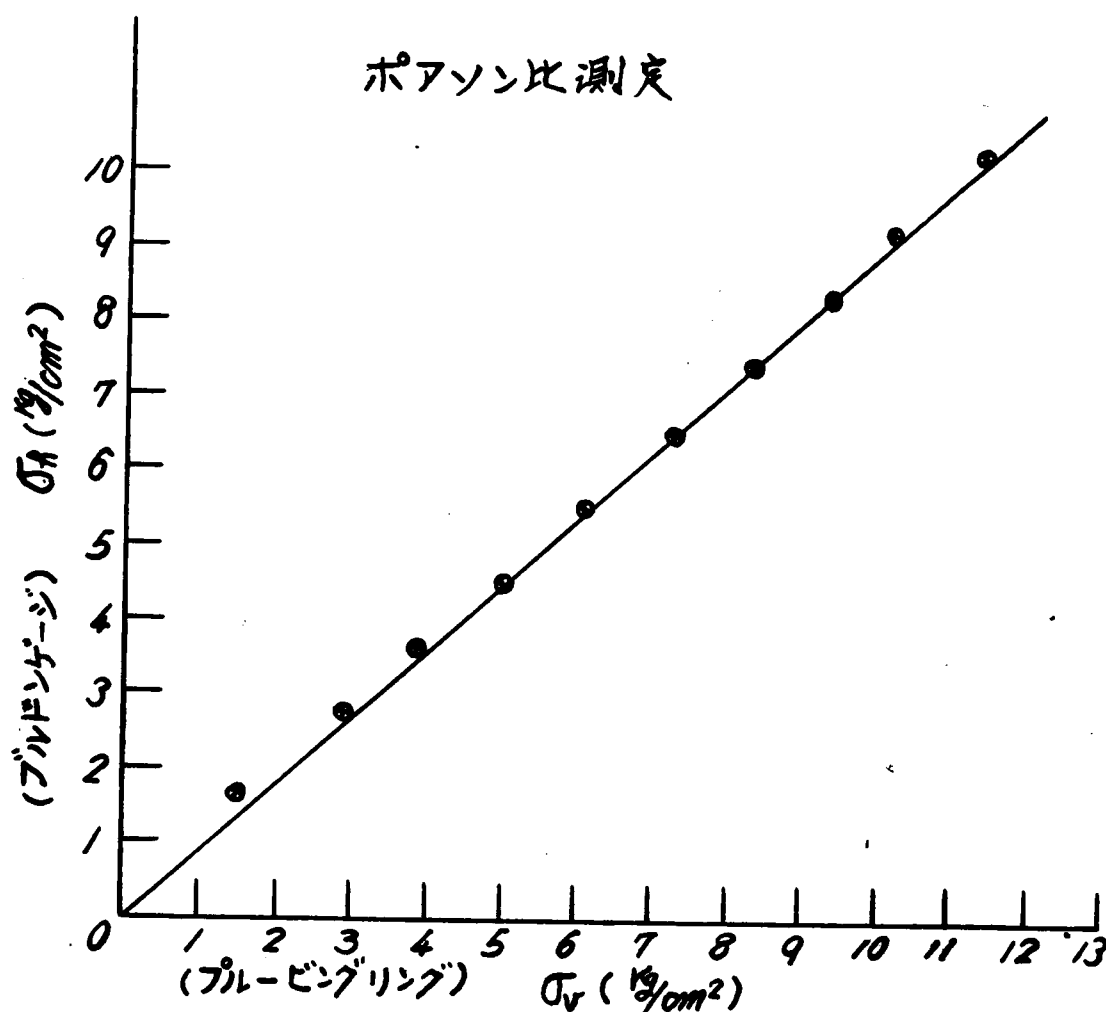
表へノス

の測定値

$P_i \text{ (Kg/cm}^2\text{)}$	$P_i - P_{i0} \text{ (Kg/cm}^2\text{)}$	$(e_i)_{t \rightarrow \infty}$	$\eta \text{ (Kg/cm}^2\text{)}$	備 考
0.208	0.173	0.0406	1.4444	$\nu = 0.474$ $P_{i0} = 0.035 \text{ Kg/cm}^2$
0.416	0.277	0.0849	1.5220	
0.520	0.381	0.1122	1.4661	

表へノスの $\eta$ の平均値をとって、この場合のせん断弾性係数として  $\eta = 1.4776 \text{ Kg/cm}^2$  とする。





第1.16図

#### 第4節 結 語

第1、17図のクリープ曲線を見ると上屈服状態以下の応力に対してはヒステリシスと時間の対数が直線関係にある。このことは、 $\sigma = \sigma_0 + k \log t$  式を実証したこととなる。

その直線の勾配は応力の増加と共に大きくなる。上屈服状態以上では上方に凹の曲線となって相当時間経過の後に破断にいたることを暗示している。

前節の実験において上屈服状態は  $(P_0)_u = 0.522 \text{ kg/cm}^2$  となっているが、クリープ試験で  $P_i = 0.416 \text{ kg/cm}^2$  のときのクリープ曲線より  $\sigma(t)$  を求めているから、この場合はより一般化した粘弾性体と仮定できる状態で試験を行ったこととなる。

さらにこの主の *time function*  $\sigma(t) = 0.70 + 0.091 \log_{10} t$  を用いて、 $P_i = 0.416 \text{ kg/cm}^2$  のときの  $\sigma = 1.5220 \text{ kg/cm}^2$  を用いて (1.5.26) 式によって求めた計算値と実験値とを比較したものが第1、17図であって、よく近似していることがわかる。前章の場合のように主を簡単な粘弾性体とみなした場合の第1、16図に示される近似性と比較すれば、主をより一般化した粘弾性体と仮定した力電模型を採用した方がより近似性がよくなることを示している。

$C_i$ — $t$  曲線

$\begin{cases} \text{——} & \text{實驗值} \\ \text{---} & \text{計算值} \end{cases}$

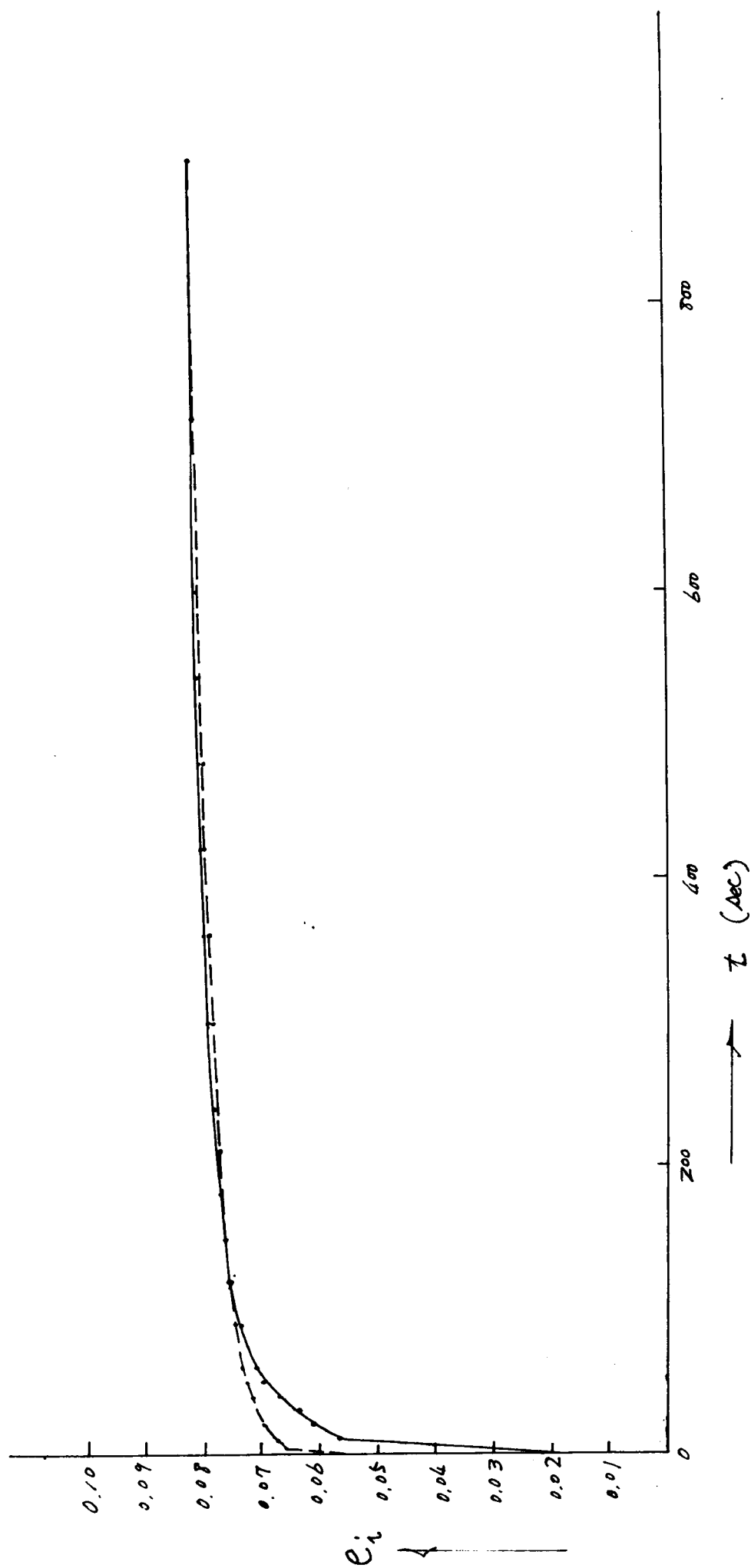
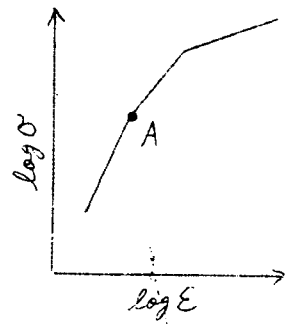
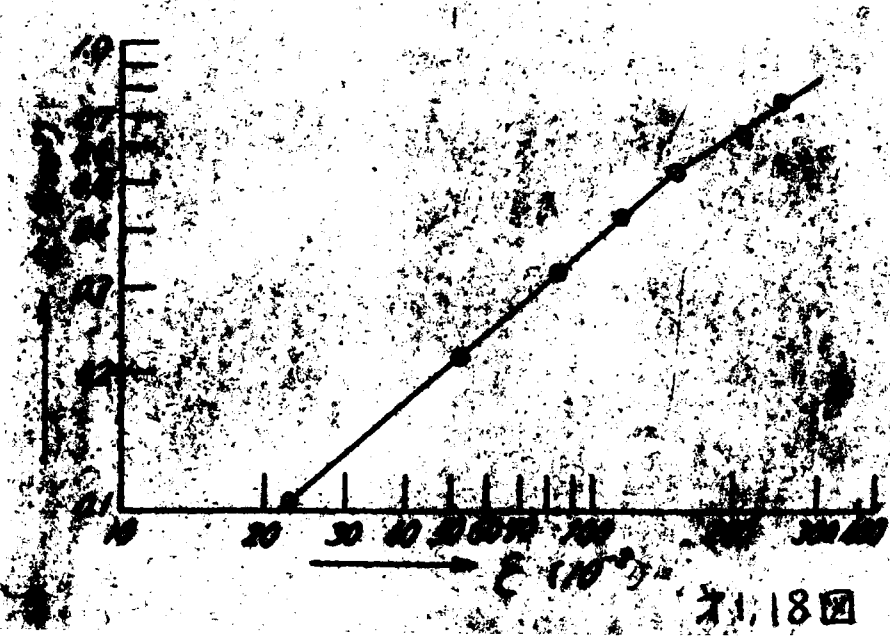


図 1, 17



第1.19図

第1.18図

また第1.17図でわかるように  $\sigma \approx 110 \text{ sec}$  までは急激に  $\epsilon_i$  が増加し、それ以後は  $\epsilon_i$  が緩慢に増加することを示している。

つぎに第2章の第1.17図に示したような側壁圧を零とする荷重制御の圧縮試験を行って第1.18図と同様な図を画けば、この場合使用した土では第1.18図となる。このときの載荷速度は  $\dot{\epsilon} = 0.01 \text{ kg/cm}^2/\text{min}$  とした。この試験は破壊まで荷重を次第に増加していった場合の短期間クリープ試験に相当するもので、この土の試料が荷重制御の圧縮試験によって示す挙動は応力の履歴問題を除外して試料の内部機構の変化状態のみを考えると普通のクリープ試験による挙動と同様な関係にあると考えられ、第1.19図の中のある時間のパラメーターに相当する一曲线と同様な特性を示すものと考えられる。

この種の試験を行なって破壊発現までの応力ヒズミの関係を対数目盛で図示すると第1.19図のような折線となる。すなわち応力  $\sigma$  とヒズミ  $\epsilon$  の間には、一般に、

$$\epsilon = C \sigma^n \quad (1.2.33)$$

なる関係があり、初期の部分では  $n \approx 1$  の直線となるが、この部分をすぎると各点ごとに指数  $n$  の値が変化している。そうして第1.19図の第1折点Aがクリープ限、すなわち上限降伏値である。(1.2.32)式において  $P_{10} \approx 0$  とすれば

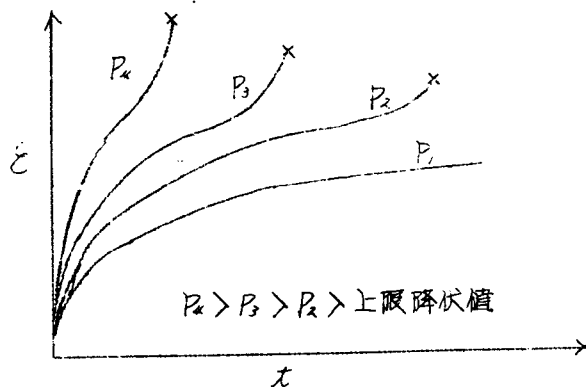
$$\epsilon_i = \frac{P_i}{2(1+\nu)} \left[ \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right] (a + b \log_{10} t) \quad (1.2.34)$$

となる。この式において  $\sigma = \text{const}$  としたものと(1.2.33)式で上限降伏値以下の応力に対し  $n \approx 1$  とおいたものとは同型になるから、荷重制御の圧縮試験が普通のクリープ試験と同様な特性をもつものと考えてよいわけである。ゆえに第1.18図において直線の第1折点の値を求めると上限降伏値として  $(P_i)_u = 0.52 \text{ kg/cm}^2$  となっていて、第1.19図より求めた  $(P_i)_u = 0.52 \text{ kg/cm}^2$  と殆んど同一となっていて、上述の事柄が実証されたわけである。

## 第3章 摩擦性塑性体とみなされる地山

### 第1節 土の摩擦性塑性体理論

前章において土のクリープ限度、すなわち上限降伏値以下の応力状態ではクリープ現象を呈し、*rheology* 的立場より変形挙動を論じてきたのであるが、応力が上限降伏値以上の値になるときは、応力が大になるにつれて変形速度が大となる。このことは第1、2図に示すように  $\log t$  のクリープ曲線を見ると上限降伏値 ( $P_u$ )  $\approx 0.5$  スズ  $\text{kg/cm}^2$  以上の  $P_u = 0.6$  スズ及び  $0.8$  スズ  $\text{kg/cm}^2$  の応力のときには上方に凹の曲線になって時間とともに変形速度が大となっていることが判る。このことは相当時間経過の後に破壊にいたることを暗示している。



第1、2図

の前後において定常状態とみなしうる範囲が存在している。また上限降伏値以上の応力のときの流動特性は初期ヒズミ速度が増大することであったが、これは粘性土粒子間の移動が上限降伏値を境として全く異なった挙動をもち、ある時間経過後ついに粒子間結合力が切断されてクリープ破壊を生ずるものと考えられる。なお写真〜1、3は一定の圧縮荷重によってクリープ破壊を生じた供試体の状態を刷示したものであって、一つのせん断面に沿うスベリ破壊となることが明瞭である。従って圧縮クリープについてせん断強度と垂直応力の関係が Coulomb-Mohr の式

村山博士、張田博士<sup>25)</sup>に依れば第1、2図に示すように不攪乱粘性土試料に上限降伏値より大きい一定応力を載荷すると変形速度は徐々に減衰し、ある期間中は一定速度を持続し、やがて再び変形速度が増加して破壊にいたる。これがクリープ破壊と称する現象である。荷重の異なる程クリープ破壊に至る時間は短いのは当然であるが、曲線の形はいずれも中間の変曲点、すなわちヒズミ速度最小の点があり、この点



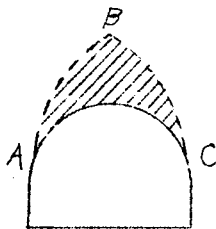
写真〜1、3

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad (1.3.1)$$

で表わされると考えられる。ここに  $C$  : 粘着力,  $\varphi$  : 内部摩擦角 とする。

トンネル掘削後系添のままのものが崩壊したり、または支保工の盛替え、水外しの際によくおこる崩壊などの現象を土質力学的にみると、土の破壊にせん断抵抗が関与してくる。すなわち粘性土のような地山中にトンネルを掘削したとき、トンネル孔の周辺には、トンネルの土被り厚さ及び土の単位体積重量、ポアッサン比、トンネル孔の形及び大きさに応じて応力集中が発生するが、この応力集中の結果 Mohr の応力円が (1.3.1) 式で示される限界線を切るような場合は破壊をおこすことになる。これは自然状態の土塊、または人工的な土構造物が外力の作用によって、その平衡を失い破壊する場合に、その形式は全くせん断破壊であるのと同様の現象で、外力による応力集中により土中に生起するせん断応力がせん断強度とよばれる限界値に至ると、土は弾性状態から塑性状態に移行し始め、大きな塑性変形が引続いて起り、土はせん断破壊を生ずるのである。この種の塑性流動が起るとき土の平衡状態を解析する土質力学の分野をここでは土の摩擦性塑性論的解析問題とよぶことにする。これには土圧、支持力、法面の安定の問題が含まれているが、トンネル孔の崩壊もこの問題に含まれるものである。

このトンネルの崩壊の根手をみると第1、2/ 図に示す影線部が落下していることが多い。この原因は第8章第4章でのべるごとく第1、2/ 図の  $AB$ ,  $BC$  曲線にそうてり線



第1、2/ 図

が発生して、これに囲まれた部分が落下すると考えられ、このり線を求めるにはトンネル周辺の応力平衡条件式と (1.3.1) 式より導き出されるから、この場合のトンネル周辺の地山の土の土質力学特性は土のせん断破壊状態を示す摩擦性塑性体とみなされる。ゆえに (1.3.1) 式の Coulomb - Mohr の式が基礎条件となる。

そもそも土の塑性理論の歴史は、Coulomb Rankine に遡らずとも相当に古く、Boussinesq はすでに粒状物質の

応力～ヒズミ関係を導入しているし、Kötter - Massau の式が提議されたのは、金属塑性論で知られている Hencky の式よりも以前のことである。近時土性論の発達と共に、例へば塑性博士の塑性理論のような注目すべき研究が行われ、他方実験的にも数多くの研究がみられるが、限界塑性状態で土中の各点の応力を理論的に求めようとすると、なお上述の Kötter の考えは有力な手段の一つである。これにはやはり (1.3.1) 式が有力な手がかりとなっている。

応力平衡条件式と (1.3.1) 式と境界での応力条件から応力成分を求めれば問題は静定平面ヒズミ問題となる。静定であれば塑性ヒズミ場分の制限がないから、降伏に達した部分(このときせん断応力=せん断強度)では塑性流動がおこり、未降伏域の弾性ヒズミを無視でき、金属と同じく土を剛塑性体と考えるよい。すなわち連続的塑性域内の弾性変形に比べ塑性変形が十分大きい場合には限り、(1.3.1) 式の適用が許される。

## 第2節 土のせん断抵抗及びその測定法

せん断強度、すなわちせん断抵抗を表わす (1.3.1) 式はせん断破壊の時に土の中で何陳水圧  $u_w$  が生ずるならば

$$\tau = C + (\sigma - u_w) \tan \varphi = C + \bar{\sigma} \tan \varphi \quad (1.3.2)$$

となる。ここに  $\bar{\sigma}$  は有効圧(または粒子間圧力)を表わしている。ところで、 $\varphi$  の値は一つの土についてと固く定数でなく実験の条件やせん断ヒズミの速度、含水比、何陳水比その他によって変るものであることは土の性質の大きな特徴である。(1.3.2) 式を金属の塑性論における Tresca の条件  $\tau = C$  (一定) と較べると、土ではせん断抵抗が条件により変わる  $C$ 、内部摩擦に関

厭する $\varphi$ 、応力状態及び含水状態に依存する $\varphi$ の三つに関連をもつので破壊の応力条件が金属より大分複雑であり、従ってその塑性論の扱いも著しく困難なるのである。

実験室でせん断抵抗を求めるには、ある装置とある条件の下で試料のせん断面に対する垂直荷重 $P$ を変えて $\tau$ を求め、 $P$ 、 $\tau$ を図示すると一般に近似直線を得るから、その直線が $\tau$ 軸を切る座標を $c$ 、その直線の $P$ 軸に対する傾角を $\varphi$ と定め、この $c$ 、 $\varphi$ の値を用いて任意の $\sigma$ に対するせん断抵抗値が(1)、(2)、(3)式で与えられるとするのである。土が水で飽和していてせん断中も変らないとすれば、 $P$ はすべて間隙水圧として発生するから見掛け $\varphi=0$ となる。飽和した自然軟粘土の破壊状況は水が非常に多いのでこの状態に近い。水が十分排除される状態で試験をすれば、一般に $\varphi$ は零とまらない。このように強度に及ぼす間隙水の影響は著しいので、せん断試験は普通急速試験(記号Q-試験)、緩速試験(記号S-試験)、圧入急速試験(記号Q<sub>0</sub>-試験)に分けるのが原則である。

トンネル掘削後の周辺地山の土の破壊現象を考えると、地山が粘性土の場合は塑性流動が起るとき土の平衡状態より摩擦性塑性体理論により、そのときのトンネル周辺の応力分布や迂り線を求める場合は、急速試験法によってえられたせん断抵抗値を用いるのが妥当と考えられる。その理由としてトンネルを掘削した時に地山の応力状態が自然状態の応力状態から地山に開孔したことにより生ずる応力集中状態に急激に変化するためである。また上限降伏値より大なる応力集中の発生により破壊まで、ある期間素掘のままを形を崩しながら変形を経て後に崩壊する場合の破壊時の応力を求める場合は緩速試験法によって求められたせん断抵抗値を用いるのが妥当と考えられる。しかし粘性土の上限降伏値より非常に大なる応力集中の発生する場合とか、砂質の地山でトンネル掘削後ともなく崩壊をおこす場合は急速試験によるせん断抵抗値を用いるのが妥当と考えられる。

土のせん断抵抗の測定法としては直接せん断試験、三軸圧縮試験、一軸圧縮試験の三つの方法が一般に行われている。直接せん断試験の方法は進行性破壊をおこすことと、せん断試験中のせん断面位置の変化と、完全に平面でせん断されないことという点に欠点があるが、三軸圧縮試験では二つの主応力が知れているから応力状態が求められるので、破壊時のモール円が画きうる長所がある。一軸圧縮試験は粘土にかぎられ、内部摩擦角 $\varphi=0$ とみなさうる場合にはしか適用できない。それで三軸圧縮試験が今のところ理想的であるが多量の土の試料を要し、これに制約されて少量の土試料を用いてせん断抵抗値を求める場合は止むを得ず直接せん断試験によることとする。

### 第3章 結 語

土のせん断抵抗はその試験法及び試験装置及び荷重のかけ方によって違って来る事と、実際のトンネル周辺の地山の土のせん断破壊の機構はせん断試験装置の中におこるせん断破壊の機構と異なったものがあると考えられる事より、土のせん断抵抗の本質が複雑なものであるが、地山の土を摩擦性塑性体とみなされるときはヒズミ制御の急速せん断試験によってせん断抵抗を測定し、これを摩擦性塑性体とみなされる地山中のトンネル周辺の応力を求める理論式に代入して応力を計算し、別にこのトンネル模型実験により応力を測定して求めた実験値とさきの計算値とを比較して、理論が妥当かどうかを調べることにする。これに関して第5章第3節を述べることにする。

また巨振トンネルにおいて、トンネル掘削後長年にわたって大なる変形をおこし、強大なる支保工がなければ当然崩壊すると考えられる地山でトンネル周辺の含水比の変化が測定せられている事より、上限降伏値以上の応力状態により土のせん断破壊のおこるときにせん断抵抗は、緩速せん断試験法によって求めるのが妥当であることが推定できるのである。

## 第2編 軟弱な地山中のトンネル周辺の応力分布 及び変形挙動に関する理論的考察

### 第1章 基礎的考察

#### 第1節 本編における研究目的と方法

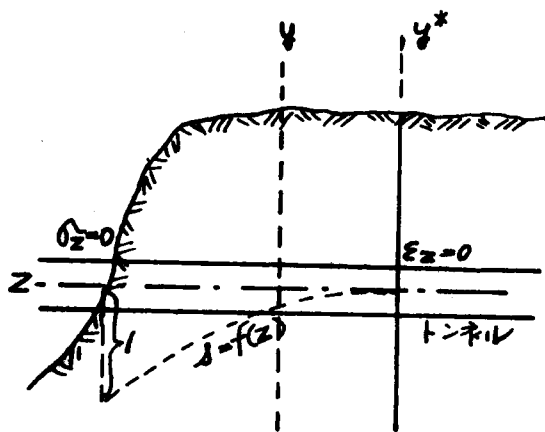
地山を単純に、粘弾性体とみなした場合とか、または地山をより一般化した粘弾性体とみなした場合、地山材料は一般に粘性土であるが、このような地山の中にトンネルを掘削したとき、そのトンネルの周辺におこる応力分布の状態を求めるには、その応力の値がその土の上限降伏値以下の場合には、そのトンネルの周辺の変形挙動は時間の経過にとどまりある終局の変形量に到達して終局変形量とする。その終局の変形量は弾性論より求めた変形値となると考えられ、この場合のトンネルの周辺の応力分布は弾性論より求められることとなる。またトンネル周辺の地山の土が塑性流動をおこすか否かを調べる場合も、まず最初に弾性論より求めた応力の値よりモールの応力円を求め、これが土の *Coulomb - Mohr* の(1.3.1)式または(1.3.2)式であらわされる限界線を超えるか否かを調べることによって、トンネル掘削後と弾性状態にあるか塑性状態にあるかを調べなければならぬ。そのために地山の中にトンネルを掘削したことによっておこる応力分布は弾性論の立場より求めることが必要となる。この応力を求めた式より誘導してさらに変形量を求めて、その関連性を調べることは本編の研究の基礎的問題である。

弾性体としての地山中のトンネル周辺の応力分布が、その地山の土の上限降伏値以下の値であるならば、その変形挙動は弾性論より求められる変形量にある時間函数を乗じた式でもって表わされる。しかしその応力分布が地山の土の上限降伏値より大となるときには、トンネル周辺が局部的にまたは周辺全範囲にわたって塑性流動をおこすようになる。また砂のような地山の緊密トンネルではすぐ崩壊することとなる。このような場合はトンネル周辺の一部または全範囲にわたって摩擦性塑性体とみなされる地山の状態となっている。すなわちトンネル周辺部くの一部または全範囲にわたってモールの応力円が *Coulomb - Mohr* の(1.3.1)式または(1.3.2)式であらわされる限界線と切する場合であって、このときの解法は応力平衡条件式とこの降伏条件式と境界条件とより応力分布を求める摩擦性塑性体理論によるべきである。トンネル周辺の地山が摩擦性塑性体とみなされるときのトンネル周辺の応力分布は地山の重力の作用を考えねばならぬので、これに関する研究は殆んどなされていない。重力の作用するときの応力平衡条件式と降伏条件式とより連立偏微分方程式を求め、これより特異連立偏微分方程式を導き、物理面の特異曲線がなり線となり、双曲型偏微分方程式がえられる結果塑性流動領域内の解はトンネル周縁上の境界条件よりのみ求められ、このなり線に沿って近似回逐次法によってトンネル周辺の応力分布を求めることができる。またこの種の問題で特殊の場合として摩擦性塑性体としての水平層を有する地山中のトンネル応力分布を求め、第3編第3章の模型実験と比較して摩擦性塑性体理論を検証することとする。

つぎに実際には地山が成層を有する互層地山中にトンネルを掘削する場合が多いが、この場合互層の一つの層が軟弱な場合の応力分布を求める。この場合も前述の等方性の地山の場合で説明したように、異方性体の弾性体理論によってトンネルが異方性体とみなされる地山中のトンネル周辺応力分布の理論を求め、この理論式においてその互層の中の一つの層が軟弱である場合はその層の弾性係数が非常に小であるとして応力集中がどのように変化するかを調べることによって、この場合の崩壊の原因を調べることにする。

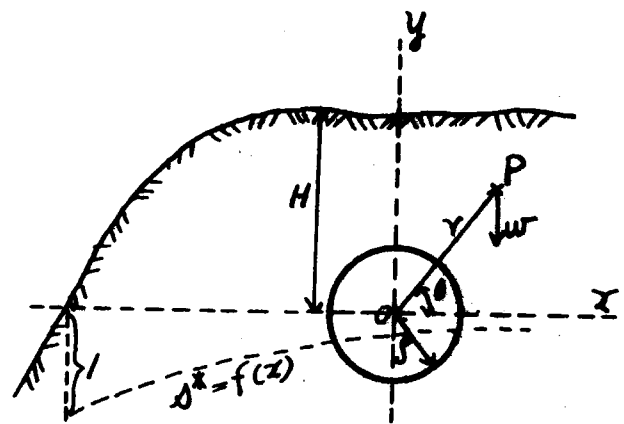
## 第2章 表掘トンネル周辺の応力分布と変形との関連性の理論的考察

弾性体とみなされる等方等質の地山が水平な地表面をもつとき、この地山中のかなり深い地奥に掘削した表掘円形トンネル周辺の応力分布については Hanns Schmid<sup>26)</sup> 及びムロギ<sup>27)</sup> 氏等によって研究されている。また変位については Hanns Schmid が求めている。しかしながら変位の式の中には rigid body displacement の量が入っている。現場でトンネルの半径方向の変位を測定できる際は、硬岩中に円形トンネルを掘削し、このため周辺が変形しないものとし、これから元にある弾性地山中に円形トンネルを掘削した後トンネル円孔が変形するとき、手前の硬岩トンネル円孔縁より半径方向に移動した変形量を測定した値となる。このような変形量を求めるには Hanns Schmid の式の中の rigid body displacement の量を零としなければならない。この問題について Hanns Schmid は考えていないので、この点について応力を求める式より積分して変形量を求める断層より rigid body displacement の量を求める方法について述べる。



トンネル縦断面図

第2.1図



トンネル横断面図

第2.2図

第2.1図、第2.2図に示すように等方等質の弾性体とみなされる地山の地表面よりHなる深さの地奥に円筒座標の原点Oをとり、水平軸をx軸、鉛直軸をy軸として、x、y軸に直交する水平軸をz軸とした座標をとる。xy平面において動径rはOx軸よりθの角をなすとする。θは反時計方向にとったものを正の値とする。この極座標を考えたときの動径方向直応力を $\sigma_r$ 、接線方向直応力を $\sigma_\theta$ 、せん断応力を $\tau_{r\theta}$ とする。またz軸方向の直応力を $\sigma_z$ 、rz面におけるせん断応力を $\tau_{rz}$ 、θz座標をとったときのせん断応力を $\tau_{\theta z}$ とする。このときの応力平衡条件式は次式となる。次式において $F_r$ 、 $F_\theta$ 、 $F_z$ はそれぞれ物体力の動径方向、接線方向、z軸方向の成分を表わすとする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1.1)$$



$\mu$ :ポアッソン数,  $E$ :ヤング率,  $\gamma$ :せん断弾性係数,  $u_r$ :半径方向の変位,  $\Delta\theta$ :接線方向の角変位,  $u_z$ :Z方向の変位, とすれば,  $r, \theta, z$  方向のヒタミをそれぞれ  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$  とし,

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial \Delta\theta}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

となる。これを用いて応力の次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2\gamma \left\{ \varepsilon_r + \frac{\varepsilon_v}{\mu-2} \right\} = \frac{\mu E}{\mu+1} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\varepsilon_v}{\mu-2} \right\} \\ \sigma_\theta &= 2\gamma \left\{ \varepsilon_\theta + \frac{\varepsilon_v}{\mu-2} \right\} = \frac{\mu E}{\mu+1} \left\{ \frac{u_r}{r} + \frac{\partial \Delta\theta}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon_v}{\mu-2} \right\} \\ \sigma_z &= 2\gamma \left\{ \varepsilon_z + \frac{\varepsilon_v}{\mu-2} \right\} = \frac{\mu E}{\mu+1} \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\varepsilon_v}{\mu-2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{\mu E}{2(\mu+1)} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \gamma \frac{\partial \Delta\theta}{\partial r} \right\} \\ \tau_{rz} &= \frac{\mu E}{2(\mu+1)} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right\} \\ \tau_{\theta z} &= \frac{\mu E}{2(\mu+1)} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \gamma \frac{\partial \Delta\theta}{\partial z} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.1.3)$$

ただし  $\varepsilon_v$ :体積膨張率として

$$\varepsilon_v = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial \Delta\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

地山の真深い地盤では  $r, \theta$  座標面について考えると  $\varepsilon_z = 0$  となり

$$\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0, \quad \sigma_z = \psi(r, \theta) \dots\dots (2.1.4)$$

となる。(2.1.1)式の物体力はZ方向に成分をもたないこととなり, (2.1.1)式は極座標  $r, \theta$  についてのみ考えてよく, このときの応力平衡条件式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.1.5)$$

ただし  $F_r = -\gamma \sin \theta$ ,  $F_\theta = -w \cos \theta$ ,  $w$ :地山の単位体積重量である。Hanns Schmid によれば(2.1.5)式を満足する応力は応力函数  $F(r, \theta)$  を用いて次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + 2w r \sin \theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 4w r \sin \theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) - w r \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.1.6)$$

ZのFは次式を満足せねばならぬのである。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) = 0 \dots\dots (2.1.7)$$

トンネルを掘削しない初期の地山の応力状態において  $x, y, z$  軸方向の応力を  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  とすれば

$$\sigma_z = (1-\lambda) \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\mu} \quad (2, 1, 8)$$

と表わして、 $\lambda$  を次のように定義する。

$$\lambda = 0 \text{ とすれば, } \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\mu} \text{ となり, } \varepsilon_z = 0, \sigma_x = \frac{\sigma_y}{\mu-1} \text{ の場合となる.}$$

$$\lambda = 1 \text{ とすれば, } \sigma_z = 0 \text{ となり, } \sigma_x = \frac{\sigma_y}{\mu}, \varepsilon_z \neq 0 \text{ の場合となる.}$$

$\lambda = 0, \lambda = 1$  の間で、 $\lambda = f(z)$  として、 $z$  の函数で表わされ、1 より 小なる値である。  
また  $\varepsilon_x = 0$  のとき

$$\sigma_x = \frac{\sigma_y}{\lambda + \mu - 1} \quad (2, 1, 9)$$

として表わされる。ついで

$$\sigma_x = (1-\lambda^*) \frac{\sigma_y}{\lambda + \mu - 1} \quad (2, 1, 10)$$

として表わして、 $\lambda^*$  を次のように定義する。

$$\lambda^* = 0 \text{ のときは } \sigma_x = \frac{\sigma_y}{\lambda + \mu - 1} \text{ となり, } \varepsilon_x = 0 \text{ の場合である.}$$

$$\lambda^* = 1 \text{ のときは } \sigma_x = 0 \text{ となり, } \varepsilon_x \neq 0 \text{ の場合である.}$$

$\lambda^* = 0, \lambda^* = 1$  の間で  $\lambda^* = f(x)$  として  $x$  の函数で表わされ、1 より 小なる値である。  
つぎに

$$\mu_n = \frac{1}{\mu} \{ (\mu+1)(\mu-n) + n\lambda \} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\mu_{nm} = \frac{1}{\mu} \{ (\mu+1)(m\mu-n) + n\lambda \} \quad \begin{matrix} n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ m = 0, 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

として

$$\mu_0 = \mu + 1$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\mu} \{ (\mu+1)(\mu-1) + \lambda \}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\mu} \{ (\mu+1)(\mu-2) + 2\lambda \}$$

となる。

地表面より  $H$  なる深さの地山のトンネル掘削前の地山の応力状態は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= w(y-H) \frac{1-\lambda^*}{\lambda + \mu - 1}, \quad \sigma_y = w(y-H) \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2, 1, 11)$$

ただし、 $\tau_{xy}$  は  $x, y$  座標をとったときの微小要素に作用するせん断応力である。(2, 1, 11)  
式を極座標で表わせば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\theta = \sigma_1 (y-H) - \sigma_2 (y-H) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\theta = \sigma_1 (y-H) + \sigma_2 (y-H) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta = \sigma_2 (y-H) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.1.12)$$

ただし

$$\sigma_1 = \frac{w}{2} \left\{ 1 + \frac{1-\mu^*}{\mu + \mu^* - 1} \right\}, \quad \sigma_2 = \frac{w}{2} \left\{ 1 - \frac{1-\mu^*}{\mu + \mu^* - 1} \right\}$$

とする。(2.1.12)式において  $y = r \sin \theta$  を代入し、トンネル掘削前の地山の初期応力状態を表わすのに  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  をそれぞれ  $\sigma_r^0, \sigma_\theta^0, \tau_{r\theta}^0$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^0 &= -\sigma_1 H + \left( \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} \right) r \sin \theta + \sigma_2 H \cos 2\theta - \frac{\sigma_2}{2} r \sin 2\theta \\ \sigma_\theta^0 &= -\sigma_1 H + \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} \right) r \sin \theta - \sigma_2 H \cos 2\theta + \frac{\sigma_2}{2} r \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta}^0 &= \frac{\sigma_2}{2} r \cos \theta - \sigma_2 H \sin 2\theta - \frac{\sigma_2}{2} r \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.1.13)$$

この応力状態に対する Airy の応力函数は (2.1.6) 式より

$$F = -\frac{\sigma_1 H}{2} r^2 - \frac{\sigma_2 H}{2} r^2 \cos 2\theta + \frac{r^3}{5} \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} - \mu \sigma_2 \right) \sin \theta + \frac{\sigma_2}{12} r^3 \sin 3\theta \quad (2.1.14)$$

また初期応力状態のときの  $\sigma_z$  を  $\sigma_z^0$  とすれば

$$\sigma_z^0 = (1-\mu) \frac{\sigma_1^0 + \sigma_\theta^0}{\mu} \quad (2.1.15)$$

となる。以上は Hansen-Schmidt の導いた所である。

つぎに地山の初期応力状態のときのヒズミは

$$\mu E \varepsilon_r = \mu E \frac{\partial u_r}{\partial r} = \mu (\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 - \sigma_z^0)$$

となり、これより積分して

$$\mu E u_r = \int (\mu \sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 - \sigma_z^0) dr + \Phi \quad (2.1.16)$$

となり、 $\Phi$  は  $\theta$  のみの函数である。また

$$\varepsilon_\theta = \left( \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) = \frac{1}{E} \left( \sigma_\theta^0 - \frac{\sigma_r^0 + \sigma_z^0}{\mu} \right)$$

であるから

$$\mu E \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} = \mu \sigma_\theta^0 - \sigma_r^0 - \sigma_z^0 - \mu E \frac{u_r}{r}$$

この  $\mu E u_r$  は (2.1.16) 式を代入して

$$\mu E \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \theta} = \mu \sigma_\theta^0 - \sigma_r^0 - \sigma_z^0 - \frac{1}{r} \int (\mu \sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 - \sigma_z^0) dr - \frac{\Phi}{r} \quad (2.1.17)$$

(2.1.7) 式より  $r = \frac{\mu E}{2(\mu + 1)}$  を用いて

$$\tau_{r\theta} = r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} \right)$$

となり、これより

$$\mu E \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} = 2(\mu + 1) \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\mu E}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (2.1.18)$$

(2.1.17) 式を  $r$  につき微分して、(2.1.13) 式及び (2.1.15) 式を代入すれば、

$$\begin{aligned} \mu E \frac{\partial^2 \Delta \theta}{\partial r \partial \theta} = & \left[ \mu \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} \right) + \frac{\mu}{2} \left( \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} \right) - \mu \left( \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} \right) - \left( \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} \right) + \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} \right) \right] \sin \theta + \frac{\Phi}{r^2} \quad (2.1.19) \end{aligned}$$

また (2.1.18) 式を  $\theta$  につき微分して (2.1.16) 式及び (2.1.19) 式を代入して、

$$\begin{aligned} \mu E \frac{\partial^2 \Delta \theta}{\partial r \partial \theta} = & \left[ -\mu \sigma_2 + \frac{\mu}{2} \left( \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} \right) - \sigma_2 \sin \theta - \frac{1}{2} \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} \right) \sin \theta \right] \\ & - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} \quad (2.1.20) \end{aligned}$$

(2.1.19) 式 = (2.1.20) 式より

$$\frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} + \Phi = 0 \quad (2.1.21)$$

となる。この微分方程式の解は次式となる。

$$\Phi = A \sin \theta + B \cos \theta \quad (2.1.22)$$

ただし  $A$  及び  $B$  は  $r$ ,  $\theta$  に関する定数である。

つぎに (2.1.17) 式を  $\theta$  につき積分して

$$\begin{aligned} \mu E \Delta \theta = & \int (\mu \sigma_1^0 - \sigma_r^0 - \sigma_z^0) d\theta - \int \left\{ \frac{1}{r} \right\} (\mu \sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 - \sigma_z^0) dr \} d\theta \\ & - \frac{1}{r} \int \Phi d\theta + R(r) \quad (2.1.23) \end{aligned}$$

ただし  $R(r)$  は  $r$  のみに関する函数である、上式を  $r$  で微分して

$$\begin{aligned} \mu E \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} = & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int (\mu \sigma_1^0 - \sigma_r^0 - \sigma_z^0) d\theta \right\} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \int \left\{ \frac{1}{r} \right\} (\mu \sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 - \sigma_z^0) \right. \\ & \left. dr \right\} d\theta + \frac{1}{r^2} \int \Phi d\theta + \frac{dR}{dr} \quad (2.1.24) \end{aligned}$$

(2.1.24) 式に (2.1.19) 式及び (2.1.15) 式を代入して

$$\begin{aligned} \mu E \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} = & \left[ -\mu \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} \right) + \left( \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} \right) + \frac{\mu}{2} \left( \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} \right) \right] \cos \theta + \frac{1}{r^2} \\ & \times \int \Phi d\theta + \frac{dR}{dr} \quad (2.1.25) \end{aligned}$$

(2.1.16) 式を  $\theta$  で微分してえられる  $\mu E \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$  を (2.1.18) 式に代入して

$$\mu E \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} = 2(\mu + 1) \frac{\tau_{r\theta}^0}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \int (\mu \sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 - \sigma_z^0) dr \right] - \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{d\theta} \quad \dots\dots\dots (2, 1, 26)$$

上式に(2, 1, 13)式及び(2, 1, 15)式を代入して

$$\mu E \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r} = \left[ \mu \sigma_z + \sigma_z - \frac{\mu}{2} \left( \sigma_r + \frac{\sigma_z}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \sigma_r - \frac{\sigma_z}{2} \right) \right] \cos \theta - \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{d\theta} \quad \dots\dots\dots (2, 1, 27)$$

(2, 1, 25)式 = (2, 1, 27)式より

$$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{d\Phi}{d\theta} + \int \Phi d\theta \right] + \frac{dR}{dr} = 0$$

(2, 1, 21)式を用いて  $\frac{dR}{dr} = 0$  とする。これより

$$R = C \quad \dots\dots\dots (2, 1, 28)$$

ただしCは積分定数で $r, \theta$ に關係のない定数である。したがって地山の初期応力状態に対応する変位 $u_r^0, \Delta \theta, u_z^0$ は次式となる。

$$\begin{aligned} \mu E u_r^0 &= -\mu_0 \sigma_r H r + \mu_0 \sigma_z H r \cos 2\theta + \frac{1}{4} \left\{ 2\sigma_r \mu_z + \sigma_z \mu_0 \right\} r^2 \sin \theta \\ &\quad - \frac{\sigma_z}{4} \mu_0 r^2 \sin 3\theta + A \sin \theta + B \cos \theta \\ \mu E \Delta \theta &= -\mu_0 \sigma_z H \sin 2\theta - \frac{r}{4} \left\{ 2\sigma_r \mu_z - 3\mu_0 \sigma_z \right\} \cos \theta - \frac{1}{4} \mu_0 \\ &\quad \times \sigma_z r \cos 3\theta + \frac{A}{r} \cos \theta - \frac{B}{r} \sin \theta + C \\ \mu E u_z^0 &= 2\sigma_r \lambda (H - r \sin \theta) z \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2, 1, 29)$$

(2, 1, 13)式, (2, 1, 15)式及び(2, 1, 29)式は自然状態の地山の表面において $\lambda = 1, \lambda^* = 1$ であり, その地山の内部奥深い地山では $\lambda = 0, \lambda^* = 0$ となっている。

つぎにこの地山の中にZ軸方向に円形トンネルを掘削することによりトンネル周辺は擾乱されることとなり, 今まで述べた応力状態と異なった値となる。トンネル掘削によって新たに生ずる周辺の応力状態も, トンネル中心奥よりの距離が増大すると応力と変位は(2, 1, 13)式, (2, 1, 15)式及び(2, 1, 29)式で示される値に次第に近づき終には一致するのである。

(2, 1, 7)式の微分方程式の解を求めるのに $r = \infty$ で(2, 1, 13)式となり, 円形トンネル縁ではその境界条件をみたすようにすれば, このときのAiryの応力函数Fは次式となる。

$$\begin{aligned} F &= a_0 \log r + b_0 r^2 - \frac{c_1}{2} r \theta \cos \theta + \left( d_1 r^3 + \frac{\delta_1}{r} + s_1 r \log r \right) \sin \theta \\ &\quad + \left( a_2 r^2 + \frac{\alpha_2}{r^2} + \beta_2 \right) \cos 2\theta \\ &\quad + \left( c_3 r^3 + \frac{\delta_3}{r^3} + \frac{s_3}{r} \right) \sin 3\theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2, 1, 30)$$

ただし,  $a_0, b_0, c_1, d_1, \delta_1, s_1, a_2, \alpha_2, \beta_2, c_3, \delta_3, s_3$ は $r, \theta$ に關係のない定数である。 $r = \infty$ において(2, 1, 14)式 = (2, 1, 30)式となることより

$$a_0 = -\frac{\sigma_1 H}{2}, \quad a_2 = -\frac{\sigma_2 H}{2}, \quad c_0 = \frac{\sigma_2}{12}, \quad d_1 = \frac{1}{6} \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} - 4\mu \right) \dots (2, 1, 31)$$

変形円形トンネル掘削後のトンネル周辺の応力は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a_0}{r^2} - \sigma_1 H + \left\{ \frac{c_1}{r^2} (1+m) + \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} - 2 \frac{\beta_1}{r^4} \right\} r \sin \theta \\ &\quad + \left\{ \sigma_2 H - 6 \frac{\alpha_2}{r^4} - 4 \frac{\beta_2}{r^2} \right\} \cos 2\theta \\ &\quad - \left\{ \frac{\sigma_2}{2} + 12 \frac{\beta_3}{r^6} + 10 \frac{\delta_3}{r^4} \right\} r \sin 3\theta \\ \sigma_\theta &= -\frac{a_0}{r^2} - \sigma_1 H + \left\{ m \frac{c_1}{r^2} + \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} + 2 \frac{\beta_1}{r^4} \right\} r \sin \theta \\ &\quad + \left\{ -\sigma_2 H + 6 \frac{\alpha_2}{r^4} \right\} \cos 2\theta \\ &\quad + \left\{ \frac{\sigma_2}{2} + 12 \frac{\beta_3}{r^6} + 2 \frac{\delta_3}{r^4} \right\} r \sin 3\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\left\{ m \frac{c_1}{r^2} - \frac{\sigma_2}{2} - \frac{2\beta_1}{r^4} \right\} r \cos \theta \\ &\quad - \left\{ \sigma_2 H + 6 \frac{\alpha_2}{r^4} + 2 \frac{\beta_2}{r^2} \right\} \sin 2\theta \\ &\quad - \left\{ \frac{\sigma_2}{2} - 12 \frac{\beta_3}{r^6} - 6 \frac{\delta_3}{r^4} \right\} r \cos 3\theta \end{aligned} \right\} \dots (2, 1, 32)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -2 \frac{1-\nu}{\mu} \sigma_1 H + \frac{1-\nu}{\mu} \left\{ \frac{c_1}{r^2} (1+2m) + 2\sigma_1 \right\} r \sin \theta \\ &\quad - 4 \frac{1-\nu}{\mu} \frac{\beta_2}{r^2} \cos 2\theta - 8 \frac{1-\nu}{\mu} \frac{\delta_3}{r^4} r \sin 3\theta \\ \tau_{rz} &= \frac{\nu z}{\mu_0} \left\{ \left[ \frac{\mu_0}{4\mu_1} \frac{c_1}{r^2} - \sigma_1 \right] \sin \theta - \frac{4\beta_2}{r^3} \cos 2\theta - 12 \frac{\delta_3}{r^5} \sin 3\theta \right\} \\ \tau_{\theta z} &= \frac{\nu z}{\mu_0} \left\{ -\left[ \frac{\mu_0}{4\mu_1} \frac{c_1}{r^2} + \sigma_1 \right] \cos \theta - \frac{4\beta_2}{r^3} \sin 2\theta + 12 \frac{\delta_3}{r^5} \cos 3\theta \right\} \end{aligned} \right\} (2, 1, 33)$$

これに対応するトンネル掘削後の変位を求めるには、先に(2, 1, 16)式より(2, 1, 29)式を導いたと同様な方法による。ただしこの計算に用いる応力は(2, 1, 32)式及び(2, 1, 33)式である。この場合(2, 1, 21)式に該当する式は

$$\frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} + \Phi = \left\{ C_1 \mu_2 + 4 S_1 \mu_1 \right\} \sin \theta \dots (2, 1, 34)$$

であって、この微分方程式の解は

$$\Phi = A \sin \theta + B \cos \theta - \frac{1}{2} (C_1 \mu_2 + 4 S_1 \mu_1) \theta \cos \theta \dots (2, 1, 35)$$

となる。\$U\_r\$, \$\Delta\theta\$ の中に \$\Phi\$ が入ってくることに注意して、これらの式の中にそれぞれ

$$\frac{1}{2} (C_1 \mu_2 + 4 S_1 \mu_1) \theta \cos \theta \quad \text{及び} \quad \frac{1}{2} (C_1 \mu_2 + 4 S_1 \mu_1) \theta \sin \theta$$

が含まれる。この項の中に \$\theta\$ が線形に入っていて一意性がなく都合がわるいので、この項は零とみなさなければならない。このことより

$$\delta_1 = -\frac{\mu_2}{4\mu_1} C_1 = m C_1, \dots (2, 1, 36)$$

なる関係が成立する。更に積分常数  $A, B, C$  は次の条件によって定められる。

$$(1) \quad r = \infty \text{ のとき } u_r = u_r^0, \quad \Delta\theta = \Delta^0\theta$$

$$(2) \quad \theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \Delta\theta = 0$$

$$z = 0 \text{ のとき } u_z = 0$$

(1) の条件より

$$\left. \begin{aligned} B &= 0 \\ A &= -C(\mu_1 + m\mu_2) \log H \end{aligned} \right\} \dots (2, 1, 37)$$

となり、(2) の条件より  $C = 0$  となる。

故にトンネルを掘削して後のトンネル周辺の地山の変位は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} u_E u_r &= -\frac{a_0}{r} u_0 - \sigma_1 H \mu_2 r \\ &\quad + \left\{ \frac{r^2}{4} (2\sigma_1 \mu_2 + \sigma_2 \mu_0) + C_1 (\mu_1 + m\mu_2) \log \frac{r}{H} + \frac{r}{r^2} u_0 \right\} \sin \theta \\ &\quad + \left\{ \sigma_2 H \mu_0 r + 2\mu_0 \frac{\alpha_2}{r^3} + 4\mu_1 \frac{\beta_2}{r} \right\} \cos 2\theta \\ &\quad - \left\{ \frac{\sigma_2}{4} \mu_0 r^2 - 3\mu_0 \frac{r^3}{r^4} - \mu_{4/5} \frac{\beta_3}{r^2} \right\} \sin 3\theta \\ u_E \Delta\theta &= -\left\{ \frac{r}{4} (2\sigma_1 \mu_2 - 3\sigma_2 \mu_0) + \frac{r}{r^2} \mu_0 - \frac{C_1}{r} \left[ (\mu_1 + m\mu_2) \log \frac{r}{H} + \frac{\mu_0^2}{4\mu_1} \right] \right\} \cos \theta \\ &\quad - \left\{ \sigma_2 H \mu_0 - 2\mu_0 \frac{\alpha_2}{r^4} + 2\mu_2 \frac{\beta_2}{r^2} \right\} \sin 2\theta \\ &\quad - \left\{ \frac{\sigma_2}{4} \mu_0 r + 3\mu_0 \frac{r^3}{r^5} - \mu_4 \frac{\beta_3}{r^3} \right\} \cos 3\theta \\ u_E u_z &= 2\sigma_2 \sigma_1 H - \sigma_2 \left\{ \frac{\mu_0}{2\mu_1} \frac{C_1}{r} + 2\sigma_1 r \right\} \sin \theta + 4\sigma_2 \frac{\beta_2}{r^2} \cos 2\theta \\ &\quad + 8\sigma_2 \frac{\beta_3}{r^3} \sin 3\theta \end{aligned} \right\} \dots (2, 1, 38)$$

つぎに rigid body displacement について考える。(2, 1, 29) 式において座標原点  $r=0$  の  $u_r$  の値を求めると

$$u_E (u_r)_{r=0} = A \sin \theta + B \cos \theta \dots (2, 1, 39)$$

また  $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき、 $\Delta\theta = 0$  となる故に  $B = rC$  となる。ところが  $B, C$  は  $r, \theta$  に関係のない常数である故に  $B = 0, C = 0$  とならねばならない。

(2, 1, 39) 式より

$$u_E (u_r)_{r=0} = A \sin \theta$$

また (2, 1, 29) 式において  $r=0$  とすれば

$$u_E (r \Delta^0 \theta)_{r=0} = A \cos \theta$$

$(u_r)_{r=0}$  と  $(r \Delta^0 \theta)_{r=0}$  とを合成したものを  $V$  とすれば、 $r=0$  における  $V$  の値は次式となる。

$$V = \sqrt{(u_r^0)_{r=0}^2 + (r \Delta^2 \theta)_{r=0}^2} = \frac{A}{\mu E} = \text{const.} \quad (2, 1, 40)$$

これは rigid body displacement であって、座標原点の側に円形トンネルの中心においてる故に  $V=0$  とならなければならない。また  $V$  の存在によって応力には contribute しないものである。 $V=0$  の意味は、このようにして求められる変位の値は、硬岩中に円形トンネルを掘削し、これが弾性変形しないものとし、これから先にある弾性地山中に円形トンネルを掘削した後トンネル円孔が変形するとき、手前の硬岩中のトンネル円孔縁より半径方向に移動した変位を測定した値となるということである。また  $V=0$  より (2, 1, 40) 式より  $A=0$  となり、(2, 1, 37) 式より  $C_1=0$  となる。故に Hannes Schmid の求めた変位の式 (2, 1, 38) 式より、rigid body displacement の項は零とならなければならない。すなわち (2, 1, 38) 式において  $\log H$  を含む項はなくなる。

つぎにトンネル円孔の半径を  $\rho$  とすれば (2, 1, 32) 式において

$$r = \rho \text{ のとき } \sigma_r = 0, \tau_{r\theta} = 0 \quad (2, 1, 41)$$

となる境界条件によって、残りの未決定の6つの係数  $\sigma_1, \alpha_2, \beta_2, \rho_2, \beta_3$  が決定され、これを用いてトンネル円孔を掘削した後トンネル周辺の応力分布が次式によって求められる。ただしこの場合

$$g = \left( \frac{\rho}{r} \right)^2$$

において、(2, 1, 32) 式より

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -\sigma_1 H (1-g) + (1-g) \left\{ \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} - (m\omega + \frac{\sigma_2}{2}) g \right\} r \sin \theta \\ & + \sigma_2 H (1-g) (1-3g) \cos 2\theta \\ & - \frac{\sigma_2}{2} (1-g) (1+g-4g^2) r \sin 3\theta \\ \sigma_\theta = & -\sigma_1 H (1+g) + \left\{ \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} - m\omega g - (m\omega + \frac{\sigma_2}{2}) g^2 \right\} r \sin \theta \\ & - \sigma_2 H (1+3g^2) \cos 2\theta \\ & + \frac{\sigma_2}{2} (1-g^2+4g^3) r \sin 3\theta \\ \tau_{r\theta} = & + (1-g) \left\{ \frac{\sigma_2}{2} + (m\omega + \frac{\sigma_2}{2}) g \right\} r \cos \theta \\ & - \sigma_2 H (1-g) (1+3g) \sin 2\theta \\ & - \frac{\sigma_2}{2} (1-g) (1+g+4g^2) r \cos 3\theta \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots (2, 1, 42)$$

となる。トンネル円孔の周辺の応位については、半径方向の変位の値が掘削において測定できるものであるから、これについて次式に示す。この場合の半径方向の変位を  $(u_r)_{e1}$  とし (2, 1, 38) 式より



$$\begin{aligned}
(u_n)_{el.} = & \frac{1}{\mu E} \left[ -r \sigma_1 H (\mu_2 + \mu_0 g) \right. \\
& + \left\{ \frac{1}{4} (2 \sigma_1 \mu_2 + \sigma_2 \mu_0) - (\mu_1 + m \mu_2) \omega g \log r \right. \\
& \left. - \frac{\mu_0}{2} \left( m \omega + \frac{\sigma_2}{2} \right) g^2 \right\} r^2 \sin \theta \\
& + \sigma_2 H \left\{ \mu_0 (1 - g^2) + 4 \mu_1 g \right\} r \cos 2\theta \\
& \left. - \frac{\sigma_2}{4} \left\{ \mu_0 (1 + g^2 - 2g^3) + 4 \mu_1 g^2 \right\} r^2 \sin 3\theta \right] \dots\dots\dots (2, 1, 43)
\end{aligned}$$

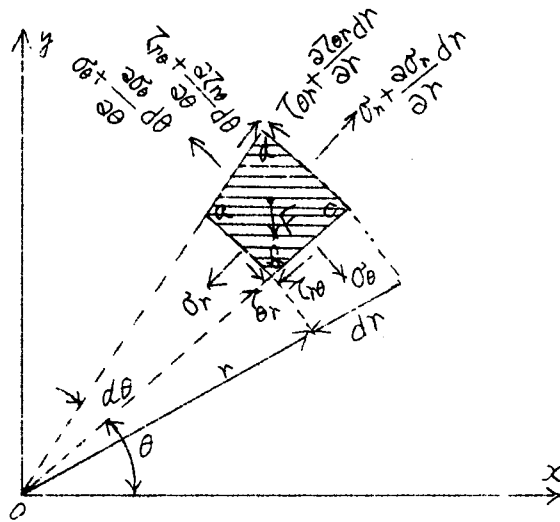
248.

## 第2章 簡単な粘弾性体とみなされる地山中の素直円形トンネル の変形挙動<sup>29)</sup>

### 第1節 極座標による弾性体の平面歪問題

軟弱な地山，特に粘土のような地山中にトンネルを掘削したとき，トンネル周囲が時間とともに土圧によりトンネル内部に圧み込んでくることが現場においてよく経験されるのである。この現象はトンネルを掘削したことにより地山の物体力のトンネル周辺の応力集中によってヒズミが掘削後ただちに生ずるのでなく時間とともに増大するのであり，*rheology* の立場から説明してこの変形挙動が説明されるのではないかという仮定に立って研究をなした。粘土のような地山を簡単な粘弾性体とみなされるものとし，この力学模型を *Maxwell* 型として応力平衡条件式に代入して，トンネル円孔および周辺の時間的変形挙動の数学的解明を試みた。

地山を簡単な粘弾性体とみなしたときの変形挙動は，弾性論より求めた変位に粘弾性理論よりえられる時間函数を乗じた式で表わされることが次節によって証明される故に，この証明の前提として弾性体の平面歪の問題を最初に取り扱う。



第2.3図

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

半径方向および接線方向の変位成分をそれぞれ  $u_r$ ,  $u_\theta$  とし，また半径方向および接線方向のヒズミ成分をそれぞれ  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  とし，せん断ヒズミ成分を  $\varepsilon_{r\theta}$  とすれば，

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \quad (2.2.2)$$

なる関係とする。つぎに弾性係数を  $E$ ，ポアッソン比を  $\nu$ ，せん断弾性係数を  $\mu$  とすれば，*Lamé* 係数は

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

となる。いま平面歪問題を考える前に弾性体の立派問題を考える。極座標と関連させる為に円筒座標を用いて，第2.3図の  $x$  方向と垂直する  $z$  軸をとり， $z$  方向の正応力を  $\sigma_z$ ，ヒズミ成分を  $\varepsilon_z$

とする。r, z座標をとったときのせん断応力を $\tau_{rz}$ , せん断ヒズミを $\varepsilon_{rz}$ とする。 $\theta$ , z座標をとったときのせん断応力を $\tau_{\theta z}$ , せん断ヒズミを $\varepsilon_{\theta z}$ とする。しからば

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_r - \nu (\sigma_\theta + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_\theta - \nu (\sigma_r + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu (\sigma_r + \sigma_\theta) \right] \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2, 2, 3)$$

$\Theta = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$  とすれば

$$\Delta = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{1}{E} (1 - \nu) \Theta \dots\dots\dots (2, 2, 4)$$

(2, 2, 3)式, (2, 2, 4)式より Lamé 係数を用いて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_r, \quad \tau_{r\theta} = \mu \varepsilon_{r\theta} \\ \sigma_\theta &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_\theta, \quad \tau_{\theta z} = \mu \varepsilon_{\theta z} \\ \sigma_z &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_z, \quad \tau_{rz} = \mu \varepsilon_{rz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2, 2, 5)$$

平面歪問題を考えるときは

$$\varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon_{\theta z} = 0, \quad \varepsilon_{rz} = 0, \quad \tau_{\theta z} = 0, \quad \tau_{rz} = 0$$

とすればよい。(2, 2, 3)式より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \nu (\sigma_r + \sigma_\theta) \\ \sigma_\theta &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_\theta \\ \sigma_r &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_r \\ \tau_{r\theta} &= \mu \varepsilon_{r\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2, 2, 6)$$

式となる。ただし

$$\Delta = \varepsilon_\theta + \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \dots\dots\dots (2, 2, 7)$$

となる。(2, 2, 3)式, (2, 2, 6)式及び(2, 2, 7)式を(2, 2, 1)式に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial r} &= \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{aligned}$$

を用いて

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + F_r &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right) + F_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2, 2, 8)$$

となる。

$$p = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} = (\lambda + \mu) \Delta$$

とすれば、これより

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial \Delta}{\partial r}, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial \Delta}{\partial \theta}$$

となることを利用して、(2.2.8)式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) &= \frac{1}{\mu} \left( -\frac{\partial p}{\partial r} - F_r \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right) &= \frac{1}{\mu} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - F_\theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.9)$$

### 第2節 変形挙動の基礎方程式

地盤が簡単な粘弾性体とみなされる材料より成り立っているとき、この簡単な粘弾性体の equation of state は(1.1.2)式で述べたようになる。すなわち

$$P_\theta = 2\mu \dot{e}_\theta + 2\eta_s \dot{e}_\theta \quad (2.2.10)$$

ただし dot は時間 \$t\$ による微分を表わし、\$e\_\theta\$ : ヒズミの deviator, \$P\_\theta\$ : 応力の deviator, \$\mu\$ : せん断弾性係数、\$\eta\_s\$ : 粘性係数とする。平均圧力は \$p = \frac{1}{2}(\sigma\_r + \sigma\_\theta)\$, 平均直ヒズミは \$\frac{\Delta}{2} = \frac{\epsilon\_r + \epsilon\_\theta}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u\_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u\_\theta}{\partial \theta} + \frac{u\_r}{r} \right)\$ であって、\$r\$ 方向の応力の deviator は \$\sigma\_r - p\$, ヒズミの deviator は \$\epsilon\_r - \frac{\Delta}{2}\$ となり、\$r\$ 方向に関して(2.2.10)式は次式となる。

$$\sigma_r - p = 2\mu \left( \epsilon_r - \frac{\Delta}{2} \right) + 2\eta_s \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_r - \frac{\Delta}{2} \right)$$

また \$\theta\$ 方向の応力の deviator は \$\sigma\_\theta - p\$, ヒズミの deviator は \$\epsilon\_\theta - \frac{\Delta}{2}\$ となり、\$\theta\$ 方向に関して(2.2.10)式は次式となる。

$$\sigma_\theta - p = 2\mu \left( \epsilon_\theta - \frac{\Delta}{2} \right) + 2\eta_s \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_\theta - \frac{\Delta}{2} \right)$$

上の二式に \$p, \frac{\Delta}{2}\$ の値を代入すれば次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= p + \mu \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right\} + \eta_s \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right\} \\ \sigma_\theta &= p + \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\} + \eta_s \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.11)$$

せん断応力、せん断ヒズミについては(2.2.10)式は次式となる。

$$\tau_{r\theta} = 2\mu \epsilon_{r\theta} + 2\eta_s \frac{\partial \epsilon_{r\theta}}{\partial t}$$

(2.2.10)式の形において

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)$$

の形となっているゆえにこれを用いて \$\tau\_{r\theta}\$ は次式となる。

$$\tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \eta_s \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (2.2.12)$$

(2.2.11)式、(2.2.12)式を(2.2.1)式に代入して

$$\begin{aligned}
& n \left\{ \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right\} \right\} \\
& + \eta_s \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right\} \right\} = -\frac{\partial P}{\partial r} - F_r \\
& n \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \left\{ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right\} \right\} \\
& + \eta_s \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \left\{ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right\} \right\} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - F_\theta
\end{aligned}$$

..... (2.2.13)

以上式を簡単にするため

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right\} = V_1 \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \left\{ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right\} = V_2
\end{aligned}$$

(2.2.14)

として、(2.2.13)式は

$$\begin{aligned}
& n V_1 + \eta_s \frac{\partial V_1}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial r} - F_r \\
& n V_2 + \eta_s \frac{\partial V_2}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - F_\theta
\end{aligned}$$

となる。上式を解いてそれぞれ次式をうる。

$$\begin{aligned}
V_1 &= -\frac{1}{n} \left( \frac{\partial P}{\partial r} + F_r \right) + C_1 \exp \left( -\frac{n}{\eta_s} t \right) \\
V_2 &= -\frac{1}{n} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + F_\theta \right) + C_2 \exp \left( -\frac{n}{\eta_s} t \right)
\end{aligned}$$

ただし  $C_1, C_2$  は積分定数であって、 $t=0$  のとき  $u_r=0, u_\theta=0$  となるから、 $V_1=0, V_2=0$  となるから初期条件によって

$$C_1 = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial P}{\partial r} + F_r \right), \quad C_2 = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + F_\theta \right)$$

となることより

$$\begin{aligned}
V_1 &= -\frac{1}{n} \left( \frac{\partial P}{\partial r} + F_r \right) \left\{ 1 - \exp \left( -\frac{n}{\eta_s} t \right) \right\} \\
V_2 &= -\frac{1}{n} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + F_\theta \right) \left\{ 1 - \exp \left( -\frac{n}{\eta_s} t \right) \right\}
\end{aligned}$$

よって、(2.2.14)式に代入して

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right\} = \frac{1}{n} \left( -\frac{\partial P}{\partial r} - F_r \right) \left\{ 1 - \exp \left( -\frac{n}{\eta_s} t \right) \right\} \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \left\{ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right\} \\
& = \frac{1}{n} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - F_\theta \right) \left\{ 1 - \exp \left( -\frac{n}{\eta_s} t \right) \right\}
\end{aligned}$$

..... (2.2.15)

となる。(2.2.15)式と(2.2.9)式とを比較するとき  $t=\infty$  で(2.2.15)式

は(2.2.9)式と同一となる。ゆえに  $t = \infty$  のときは弾性論より求めた変位に終局的になる。  
(2.2.15)式において変数分離できることより

$$u_r = U_r T, \quad u_\theta = U_\theta T \quad \dots\dots\dots (2.2.16)$$

とすることができる。ただし  $U_r, U_\theta$  は時間に関係なく、 $\theta$  の函数であり、

$$T = 1 - \exp\left(-\frac{\eta}{\eta_s} t\right) \quad \dots\dots\dots (2.2.17)$$

であって時間函数である。 $t = \infty$  においてそれぞれ  $u_r = U_r, u_\theta = U_\theta$  となるから  $U_r, U_\theta$  は弾性論より求められる  $(u_r)_{el}, (u_\theta)_{el}$  となることより

$$\left. \begin{aligned} u_r &= (u_r)_{el} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\eta}{\eta_s} t\right) \right\} \\ u_\theta &= (u_\theta)_{el} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\eta}{\eta_s} t\right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.2.18)$$

と成って、変形挙動に関する基礎式がえられたこととなる。

### 第3節 糸掘円形トンネルの変形の時間的変化

水平な地表面を有する等方等質の弾性体とみなされる地山の中かなり地表面より深い地奥で、かつ地下よりかなり離れた地奥に円形の糸掘トンネルを掘削したとき、このトンネル円孔の中心が地山、すなわち座標原点にあるときのトンネル周辺の変位を求める式は、 $u_r$  に関して(2.1.43)式となる。このような地奥では(2.1.8)式の中にある  $\delta$ 、(2.1.10)式の中にある  $\delta^*$  は次のようになる。

$$\delta = 0, \quad \delta^* = 0$$

これを(2.1.12)式において定義した  $\sigma_1, \sigma_2$  に代入して

$$\sigma_1 = \frac{\omega}{2} \left( 1 + \frac{1}{\mu-1} \right), \quad \sigma_2 = \frac{\omega}{2} \left( 1 - \frac{1}{\mu-1} \right)$$

となり、本節第1章第2節の  $\mu_n$  の定義において

$$\mu_0 = \mu + 1, \quad \mu_1 = \frac{1}{\mu} (\mu + 1)(\mu - 1), \quad \mu_2 = \frac{1}{\mu} (\mu + 1)(\mu - 2)$$

となる。(2.1.36)式より

$$m = -\frac{\mu_2}{4\mu_1}$$

と成って、これらの値を用いて(2.1.43)式の  $(u_r)_{el}$  が求められる。トンネル中心は地山の地表面より  $H$  なる深さの地奥にあり、その半径を  $f$ 、地山の単位容重重量を  $\omega$  とする。 $g = \left(\frac{f}{r}\right)^2$  として、この  $(u_r)_{el}$  の値を(2.2.18)式に代入して変位を求めるが、トンネルで問題になるのは  $u_r$  の方であるから

$$\begin{aligned} u_r = \frac{1}{\mu E} & \left[ -r \sigma_1 H (\mu_2 + \mu_0 g) + \left\{ \frac{1}{4} (2\sigma_1 \mu_2 + \sigma_2 \mu_0) - (\mu_1 + m\mu_2) \omega f \log r \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\mu_0}{2} \left( m\omega + \frac{\sigma_2}{2} \right) g^2 \right\} r^2 \sin \theta + \sigma_2 H \left\{ \mu_0 (1 - g^2) + 4\mu_1 g \right\} r \cos 2\theta \right. \\ & \left. - \frac{\sigma_2}{4} \left\{ \mu_0 (1 + g^2 - 2g^3) + 4\mu_1 g^2 \right\} r^2 \sin 3\theta \right] \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\eta}{\eta_s} t\right) \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.2.19)$$

(2.2.19)式が素掘円形トンネル周辺の変形挙動を表わす式である。

計算例：－

いま(2.2.19)式であらわされる素掘円形トンネル周辺の変形挙動を直観的にみるために一つの計算例によってその傾向を示すこととする。計算に必要な数値を次に示す。

$$f = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}, \quad H = 20 \text{ m} = 2000 \text{ cm}, \quad w = 2 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^2 \text{ とする。}$$

軟弱地山のときは  $\mu = 2$  とする。しからば  $\mu_0 = 3$ ,  $\mu_1 = 1.5$ ,  $\mu_2 = 0$  となる。 $\sigma_1 = 2 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_2 = 0$  となる。また  $m = 0$  となる。

$\rho = 9.176 \text{ kg/cm}^2$  とすれば  $E = 2\rho(1 + \frac{1}{\mu}) = 27.53 \text{ kg/cm}^2$  となる。  
 $n_s = 5 \times 10^8 \text{ (C, G, S)}$  として  $\rho = 9.176 \text{ kg/cm}^2 = 9.0 \times 10^6 \text{ (C, G, S)}$  となるから  $\rho/n_s = 0.018$  となる。

以上与えられた数値によって  $T = 1 - \exp(-\frac{\rho}{n_s} t)$  の値を計算したものが表-2.1である。(4.1)の値を表-2.2に示す。

表-2.1  $T = 1 - \exp(-\frac{\rho}{n_s} t)$  の値

$t(\text{sec})$	$T$	$t(\text{sec})$	$T$	$t(\text{sec})$	$T$
1	0.0178	40	0.5133	180	0.9608
5	0.0860	50	0.5934	240	0.9867
10	0.1648	60	0.6604	300	0.9955
20	0.3023	90	0.8021		
30	0.4173	120	0.8847		

表-2.2 (4.1)の値

(単位 cm)

$r(\text{cm}) \backslash \theta$	$90^\circ$	$60^\circ$	$30^\circ$	$0^\circ$	$-30^\circ$	$-60^\circ$	$-90^\circ$
100	24.3	24.0	23.1	21.8	20.5	19.6	19.3
125	20.1	19.7	18.8	17.4	16.1	15.2	14.8
150	17.3	16.9	15.9	14.5	13.2	12.1	11.8
175	15.3	14.9	13.9	12.5	11.0	10.0	9.6
200	12.4	12.0	11.0	9.5	8.0	6.9	6.5
260	11.4	11.0	9.9	8.4	6.9	5.8	5.4
350	9.4	9.0	7.8	6.2	4.6	3.5	3.0
400	8.7	8.3	7.1	5.4	3.8	2.6	2.2
500	7.7	7.3	6.1	4.4	2.7	1.4	1.0

600	7.1	6.7	5.4	3.6	1.9	0.6	0.1
700	6.7	6.3	4.9	3.1	1.3		
800	6.4	5.9	4.5	2.7	0.9		
900	6.1	5.6	4.3	2.4	0.6		
1000	5.9	5.5	4.1	2.2	0.3		
1100	5.8	5.4	3.9	2.0	0.1		
1200	5.7	5.2	3.7	1.8			

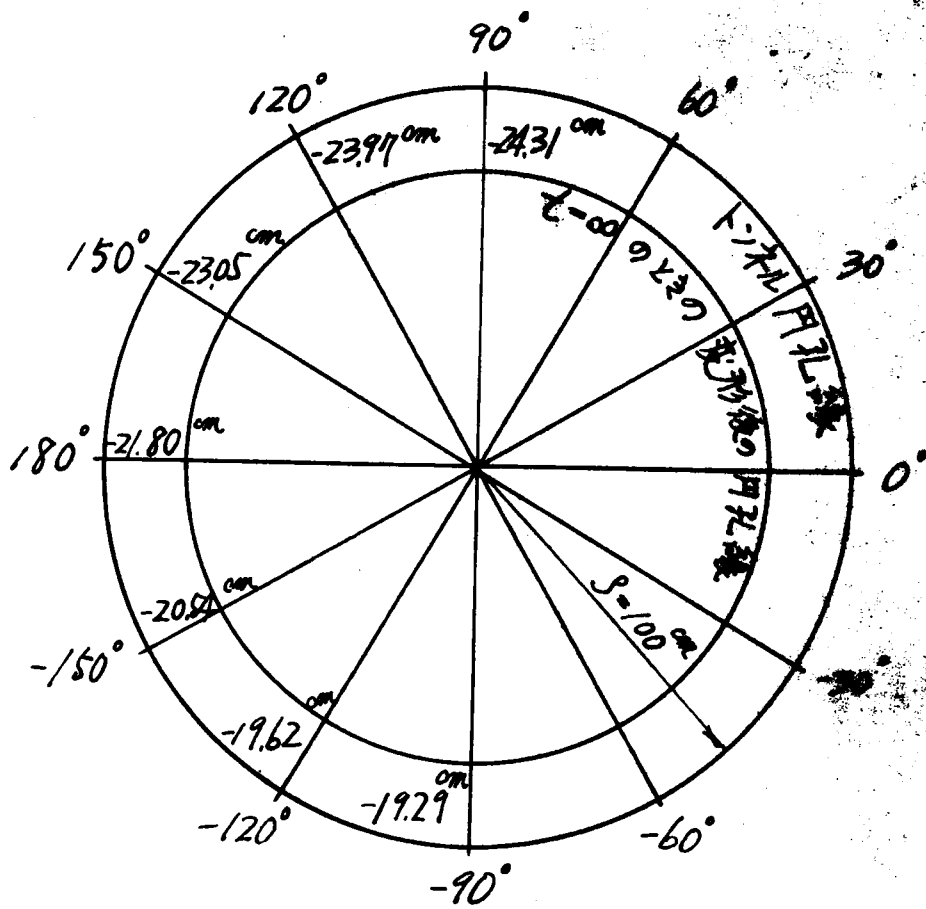
但し 表へス、スの値は全部負号をとるが、表には負号を省略している。負号の意味はトンネル周辺の変位はトンネル中心に向っていることを示している。 $\theta < 0^\circ$  の場合で  $r$  が大とすれば  $(u_n)_{el}$  の値が正号となる場合があり、これは変位がトンネル中心より遠ざかる方向におこっていることを示し、このような場合は(ス、ノ、43)式を適用できない場合であるから表へス、スには空白で示すこととする。

第ス、4図に  $r = \rho = 100 \text{ cm}$  のトンネル円孔縁における変位の様子を示す。これによればトンネル上盤中央の変位が最も大であり、これよりトンネル側壁、トンネル下盤中央に向って変位が減少していることがわかる。下盤において変位があらわれていることは現場でよく経験される膨れのあることを示しているのである。第ス、5図は円形トンネル周辺の  $(u_n)_{el}$  の値の様子を示す。この図で  $(u_n)_{el}$  の曲線の中で実線と示されるのはトンネル中心より遠ざかる変位のことで、これは不合理なる故、この領域の  $(u_n)_{el} = 0$  とすべきものである。

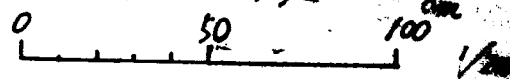


$r = \rho = 100^{\text{cm}}$  の場合

$(U_r)_{el.}$  の 値

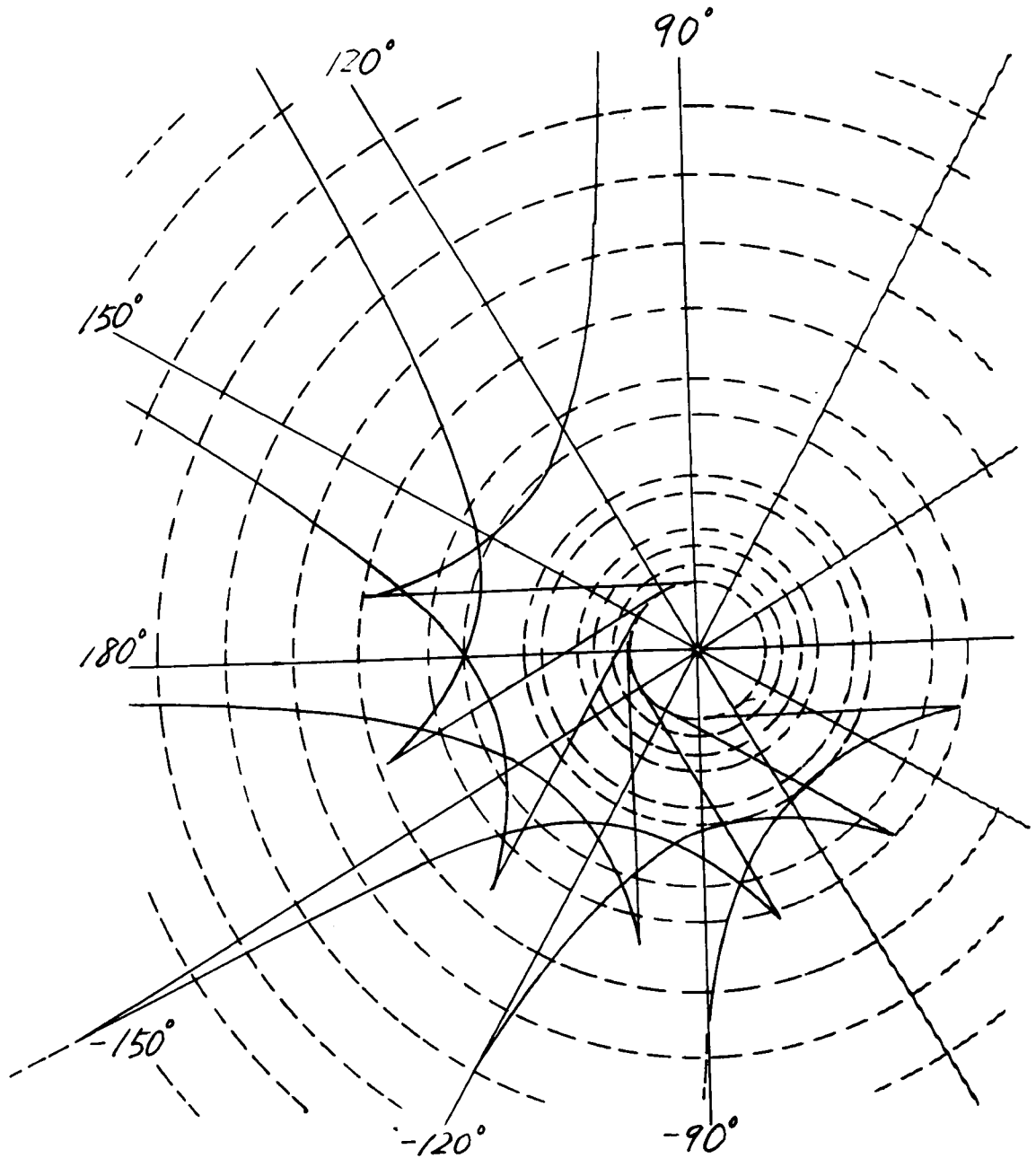


長さの 単位



第 2, 4 図

$(U_r)_{el.}$  の値.

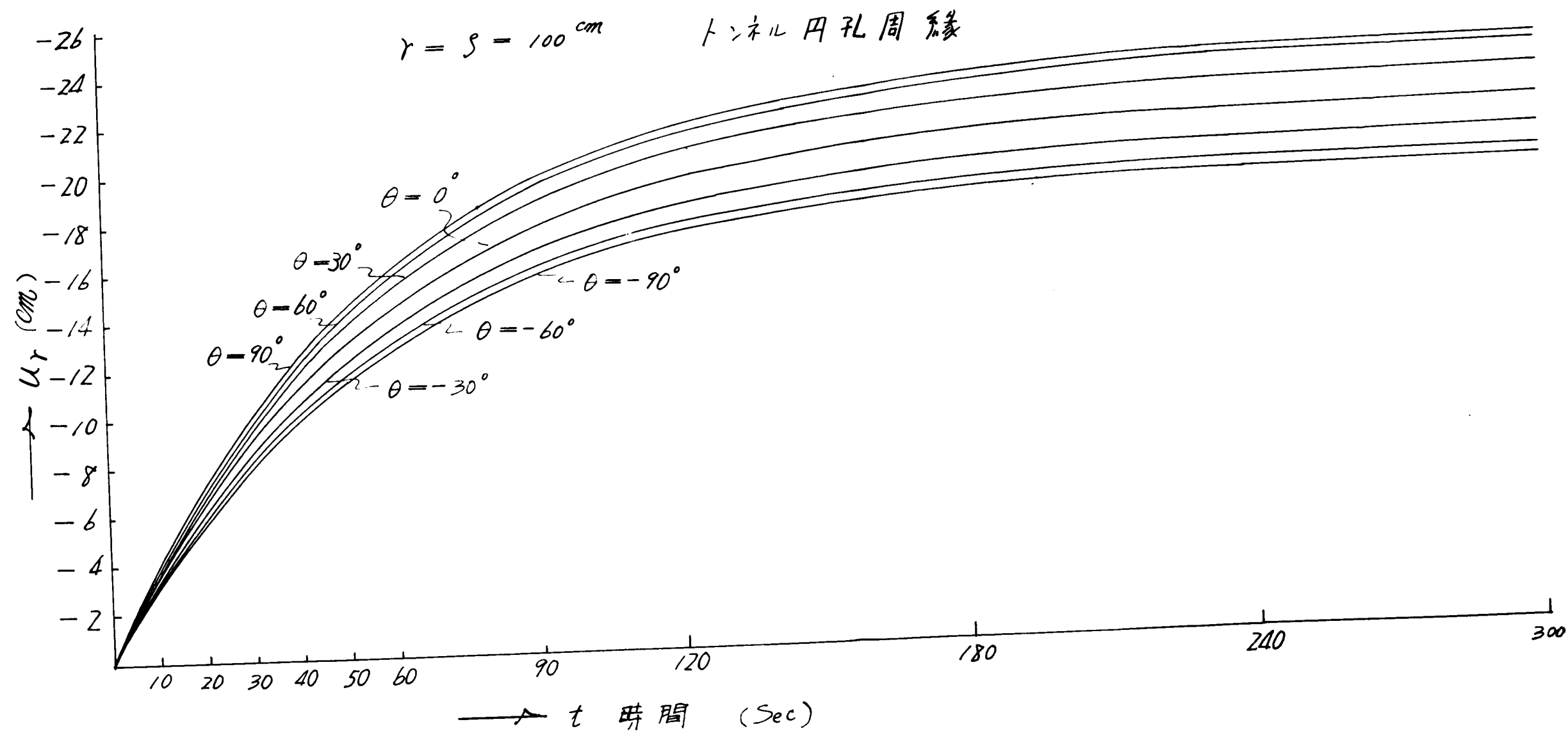


$U_r$  の縮尺  
0 5 10 20 30 cm

0 2 4 6 8 10 m

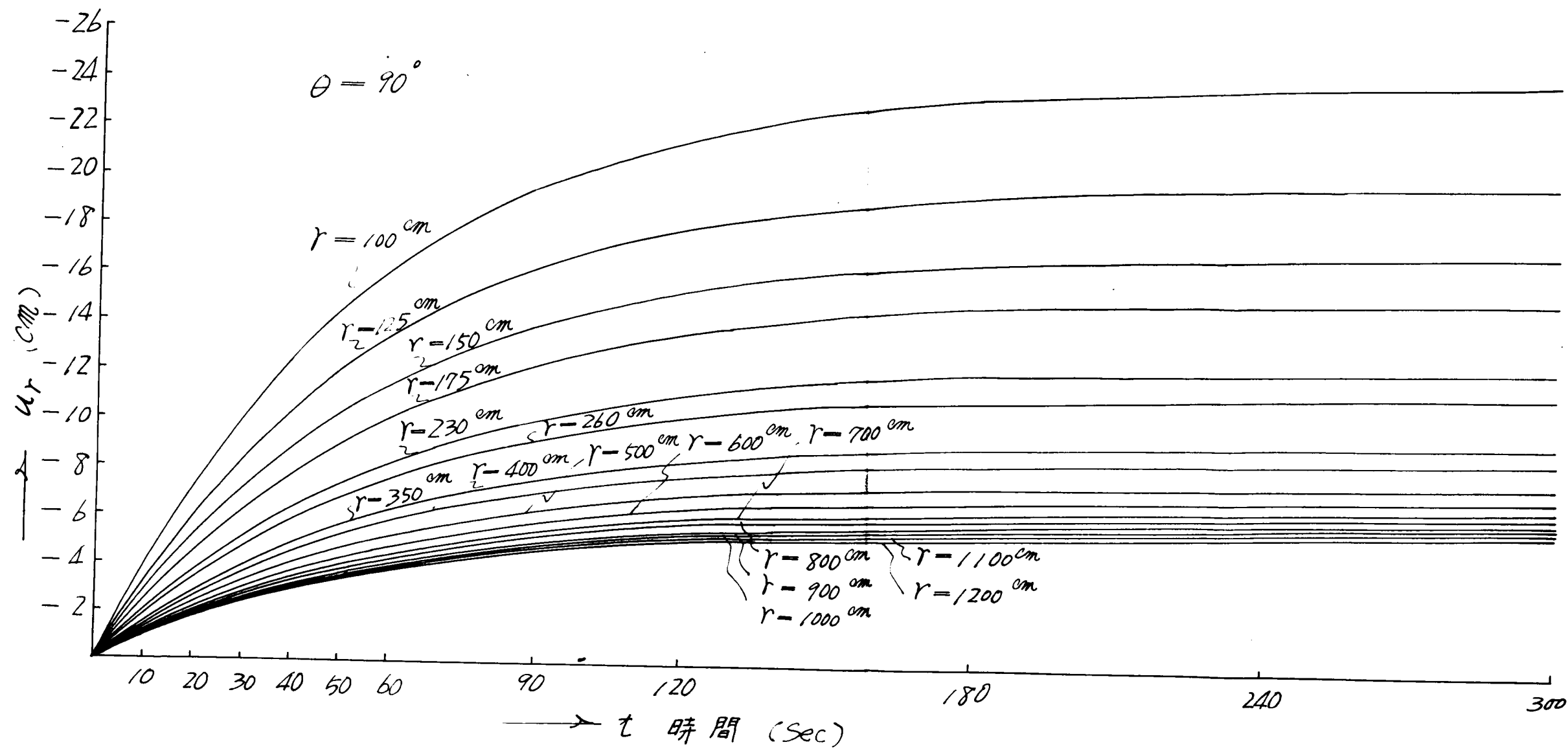
長さの縮尺

才 2.5 図



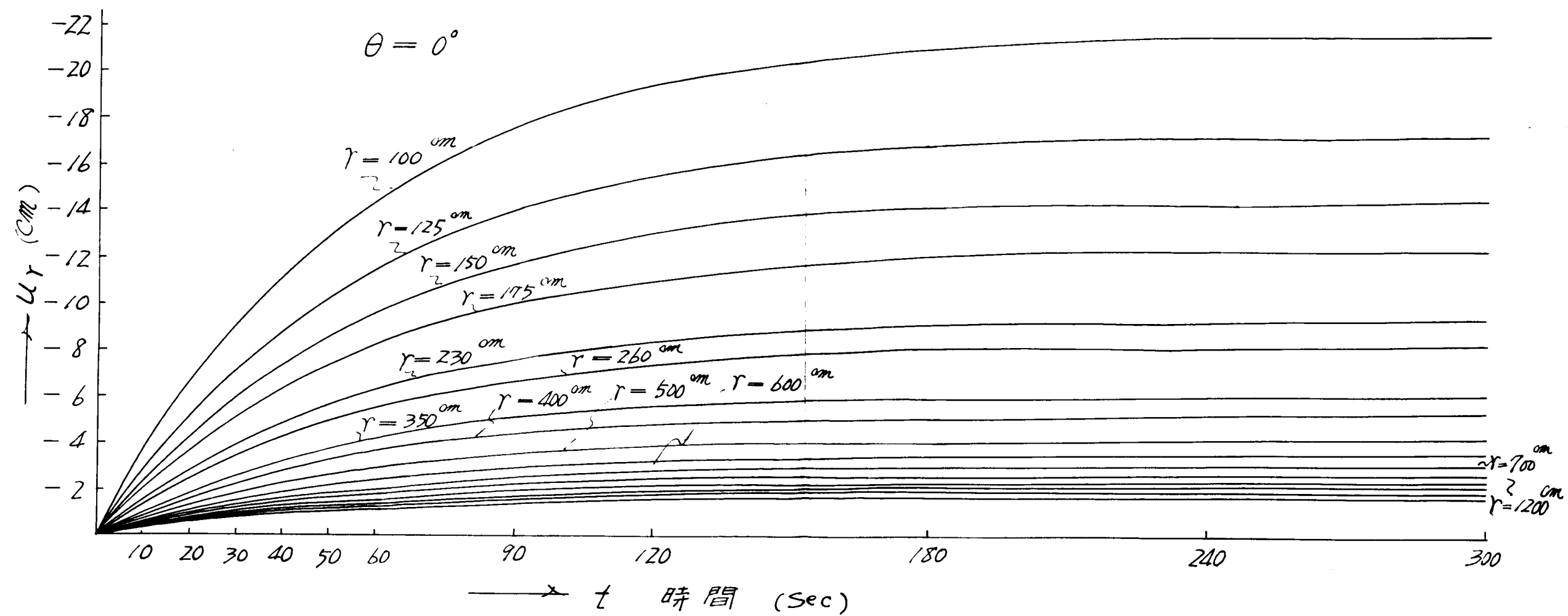
才 2.6 図





※ 2.7 図





※2,8回





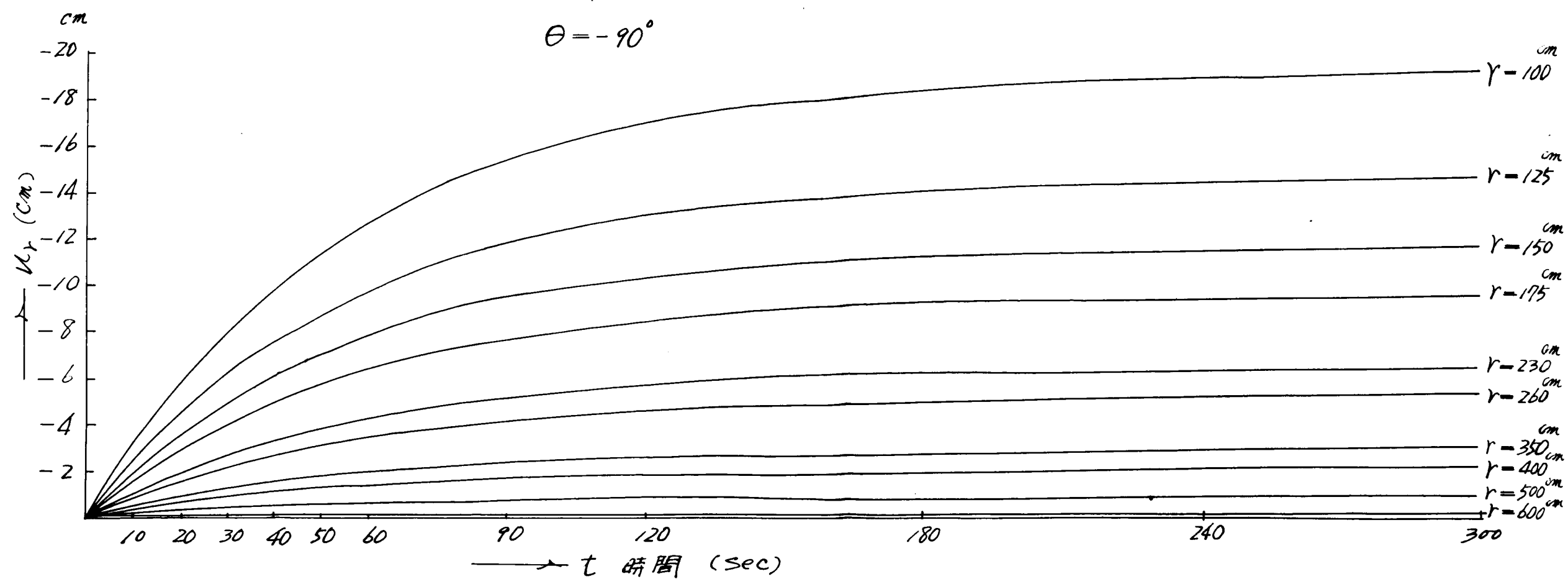
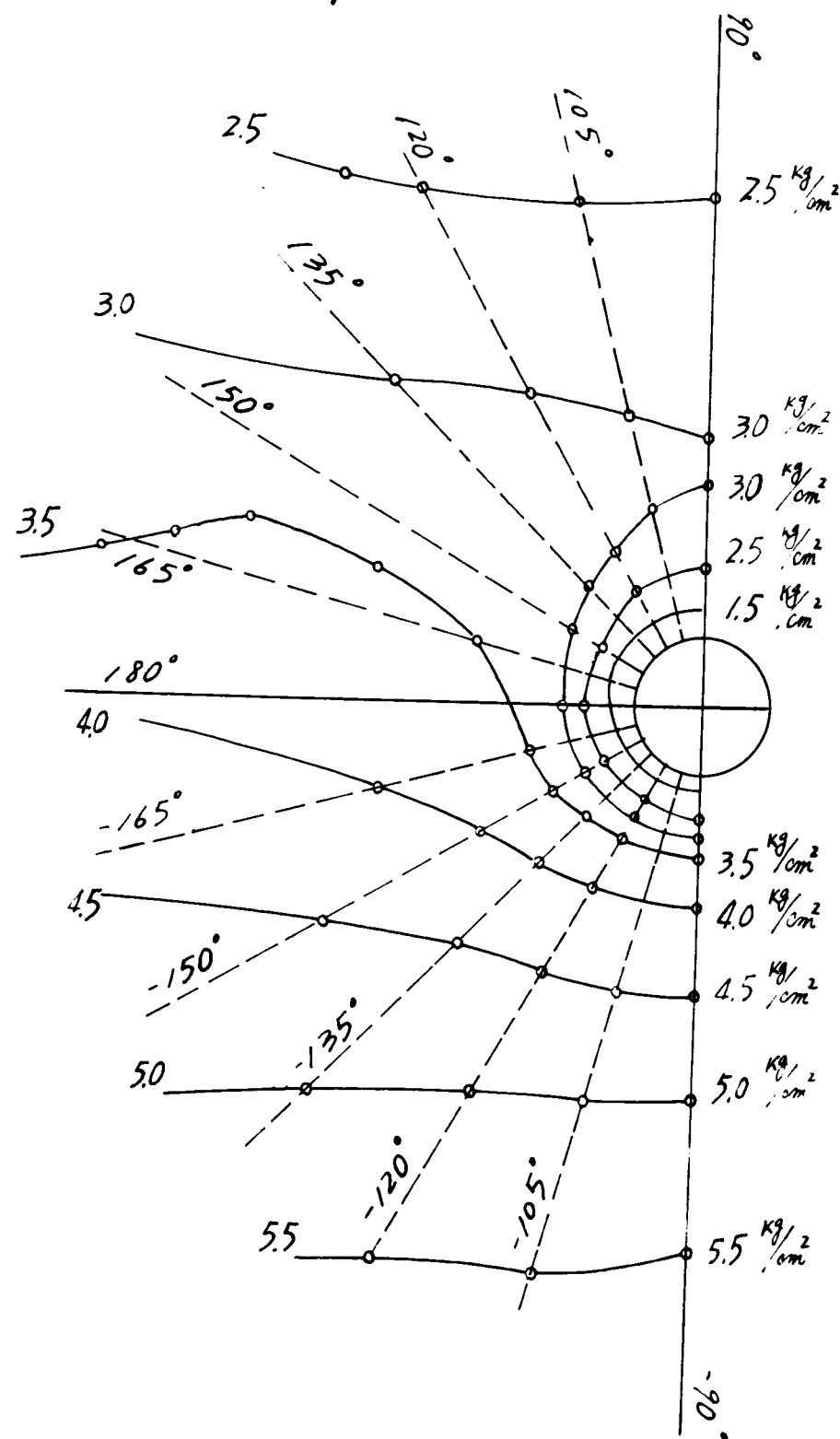


图 9, Z 冲

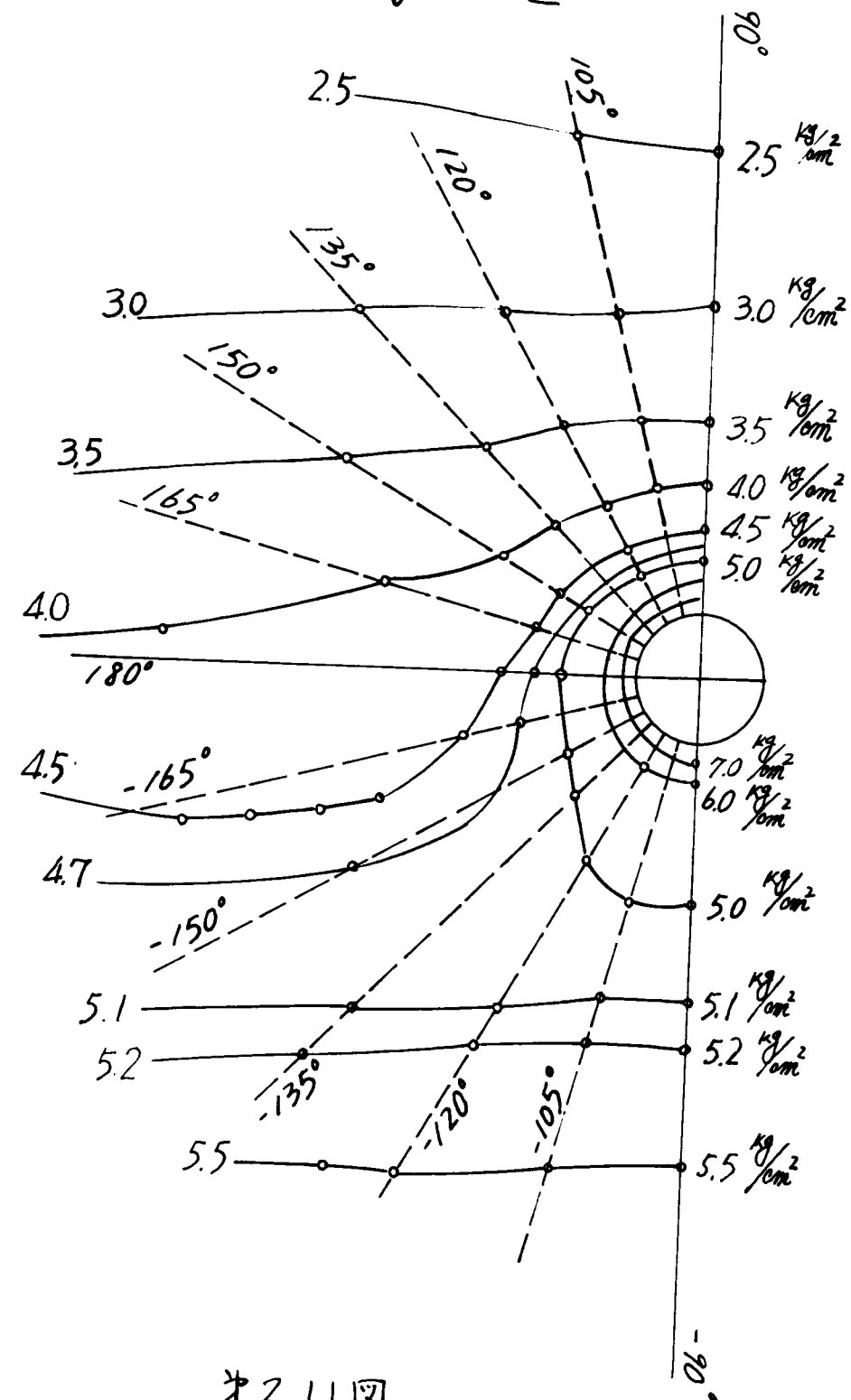


$\sigma_r$  の値



第2.10図

$\sigma_\theta$  の値



第2.11図



表へス、1の値と表へス、スと乗すれば(ス、ス、19)式で表わされる $u_n$ の変形挙動がえられるが、トンネル内孔縁 $r = \rho = 100 \text{ cm}$ の変形挙動を第ス、6図に示す。また、 $\theta = 90^\circ$ ,  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = -90^\circ$ の動径方向に $r$ の変化に応じて $u_n$ の変形挙動が変化する様相について第ス、7図、第ス、8図、第ス、9図に示す。

つぎに(ス、1、4ス)式によって $\sigma_n$ ,  $\sigma_\theta$ の値を計算すれば表へス、3及び表へス、4となる。 $\tau_{\theta\theta} = 0$ となる。 $\sigma_n$ ,  $\sigma_\theta$ の等値曲線を第ス、10図、第ス、11図に示す。

表へス、3

$\sigma_n$  の 値

(単位  $\text{kg/cm}^2$ )

[計算値は負号をとるが、表には負号を省略する。すなわち圧縮応力である。]

$\theta \backslash r(\text{cm})$	100	125	150	175	200	260	350	400	500	600	700	800	900
$+90^\circ$	0	1.35	2.06	2.46	2.87	2.97	3.03	3.00	2.88	2.62	2.55	2.36	2.17
$+60^\circ$	0	1.36	2.08	2.47	2.92	3.02	3.12	3.10	3.01	2.88	2.73	2.57	2.41
$+30^\circ$	0	1.40	2.14	2.57	3.02	3.19	3.35	3.37	3.36	3.31	3.23	3.15	3.06
$0^\circ$	0	1.44	2.22	2.69	3.24	3.41	3.67	3.75	3.84	3.89	3.92	3.94	3.95
$-30^\circ$	0	1.49	2.31	2.81	3.43	3.63	3.99	4.12	4.22	4.47	4.61	4.72	4.84
$-60^\circ$	0	1.52	2.37	2.90	3.57	3.79	4.23	4.40	4.67	4.90	5.18	5.30	5.49
$-90^\circ$	0	1.53	2.39	2.93	3.62	3.85	4.32	4.50	4.80	5.15	5.29	5.51	5.73

表へス、4

$\sigma_\theta$  の 値

(単位  $\text{kg/cm}^2$ )

[計算値は負号をとるが、表には負号を省略する。応力は圧縮応力である。]

$\theta \backslash r(\text{cm})$	100	125	150	175	200	260	350	400	500	600	700	800	900
$+90^\circ$	7.80	6.31	5.48	4.96	4.30	4.07	3.63	3.45	3.16	2.91	2.68	2.46	2.25
$+60^\circ$	7.83	6.34	5.52	5.01	4.36	4.14	3.72	3.56	3.29	3.07	2.87	2.68	2.49
$+30^\circ$	7.90	6.44	5.63	5.13	4.53	4.33	3.98	3.85	3.66	3.51	3.38	3.26	3.15
$0^\circ$	8.00	6.56	5.78	5.31	4.76	4.59	4.33	4.25	4.16	4.11	4.08	4.06	4.05
$-30^\circ$	8.10	6.69	5.93	5.48	4.97	4.85	4.68	4.65	4.66	4.71	4.78	4.86	4.95
$-60^\circ$	8.17	6.78	6.04	5.61	5.15	5.04	4.93	4.95	5.03	5.15	5.29	5.44	5.61
$-90^\circ$	8.20	6.81	6.07	5.65	5.22	5.11	5.08	5.05	5.16	5.31	5.48	5.66	5.85

#### 第4節 結 語

前節の計算例によって、粘性土の地山の系振円形トンネル周辺の変形の状態がよくわかるが、粘性土よりなる軟弱地山のときは地山の初期応力は鉛直方向と水平方向の応力は殆んど同じ値であって、トンネル円孔縁の変位はすべてトンネル中心に向い、全体的にトンネル断面が縮小している。すなわち廻路においては地山が膨張して押出してくることを示している。その押出量はトンネル上盤中央が最大で、側壁を経て下盤中央に向かって減少している。そうして軟弱地山のトンネルでは下盤の隆起があることを示している。

つぎに変形挙動を示す図に示れる、トンネル掘削直後の変形速度が大であって、その速度は時間の経過とともに減少して、 $\sigma = \infty$  では  $(u_r)_{el}$  に近づいている。

計算例では  $\sigma = 300 \text{ sec}$  で、ほとんど  $(u_r)_{el}$  の値に近づいている。簡単な粘弾性体と地山をみなしうるときのトンネルの変形挙動のおこる条件としては応力集中による応力の値が地山材料の上限降伏値以下となっていることである。

$\sigma_0$ ,  $\sigma_r$  の等値曲線図をみると、この曲線はトンネル円孔近傍の周辺ではトンネルを取り囲んでいる。すなわち軟弱地山のトンネル孔近傍の周辺に圧力環が発生していることを示している。

以上の理論によってトンネル周辺の変形挙動について近似的ではあるが、著者によって始めて理論的に明らかにすることができた。

# 第3章 より一般化した粘弾性体とみなされる地山中の変形弾性トンネルの変形挙動<sup>30)</sup>

## 第1節 極座標による弾性体の平面歪問題

第2章第1節の第2, 3図に示す極座標を用いて, 微小要素に作用する応力に関する応力平衡条件式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3.1)$$

ただし記号の説明はすべて第2章第1節に述べたものをここにも用いるものとする。(2.2.2)式より

$$\Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \dots\dots\dots (2.3.2)$$

平均直応力は  $P = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)$ , 平均直ヒズミは  $\frac{\Delta}{2} = \frac{\epsilon_r + \epsilon_\theta}{2}$  であって, 応力の deviator は  $r$  方向のものは  $\sigma_r - P$ ,  $\theta$  方向のものは  $\sigma_\theta - P$  となる。ヒズミの deviator は  $r$  方向のものは  $\epsilon_r - \frac{\Delta}{2}$ ,  $\theta$  方向のものは  $\epsilon_\theta - \frac{\Delta}{2}$  となる。また下限降伏状態における  $r$  方向の応力を  $\sigma_{r0}$ ,  $\theta$  方向の応力を  $\sigma_{\theta 0}$  とする。このときの平均直応力は  $P_0 = \frac{\sigma_{r0} + \sigma_{\theta 0}}{2}$  であって,  $r$  方向の応力の deviator は  $\sigma_{r0} - P_0$ ,  $\theta$  方向の応力の deviator は  $\sigma_{\theta 0} - P_0$  となる。

下限降伏状態における応力平衡条件式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{r0}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{r0} - \sigma_{\theta 0}}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta 0}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta 0}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3.3)$$

となる。ただし  $\tau_{r\theta 0}$  は下限降伏状態におけるせん断応力である。

弾性体としての  $u_r, u_\theta, \Delta$  をそれぞれ  $(u_r)_{el}, (u_\theta)_{el}, \Delta_{el}$  とすれば(1, 2, 12)式に上記の応力の deviator, ヒズミの deviator を代入して,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r - P &= 2 \left\{ (\epsilon_r)_{el} - \frac{\Delta_{el}}{2} \right\} \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} + \sigma_{r0} - P_0 \\ \sigma_\theta - P &= 2 \left\{ (\epsilon_\theta)_{el} - \frac{\Delta_{el}}{2} \right\} \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} + \sigma_{\theta 0} - P_0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{(\epsilon_{r\theta})_{el}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} + \tau_{r\theta 0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3.4)$$

ただし, 弾性体における  $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_{r\theta}$  をそれぞれ  $(\epsilon_r)_{el}, (\epsilon_\theta)_{el}, (\epsilon_{r\theta})_{el}$  とする。(2.3.4)式に(2.2.2)式を代入して  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  を求めれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= P + \left\{ \frac{\partial (u_r)_{el}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta)_{el}}{\partial \theta} - \frac{(u_r)_{el}}{r} \right\} \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} + \sigma_{r0} - P_0 \\ \sigma_\theta &= P + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta)_{el}}{\partial \theta} + \frac{(u_r)_{el}}{r} - \frac{\partial (u_r)_{el}}{\partial r} \right\} \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} + \sigma_{\theta 0} - P_0 \\ \tau_{r\theta} &= \left\{ \frac{\partial (u_\theta)_{el}}{\partial r} - \frac{(u_\theta)_{el}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_r)_{el}}{\partial \theta} \right\} \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} + \tau_{r\theta 0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3.5)$$

(2.3.5)式を(2.3.1)式に代入して、かつ(2.3.3)式を利用して

$$\left. \begin{aligned} & -\left(\frac{\partial P}{\partial r} + F_r - \frac{\partial P_0}{\partial r}\right) \\ & = \frac{1}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}} \left\{ \frac{\partial \Delta_{el}}{\partial r} + \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (U_r)_{el}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (U_\theta)_{el}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (U_\theta)_{el}}{\partial \theta} \right) \right\}, \\ & -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P_0}{\partial \theta}\right) \\ & = \frac{1}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta_{el}}{\partial \theta} + \left( \frac{\partial^2 (U_\theta)_{el}}{\partial r^2} - \frac{(U_\theta)_{el}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (U_\theta)_{el}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (U_r)_{el}}{\partial \theta} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (U_r)_{el}}{\partial r \partial \theta} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

## 第2節 変形挙動の基礎方程式

より一般化した粘弾性体とみなされる地山材料の力学的模型は第2章第1節に説明したものであって、第1、9図に示す。これより応力の deviator とヒズミの deviator との rheology 的関係は(1.2.11)式に示されるものである。第1節に述べた応力とヒズミの deviator を(1.2.11)式に代入して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r - P &= \lambda \left( \varepsilon_r - \frac{\Delta}{2} \right) \frac{1}{T(x)} + \sigma_{ro} - P_0 \\ \sigma_\theta - P &= \lambda \left( \varepsilon_\theta - \frac{\Delta}{2} \right) \frac{1}{T(x)} + \sigma_{\theta o} - P_0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\varepsilon_{r\theta}}{T(x)} + \tau_{r\theta o} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.7)$$

(2.3.7)式に(2.2.2)式を代入して $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ を求めれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= P + \left\{ \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{U_r}{r} \right\} \frac{1}{T(x)} + \sigma_{ro} - P_0 \\ \sigma_\theta &= P + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} - \frac{\partial U_r}{\partial r} \right\} \frac{1}{T(x)} + \sigma_{\theta o} - P_0 \\ \tau_{r\theta} &= \left\{ \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right\} \frac{1}{T(x)} + \tau_{r\theta o} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.8)$$

(2.3.8)式を(2.3.1)式に代入し、かつ(2.3.3)式を利用して、また

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial r} &= \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_r}{r^2} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \end{aligned}$$

なることに注意して

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right\} \right\} &= - \left\{ \left( \frac{\partial P}{\partial r} + F_r \right) - \frac{\partial P_0}{\partial r} \right\} T(x), \\ \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \left\{ \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} - \frac{U_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial \theta} \right\} \right\} & \end{aligned} \right\} \quad (2.3.9)$$



$$= - \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P_\theta}{\partial \theta} \right\} T(t) \quad ]$$

(2.3.6)式を(2.3.9)式に代入して

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \left[ \frac{\partial \Delta_{e1}}{\partial r} + \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (u_r)_{e1}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (u_\theta)_{e1}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (u_\theta)_{e1}}{\partial \theta} \right\} \right] T(t), \\ & \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \left\{ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta_{e1}}{\partial \theta} + \left\{ \frac{\partial^2 (u_\theta)_{e1}}{\partial r^2} - \frac{(u_\theta)_{e1}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (u_r)_{e1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta)_{e1}}{\partial r} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (u_r)_{e1}}{\partial r \partial \theta} \right\} \right] T(t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.3.10)$$

(2.3.10)式において変数分離できることより

$$u_r = U_r T(t), \quad u_\theta = U_\theta T(t)$$

とすることができる。 $U_r, U_\theta$  は時間に関係のない  $r, \theta$  の函数であり、 $T(t)$  は(1.2.8)式で表わされる時間函数である。

$$\frac{\partial \Delta}{\partial r} + \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right\} \equiv V_1$$

として、上式の中の  $\Delta, u_r, u_\theta$  の代りにそれぞれ  $\Delta_{e1}, (u_r)_{e1}, (u_\theta)_{e1}$  としたときの  $V_1$  を  $V_{1,e1}$  とする。また

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \left\{ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right\} \equiv V_2$$

として、上式の中の  $\Delta, u_r, u_\theta$  の代りにそれぞれ  $\Delta_{e1}, (u_r)_{e1}, (u_\theta)_{e1}$  としたときの  $V_2$  を  $V_{2,e1}$  とする。これから(2.3.10)式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} V_{1,e1} T(t) \\ V_2 &= \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} V_{2,e1} T(t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.3.11)$$

(2.3.11)式に(1.2.8)式を代入して

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{V_{1,e1}}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \left[ \frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2} - \frac{2}{2B_2 r_2} \tanh^{-1} \left\{ \exp(-2A_2 B_2 r_2 t) \tanh \left( \frac{B_2}{2} \right) \right\} \right] \\ V_2 &= \frac{V_{2,e1}}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \left[ \frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2} - \frac{2}{2B_2 r_2} \tanh^{-1} \left\{ \exp(-2A_2 B_2 r_2 t) \tanh \left( \frac{B_2}{2} \right) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.3.12)$$

となる。これより

$$V_1 = V_{1,e1} - \frac{2 V_{1,e1}}{B_2 r_2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \tanh^{-1} \left\{ \exp(-2A_2 B_2 r_2 t) \tanh \left( \frac{B_2}{2} \right) \right\}$$

となり、これを変形して

$$\log \tanh \left[ \frac{(V_{1,e1} - V_1) B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}{2 V_{1,e1}} \right] = -2 A_2 B_2 n_2 t + \log \tanh \left( \frac{B_2}{2} \right) \quad (2.3.13)$$

さて(2.3.13)式において

$$\frac{B_2}{2} > 1 \quad (\text{条件: } 1)$$

であり、かつ

$$2 B_2 > \frac{2(V_{1,e1} - V_1) B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}{V_{1,e1}} > 1 \quad (\text{条件: } 2) \quad (2.3.14)$$

なる条件、すなわち

$$V_1 < V_{1,e1} \left\{ 1 - \frac{1}{2 B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \right\} \quad (2.3.15)$$

の範囲において、次のような近似が可能である。

$$\begin{aligned} & \log \tanh \left[ \frac{(V_{1,e1} - V_1) B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}{2 V_{1,e1}} \right] - \log \tanh \left( \frac{B_2}{2} \right) \\ &= \log \left[ 1 - 2 \exp \left\{ - \frac{(V_{1,e1} - V_1) B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}{V_{1,e1}} \right\} + 2 \exp \left\{ - \frac{2(V_{1,e1} - V_1) B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}{V_{1,e1}} \right\} \right. \\ & \quad \left. - \dots \right] - \log \left[ 1 - 2 \exp(-B_2) + 2 \exp(-2 B_2) - \dots \right] \\ &\doteq \log \left[ 1 - 2 \exp \left\{ - \frac{(V_{1,e1} - V_1) B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}{V_{1,e1}} \right\} + 2 \exp \left\{ - \frac{2(V_{1,e1} - V_1) B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}{V_{1,e1}} \right\} \right. \\ & \quad \left. - \dots \right] \quad (\text{条件: } 1 \text{ による}) \\ &\doteq -2 \exp \left\{ - \frac{(V_{1,e1} - V_1) B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}{V_{1,e1}} \right\} \quad (\text{条件: } 2 \text{ による}) \end{aligned}$$

従って、(2.3.13)式は近似的に

$$\frac{(V_1 - V_{1,e1}) B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}{V_{1,e1}} = \log A_2 B_2 n_2 t$$

となるから(2.3.13)式に対して

$$V_1 = V_{1,e1} + \frac{V_{1,e1}}{B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \log A_2 B_2 n_2 + \frac{V_{1,e1}}{B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \log t \quad (2.3.16)$$

同様にして

$$V_2 < V_{2,e1} \left\{ 1 - \frac{1}{2 B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \right\} \quad (2.3.17)$$

の範囲において

$$V_2 = V_{2,e1} + \frac{V_{2,e1}}{B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \log A_2 B_2 n_2 + \frac{V_{2,e1}}{B_2 n_2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \log t \quad (2.3.18)$$

となる。

つぎに(2.3.15)式及び(2.3.17)式を満足しない場合、すなわち

$$\left. \begin{aligned} V_1 &> V_{1,e1} \left\{ 1 - \frac{1}{2B_2\beta_2 \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)} \right\} \\ V_2 &> V_{2,e1} \left\{ 1 - \frac{1}{2B_2\beta_2 \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3.19)$$

に対して考察する。(2.3.19)式において  $t \rightarrow \infty$  とするとき

$$(V_1)_{t \rightarrow \infty} = V_{1,e1}, \quad (V_2)_{t \rightarrow \infty} = V_{2,e1} \dots\dots\dots (2.3.20)$$

となる。(2.3.15)式及び(2.3.17)式の条件のときは  $V_1, V_2$  はそれぞれ(2.3.16)式及び(2.3.18)式で表わされるが、 $t \rightarrow \infty$  となると(2.3.20)式が成立する。 $V_1$  と  $V_{1,e1}$  との対応、及び  $V_2$  と  $V_{2,e1}$  との対応においてそれぞれ  $\Delta$  は  $\Delta_{e1}$  に、 $U_n$  は  $(U_n)_{e1}$  に、 $U_0$  は  $(U_0)_{e1}$  に対応していることと、(2.3.19)式より(2.3.20)式までの諸式は(2.3.11)式よりみちがかれていることから、(2.3.15)式及び(2.3.17)式の条件より(2.3.16)式及び(2.3.18)式がそれぞれ成立している状態によって

$$\left. \begin{aligned} U_n &< (U_n)_{e1} \left\{ 1 - \frac{1}{2B_2\beta_2 \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)} \right\} \\ U_0 &< (U_0)_{e1} \left\{ 1 - \frac{1}{2B_2\beta_2 \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3.21)$$

の条件のときは

$$\left. \begin{aligned} U_n &= (U_n)_{e1} + \frac{(U_n)_{e1}}{B_2\beta_2 \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)} \log A_2 B_2 \beta_2 + \frac{(U_n)_{e1}}{B_2\beta_2 \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)} \log t \\ U_0 &= (U_0)_{e1} + \frac{(U_0)_{e1}}{B_2\beta_2 \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)} \log A_2 B_2 \beta_2 + \frac{(U_0)_{e1}}{B_2\beta_2 \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)} \log t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3.22)$$

いま

$$\Phi(t) \equiv 1 + \frac{1}{B_2\beta_2 \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)} \log A_2 B_2 \beta_2 + \frac{1}{B_2\beta_2 \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)} \log t \dots\dots\dots (2.3.23)$$

として

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 + \frac{2.3}{B_2\beta_2 \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)} \log_{10} A_2 B_2 \beta_2 \\ b &= \frac{2.3}{B_2\beta_2 \left( \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3.24)$$

とすれば  $\Phi(t)$  は次式で表わされる。

$$\Phi(t) = a + b \log_{10} t \dots\dots\dots (2.3.25)$$

(2.3.22)式は次式となる。

$$U_n = (U_n)_{e1} \Phi(t), \quad U_0 = (U_0)_{e1} \Phi(t) \dots\dots\dots (2.3.26)$$

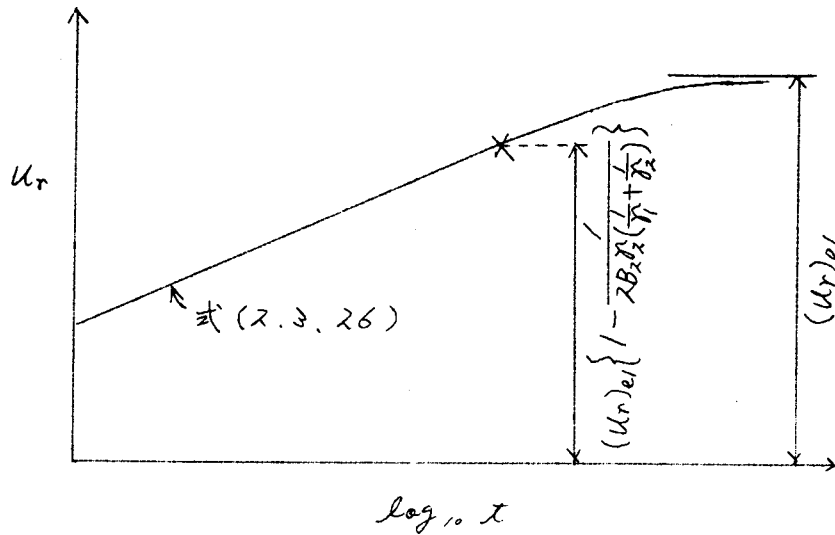
つぎに(2.3.21)式を満足しない場合、すなわち

$$\left. \begin{aligned} u_r &> (u_r)_{el} \left\{ 1 - \frac{1}{2B_2 \sqrt{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \right\} \\ u_\theta &> (u_\theta)_{el} \left\{ 1 - \frac{1}{2B_2 \sqrt{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3.27)$$

の条件のときは

$$(u_r)_{x \rightarrow \infty} = (u_r)_{el}, \quad (u_\theta)_{x \rightarrow \infty} = (u_\theta)_{el} \quad (2.3.28)$$

となる。



第 2.12 図

すなわち時間の経過とともに変形は(2.3.28)式に漸近しつつ、ついに変形の進行が停止することになる。以上の結果を图示すると  $u_r \sim \log_{10} x$  の関係は第2.12図の如くなる。 $u_\theta \sim \log_{10} x$  についても同様のことがいえる。

#### 第3節 素掘円形トンネルの変形の時間的変化

水平な地表面を有する等方等質の弾性体とみなされる地山の中かなり地表面より深い地質で、かつ坑内よりかなり離れた地質に円形の素掘トンネルを掘削したとき、この素掘円形トンネル周辺の変位を求める式は本編第1章第3節に述べた方法と同様にして、 $u_r$  に関して(2.1.43)式となる。ただしこの場合の場合は平面歪問題の場合なる故に

$$\nu = 0, \quad \nu^* = 0 \quad \text{となるから} \quad \sigma_1 = \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{1}{\mu-1} \right), \quad \sigma_2 = \frac{\mu}{2} \left( 1 - \frac{1}{\mu-1} \right),$$

$$\mu_0 = \mu + 1, \quad \mu_1 = \frac{1}{\mu} (\mu + 1)(\mu - 1), \quad \mu_2 = \frac{1}{\mu} (\mu + 1)(\mu - 2)$$

となって、これを用いて  $m = -\frac{\mu_2}{\mu_1}$  とする。 $g = \left( \frac{r}{r_1} \right)^2$  として、本編第1章第3節の記号をそのまま用いて  $(u_r)_{el}$  を求める。これを(2.3.26)式及び(2.3.28)式に代入する。重(1)に関しては、(1.2.24)式と(2.3.24)式とは同じであるから第1編第3章第3節で述べた、その求め方によって重(1)を決定する。また別の層は(1.2.30)式によって求めた値を用いて、 $E = 2\mu(1 + \frac{1}{\mu})$  によって  $E$  を求め  $(u_r)_{el}$  の計算に用いる。よって素掘円形トンネル周辺の変形の時間的変化を表わす式は次式となる。

$$u_n = \frac{1}{\mu E} \left[ -r C_1 H(\mu_2 + \mu_0 g) + \left\{ \frac{1}{4} (2\sigma_1 \mu_2 + \sigma_2 \mu_0) - (\mu_1 + m \mu_0) \omega p \log r \right. \right. \\ \left. - \frac{\mu_0}{2} \left( m \omega + \frac{\sigma_2}{2} \right) g^2 \right\} r^2 \sin \theta + \sigma_2 H \left\{ \mu_0 (1 - g^2) + 4 \mu_1 g \right\} r \cos 2\theta \\ \left. - \frac{\sigma_2}{4} \left\{ \mu_0 (1 + g^2 - 2g^3) + 4 \mu_1 g^2 \right\} r^2 \sin 3\theta \right] \Phi(t) \dots (2.3.29)$$

#### 第4節 結 語

前章に述べた簡単な粘弾性体としての地山中の素掘円形トンネルの变形挙動については、トンネル掘削直後急激に变形が進み、次第に变形速度が減少しながらある時間の後には  $(u_n)_{el}$  になったが、実際の現場の観測によれば結論の第6図に示したように、トンネル掘削直後より急激に变形が進み、ある時間を経て後と变形速度はかなり減少しながらも相当長期間にわたり变形は進行してゆくことがみられる。この变形を説明するには  $(2.3.29)$  式で説明するのが妥当と考えられる。すなわち地山をより一般化した粘弾性体とみなした基本式より誘導した計算式によって、より精密に变形挙動を表わすことができる。その特殊の場合として前章の場合も包含されてくる。このことに関しては第3編第5章において述べることにする。なお  $(2.3.29)$  式の成立するのは、トンネル掘削によるトンネル周辺の応力集中による応力が上限降伏値以下の場合においてである。

従来この種の向題についてはほとんど研究されておらず、以上述べた理論はトンネル周辺の变形挙動の解明及び工法に裨益する所が大であると考えられる。

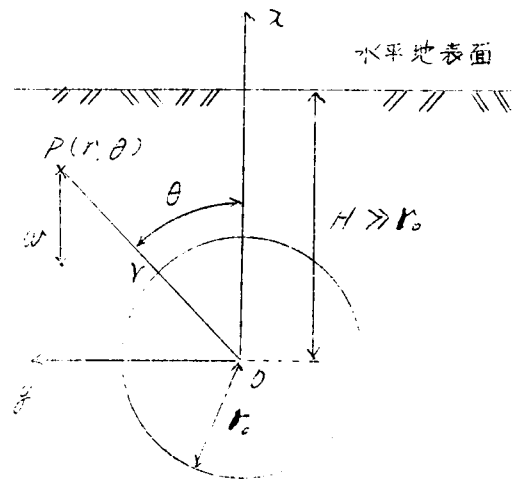
## 第4章 摩擦性塑性体とみなされる地山中の素掘円形トンネル

### の周辺応力分布<sup>21)</sup>

#### 第1節 応力平衡条件と降伏条件

水平な地表面を有する地山が土のような摩擦性塑性体で等方等質性であり、これに重力が作用しているとき、この半無限体の地山の中に水平円形トンネルを掘削した場合の塑性流動領域内の素掘トンネル周辺応力分布及び塑性流動境界線の位置及び形を求めんとするのである。

本編第3章までは、トンネル周辺の応力集中による応力の値が土の上限降伏値以下のときのクリープ現象の変形挙動について論じてきたのであるが、トンネル周辺の応力の値が上限降伏値よりも大となれば、その部分において地山材料は弾性状態から塑性状態に移行し始める。その後大きな塑性変形が引続いて起る。この種の塑性流動が生ずるときの土の平衡状態を解析する土質力学の分野を土の摩擦性塑性論的諸問題とよぶこととする。それでこのような応力状態を求めるにはトンネル周辺の地山が摩擦性塑性体とみなされるとして解いていくのである。従来この種の問題に関しては、平松博士<sup>22)</sup>、岡氏<sup>23)</sup>、R. Ferner<sup>24)</sup>、Tan, Iterson<sup>25)</sup>及びK. Terzaghi<sup>26)</sup>の諸氏が研究してきたが、トンネル地山のごとく重力の作用を受けた場合の解法に関してはほとんど研究されていない。著者は重力が作用する場合について理論解を導くことができたので、これに関して次述べる。



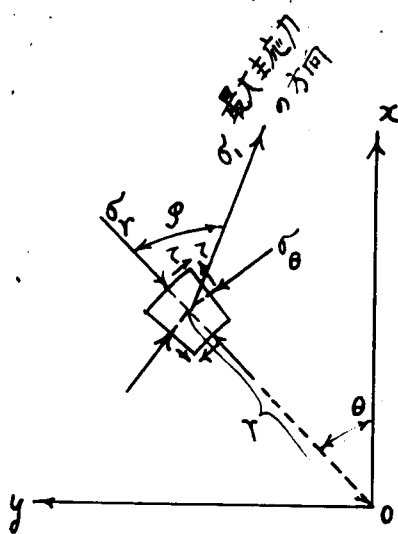
第2.1図

第2.1図に示すように、水平地表面より $H$ の深さの地点に円形トンネルの中心 $O$ があり、この $O$ を座標の原点として $z$ 軸を鉛直軸、 $x$ 軸を水平軸とする直交座標をとり、 $P$ 点を極座標 $r, \theta$ で表わすとき $PO=r$ として、動径 $r$ が $Ox$ となす角を $\theta$ とする。 $\theta$ は反時計方向を正とする。円形トンネルの半径を $r_0$ とすると、 $H$ は $r_0$ に較べて相当大なる値をとる場合を取扱うこととする。

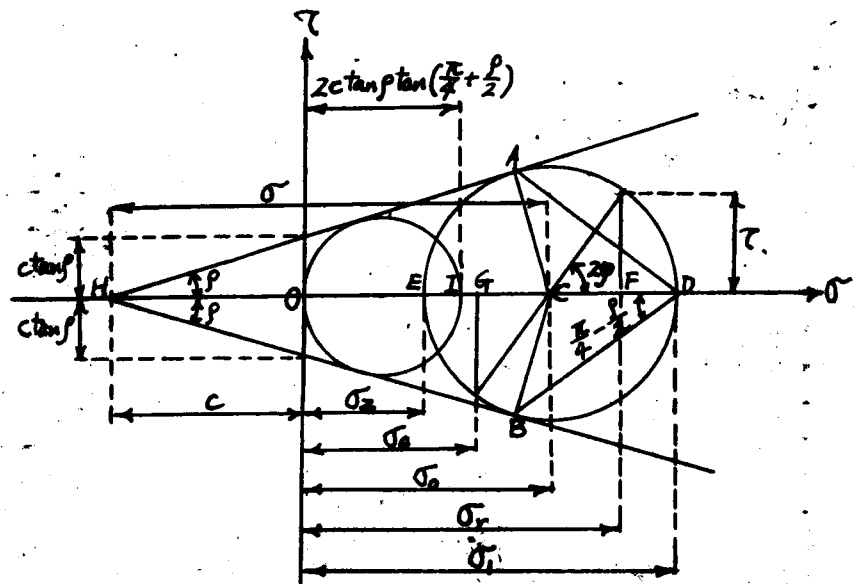
重力のような物体力が作用する摩擦性塑性体の微小体素に作用する応力に関して二次元的に考えたときの応力平衡条件式は第2.13図に示す極座標によつて表わせば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= w \cos \theta \\ \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau}{r} &= -w \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

ただし、 $\sigma_r$ ：半径方向の直応力、 $\sigma_\theta$ ：接線方向の直応力、 $\tau$ ：せん断応力、 $w$ ：地山の単位容積の重量、とする。



第2.14図



第2.15図

いま  $\sigma_1$ ：最大主応力、 $\sigma_2$ ：最小主応力、 $\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}$ 、 $\varphi$ ：最大主応力方向と半径方向とのなす角（第2.14図参照、これは  $r, \theta$  の函数である。）

$\rho$ ：地山の摩擦性塑性体の内部摩擦角、 $c \tan \rho$ ：粘着力（第2.14図において  $OH = c$  とする。）とすれば、第2.15図の Mohr の応力円の関係より、

$$\sigma_r = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi$$

が成立する、第2.15図に示すように限界線  $HA, HB$  が Mohr 応力円に切れる条件、すなわち Coulomb-Mohr の条件によつて、

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = (c + \sigma_\theta) \sin \rho$$

が成立し、降伏条件式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma(1 + \sin p \cos 2\varphi) - C \\ \sigma_\theta &= \sigma(1 - \sin p \cos 2\varphi) - C \\ \tau &= \sigma \sin p \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.4.2)$$

ただし

$$C + \sigma_0 = \sigma \dots \dots \dots (2.4.3)$$

として、この $\sigma$ は $r, \theta$ の函数である。以上の式において、トンネルは $x$ 軸に関して対称なゆえに $\theta$ が $-\theta$ のときは $\varphi$ は $-\varphi$ となる。 $\varphi$ は時計方向を正とすることとする。  
(2.4.2)式を(2.4.1)式に代入して、

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sin p \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\sin p \sin 2\varphi}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} - 2\sigma \sin p \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ + \frac{2\sigma \sin p \cos 2\varphi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{2\sigma \sin p \cos 2\varphi}{r} - w \cos \theta = 0 \\ \sin p \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1 - \sin p \cos 2\varphi}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + 2\sigma \sin p \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ + \frac{2\sigma \sin p \sin 2\varphi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{2\sigma \sin p \sin 2\varphi}{r} + w \sin \theta = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.4.4)$$

上式は $r, \theta$ が独立変数、 $\sigma, \varphi$ が従属変数となつて $\sigma$ と $\varphi$ が $r, \theta$ に関する偏導函数の係数の中に入つていて、 $r, \theta, \sigma, \varphi$ を含む連立偏微分方程式である。

## 第2節 特有曲線の性質と境界条件

前節において応力平衡条件式と降伏条件式とより(2.4.4)式を導き、これより特有連立方程式を求め、これが非迴転圧縮流体の基本式と類似して、物理面の特有曲線がヒリ線となることに注目して、トンネル円孔周縁上の境界条件をみたすようにして解を求める方法につぎつぎに述べる。いま

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 + \sin p \cos 2\varphi, & B_1 &= \frac{\sin p \sin 2\varphi}{r}, & C_1 &= -2\sigma \sin p \sin 2\varphi, \\ D_1 &= \frac{2\sigma \sin p \cos 2\varphi}{r}, & E_1 &= \frac{2\sigma \sin p \cos 2\varphi}{r} - w \cos \theta, \\ A_2 &= \sin p \sin 2\varphi, & B_2 &= \frac{1 - \sin p \cos 2\varphi}{r}, & C_2 &= 2\sigma \sin p \cos 2\varphi, \\ D_2 &= \frac{2\sigma \sin p \sin 2\varphi}{r}, & E_2 &= \frac{2\sigma \sin p \sin 2\varphi}{r} + w \sin \theta. \end{aligned}$$

として、次の Poisson Bracket  $\{PQ\} = P_1 Q_2 - P_2 Q_1$  の計算を行えば、

$$a = \{AC\} = 2\sigma \sin p (\cos 2\varphi + \sin p),$$



$$2b = \{AD\} + \{BC\} = \frac{4\sigma \sin P \sin 2\varphi}{r},$$

$$C' = \{BD\} = \frac{2\sigma \sin P}{r^2} (\sin P - \cos 2\varphi),$$

$$\lambda_+ = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac'}}{a} = \frac{1}{r} \tan \left\{ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{P}{2} \right) + \varphi \right\},$$

$$\lambda_- = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac'}}{a} = \frac{1}{r} \tan \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{P}{2} \right) + \varphi \right\},$$

$$T = \{AB\} = \frac{\cos^2 P}{r},$$

$$S = \{BC\} = \frac{2\sigma \sin P \sin 2\varphi}{r},$$

$$L = \{AE\} = \frac{2\sigma \sin P \sin 2\varphi}{r} + w \{ \sin \theta + \sin P \sin(2\varphi + \theta) \}$$

$$M = \{BE\} = \frac{2\sigma \sin P}{r^2} (\sin P - \cos 2\varphi) + \frac{w}{r} \{ \cos \theta - \sin P \cos(2\varphi + \theta) \},$$

となる。(2.4.4)式の連立偏微分方程式を解くことは次の特有連立方程式(2.4.5)を解くことにより連とられる。 $\alpha, \beta$ を特有変数として、

$$\left. \begin{aligned} C+ \text{曲線} : \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \lambda_+ \frac{\partial r}{\partial \alpha} &= 0 \\ C- \text{曲線} : \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - \lambda_- \frac{\partial r}{\partial \beta} &= 0 \\ T+ \text{曲線} : T \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} + (a\lambda_+ - S) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + (L\lambda_+ - M) \frac{\partial r}{\partial \alpha} &= 0 \\ T- \text{曲線} : T \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} + (a\lambda_- - S) \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + (L\lambda_- - M) \frac{\partial r}{\partial \beta} &= 0 \end{aligned} \right\} (2.4.5)$$

なる特有連立方程式がえられ、この式に上記の $\lambda_+, \lambda_-, a, S, T, L$ 及び $M$ の値を代入すれば、

$$C+ \text{曲線} : \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{1}{r} \tan \left\{ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{P}{2} \right) + \varphi \right\} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \dots\dots\dots (2.4.6)$$

$$C- \text{曲線} : \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{1}{r} \tan \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{P}{2} \right) + \varphi \right\} \frac{\partial r}{\partial \beta} \dots\dots\dots (2.4.7)$$

$$\begin{aligned} T+ \text{曲線} : \cos^2 P \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} + \sigma \sin 2P \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \\ + \left\{ 2\sigma \sin P \sin 2\varphi + rw \{ \sin \theta + \sin P \sin(2\varphi + \theta) \} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \\ - \left\{ \frac{2\sigma \sin P}{r} (\sin P - \cos 2\varphi) + w \{ \cos \theta \right. \\ \left. - \sin P \cos(2\varphi + \theta) \} \right\} \frac{\partial r}{\partial \alpha} = 0 \quad (2.4.8) \end{aligned}$$

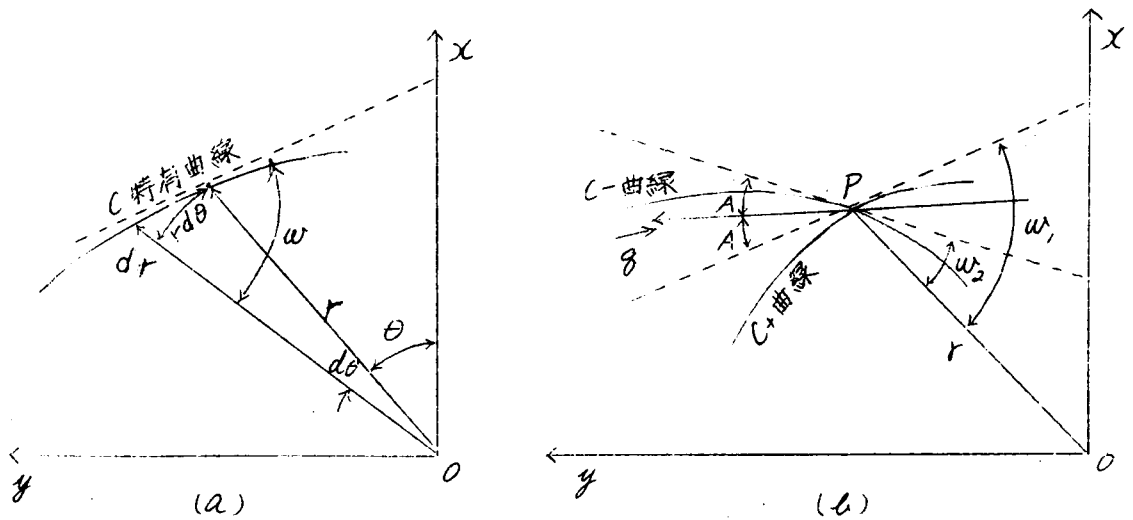
$$r\text{-曲線: } \cos^2 p \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} - \sigma \sin 2p \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$$

$$+ \left\{ 2\sigma \sin p \sin 2\varphi + r\omega \left\{ \sin \theta + \sin p \sin (2\varphi + \theta) \right\} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial \beta}$$

$$- \left\{ \frac{2\sigma \sin p}{r} (\sin p - \cos 2\varphi) + \omega \left\{ \cos \theta \right. \right.$$

$$\left. - \sin p \cos (2\varphi + \theta) \right\} \frac{\partial r}{\partial \beta} = 0 \dots (24.9)$$

となる。上式の  $C+$  曲線,  $C-$  曲線は物理面  $(r, \theta)$  についてであり,  $r+$  曲線,  $r-$  曲線は応力面  $(\sigma, \varphi)$  についてである。物理面と応力面とは一対一の対応があり,  $C+$  曲線と  $r+$  曲線,  $C-$  曲線と  $r-$  曲線とはそれぞれ相対応している。



第 2. 16 図

第 2. 16 図 (b) に示す物理面  $(r, \theta)$  において  $C+$  曲線と  $C-$  曲線の交点  $P$  における各曲線の切線が  $OP$  の半径方向となす角をそれぞれ  $\omega_1, \omega_2$  とすれば 第 2. 16 図 (a) を参照して,

$C+$  曲線に関して (2. 4. 6) 式より

$$\frac{r \partial \theta}{\partial r} = \tan \left\{ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{p}{2} \right) + \varphi \right\}.$$

また第 2. 16 図によつて,

$$\frac{r \partial \theta}{\partial r} = \tan \omega_1, \quad \text{となるから}$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{p}{2} + \varphi$$

$C-$  曲線に関して (2. 4. 7) 式より,

$$\frac{r \partial \theta}{\partial r} = \tan \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{p}{2} \right) + \varphi \right\}$$

また第2、16図によつて、 $\frac{r \partial \theta}{\partial r} = \tan \omega_2$  となるから

$$\omega_2 = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi$$

P点におけるC+曲線とC-曲線との各切線かなす角は、 $\omega_1 - \omega_2 = \frac{\pi}{2} - \rho$  となり、半径方向より $\varphi$ の角をなした方向が最大主応力方向であつて $\omega_1, \omega_2$ の値よりC+曲線、C-曲線はより線とみなすことができる。 $\omega_1 - \omega_2 = \frac{\pi}{2} - \rho$ の角を二等分する $\vec{\rho}$ の方向は最大主応力の方向となる。(2.4.9)

つきに(2.4.6)式を $\beta$ で微分して、(2.4.7)式を用いて、

$$\begin{aligned} & r \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \cot \left\{ -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} + r \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\}} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{\partial r}{\partial \alpha} + \tan \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.4.10)$$

また(2.4.7)式を $\alpha$ で微分して、(2.4.6)式を用いて、

$$\begin{aligned} & r \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \cot \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} + r \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \left\{ -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\}} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial r}{\partial \beta} \\ &+ \tan \left\{ -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta} \quad \dots\dots\dots (2.4.11) \end{aligned}$$

(2.4.10) - (2.4.11) より

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta} \left[ \tan \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} - \tan \left\{ -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} \right] \\ &+ \frac{1}{\cos^2 \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\}} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{\partial r}{\partial \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \left\{ -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\}} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial r}{\partial \beta} \\ &+ r \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \left[ -\cot \left\{ -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} + \cot \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.4.12)$$

(2.4.6)式と(2.4.7)式と<sup>々</sup>辺々相乗して、

$$r \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{1}{r} \tan \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} \tan \left\{ -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \frac{\partial r}{\partial \beta} \quad \dots\dots\dots (2.4.13)$$

(2.4.10)式を(2.4.12)式に代入して、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta} \left[ \tan \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} - \tan \left\{ -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} \right] \\ &+ \frac{1}{\cos^2 \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\}} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{\partial r}{\partial \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \left\{ -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\}} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial r}{\partial \beta} \\ &+ \frac{1}{r} \tan \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} \cdot \tan \left\{ -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi \right\} \times \end{aligned}$$

$$\left\{ -\cot\left\{-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\}+\cot\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\}\right\}\frac{\partial r}{\partial \alpha}\frac{\partial r}{\partial \beta}=0$$

..... (2.4.14)

となる。しかるに  $\varphi$  は  $r, \theta$  の函数であり、(2.4.6) 式及び (2.4.7) 式の關係より、 $r, \theta$  はいずれも  $\alpha, \beta$  の函数である。ゆえに  $\varphi$  は  $\alpha, \beta$  の函数である。  
すなわち  $\varphi = f(r, \theta)$ ,  $r = f_1(\alpha, \beta)$ ,  $\theta = f_2(\alpha, \beta)$  より  $\varphi = f_3(\alpha, \beta)$  となる。

また、 $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = g_1(r, \theta) = h_1(\alpha, \beta)$  及び  $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = g_2(r, \theta) = h_2(\alpha, \beta)$  であり、  
1)  $\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}, \frac{\partial \theta}{\partial \beta}$  はそれぞれ (2.4.6) 式、(2.4.7) 式より  $(r, \varphi, \frac{\partial r}{\partial \alpha})$ ,  $(r, \varphi, \frac{\partial r}{\partial \beta})$  の函数であることと

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \beta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \beta}$$

..... (2.4.15)

となることより  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$  はそれぞれ  $(r, \alpha, \beta, \frac{\partial r}{\partial \alpha}, \frac{\partial r}{\partial \beta})$  の函数である。しかるに (2.4.14) 式は、

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta} = G_1(\alpha, \beta, r, \frac{\partial r}{\partial \alpha}, \frac{\partial r}{\partial \beta})$$

..... (2.4.16)

の型に帰着される。ここに  $f, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, h_1, h_2, G_1$  は函数であることを表わす。(2.4.16) 式の型は双曲型の偏微分方程式である。(38)

(2.4.10)  $\times \tan\left\{-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\} - (2.4.11) \times \tan\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\}$  より、  
及び (2.4.6) 式の  $\frac{\partial r}{\partial \alpha}$ , (2.4.7) 式の  $\frac{\partial r}{\partial \beta}$  を用いて、

$$\begin{aligned} & \left\{ \tan\left\{-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\} - \tan\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\} \right\} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} \\ &= \frac{\tan\left\{-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\}}{\tan\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\} \cos^2\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\}} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \\ & \quad - \frac{\tan\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\}}{\tan\left\{-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\} \cos^2\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\}} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \dots (2.4.17) \end{aligned}$$

(2.4.6) 式及び (2.4.7) 式より それぞれ  $\frac{\partial r}{\partial \alpha}, \frac{\partial r}{\partial \beta}$  は  $(r, \varphi, \frac{\partial \theta}{\partial \alpha})$ ,  $(r, \varphi, \frac{\partial \theta}{\partial \beta})$  の函数である。故に (2.4.15) 式より  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$  はそれぞれ  $(\alpha, \beta, r, \frac{\partial \theta}{\partial \alpha})$ ,  $(\alpha, \beta, r, \frac{\partial \theta}{\partial \beta})$  の函数である。よつて (2.4.17) 式は、

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = G_2(\alpha, \beta, r, \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}, \frac{\partial \theta}{\partial \beta})$$

..... (2.4.18)

の型に帰着される。ここに  $G_2$  は函数であることを表わす。(2.4.18) 式は双曲型の偏微分方程式である。

境界条件としては円形トンネル周縁  $K$  において  $r=0$ ,  $\tau=0$  となるゆえに第 2.15 図における Mohr の応力円は境界線  $HA, HB$  及び  $\tau$  軸に切し、かつ  $\sigma_0$  は圧縮応力である。

り、この場合圧縮応力を正符号で表わすこととする。この場合の Mohr の応力円は円 OI で表わされ、円形トンネル周縁上では何れの点でも、

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$(\sigma_{\theta})_{r=r_0} = (\sigma_r)_{r=r_0}$$

$$= 2C \tan p \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p}{2}\right)$$

となり、 $(\sigma_{\theta})_{r=r_0}$  は最大主応力となる。

したがって、

$$(\sigma_r)_{r=r_0} = C \tan p$$

$$\times \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p}{2}\right) + C$$

となり、トンネル周縁では円周の切線方向が最大主応力方向となり、径方向の方向はこの

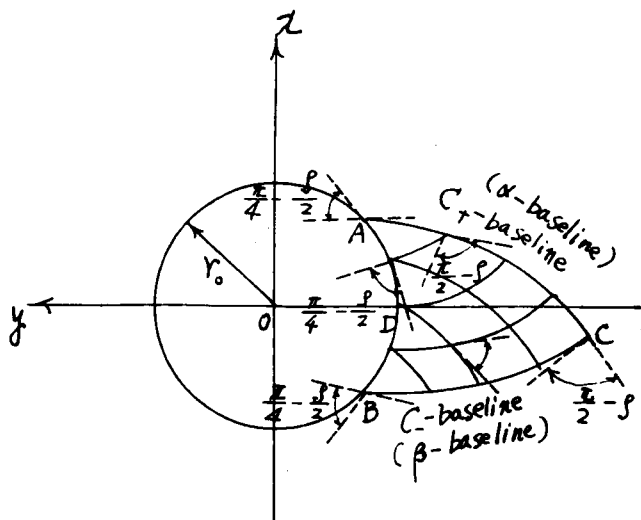


図2.17

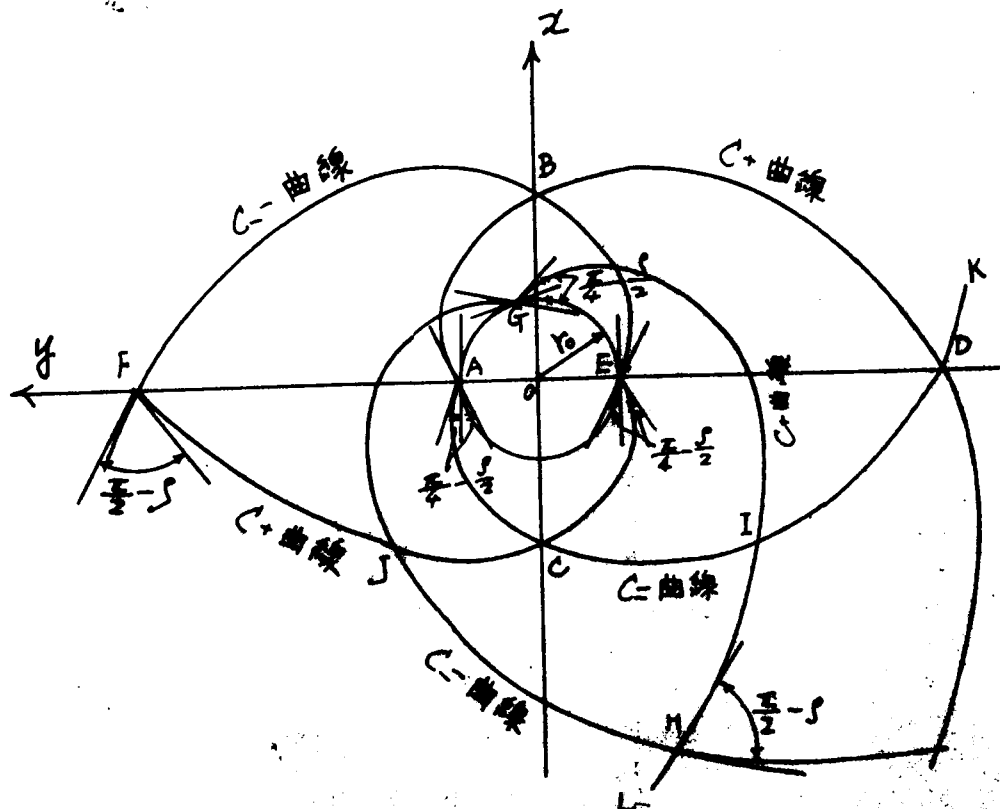


図2.18

切線の方角と  $\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$  の角をなす。いま第2.17図においてトンネル周縁  $\widehat{ADB}$  の部分に塑性流動を起すとすれば、A点を通る上り線とB点を通る上り線との交点をC点とする。AC曲線をC+曲線、BC曲線をC-曲線とすれば、このC+、C-曲線を曲線座標系  $(\alpha, \beta)$  の座標軸として考えれば、円弧境界  $\widehat{ADB}$  はC+座標軸、C-座標軸をそれぞれA点、B点で切ったこととなる。(2.4.16)式及び(2.4.17)式は何れも  $\alpha, \beta$  に関する双曲型の偏微分方程式であるから、ACBなる領域内の上り線上の節点はすべて  $\widehat{ADB}$  の形及びこの円弧上の境界条件  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  により規定されるのである。<sup>39)</sup> しかし摩擦性塑性体においてはC+曲線とC-曲線とは  $\frac{\pi}{2} - \rho$  なる角で交わり、直交しないから *Riemann* 函数を求めることはできないので、この領域内の節点上の  $\sigma, \varphi$  の値は直似的逐次法によつて解く外はない。<sup>40)</sup>

全トンネル周縁が塑性流動を起すとすれば第2.18図においてトンネル側壁やA点より出発する上り線は曲線ABD、ACDとなる。これはそれぞれC+曲線、C-曲線となり、これらの曲線の肉合するABDCAと円孔AGEとの間で囲まれる領域は円孔の形及び円孔縁上の境界条件により規定され、また同様にx軸に関しABDCAと対称なEBFCEと円孔AGEとの間で囲まれる領域も円孔の形及びその上の境界条件によつて規定される。また円孔上の任意の点Gより出る二つの上り線C-曲線GJH及びC+曲線GKHによつて肉合するGJHJG及び円孔AGEとの間で囲まれる領域内も円孔の形及びこの円孔上の境界条件によつて規定される。つぎにC-曲線IDKとC+曲線IHLにより、この外側の領域もIDK曲線、IHL曲線の形がきまつたならば、またこの両曲線上の  $\sigma, \varphi$  の値もきまつてくるから、この境界条件によつて規定することができる。ゆえに結局円孔周辺の塑性流動領域内の上り線の形は円孔の形及び円孔縁上の境界条件によりきまることとなる。そうして地山の荷重状態には無関係となる。しかし応力状態は摩擦性塑性体の自重が影響し、また塑性流動限界線(または弾塑性境界線)の形、大きさは摩擦性塑性体としての地山の自重、すなわちトンネルの地表面よりの深さに関連してくることは次節に述べる。

### 第3節 素堀円形トンネル周辺の応力の直似的逐次法による解法

(2.4.6)式よりC+上り線は、

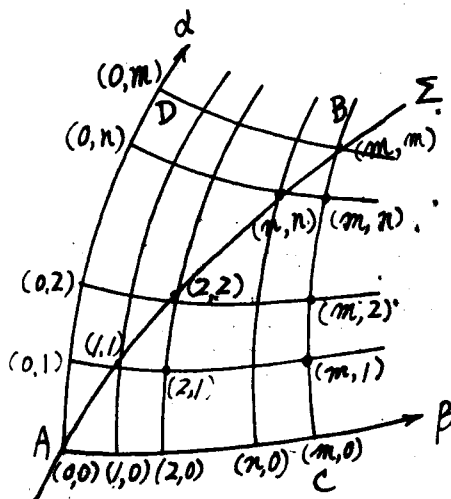
$$r d\theta = \tan \left\{ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \varphi \right\} dr \quad \text{--- (2.4.19)}$$

となり、これを  $\alpha$ -曲線と称することとする。(2.4.7)式よりC-上り線は、

$$r d\theta = \tan \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \varphi \right\} dr \quad \text{--- (2.4.20)}$$

となり、これを  $\beta$ -曲線と称することとする。 $\sigma$  と  $\varphi$  については  $\alpha$ -曲線上では(2.4.8)式より次式がえられる。

$$\begin{aligned} & \cos^2 \rho d\sigma + \sigma \sin 2\rho d\varphi + \{ 2\sigma \sin \rho \sin 2\varphi + r w \{ \sin \theta + \sin \rho \sin (2\varphi + \theta) \} \} d\theta \\ & - \left\{ \frac{2\sigma \sin \rho}{r} (\sin \rho - \cos 2\varphi) + w \{ \cos \theta - \sin \rho \cos (2\varphi + \theta) \} \right\} dr = 0 \\ & \text{--- (2.4.21)} \end{aligned}$$



第2.19図

また  $\beta$ -曲線上では(2.4.9)式より次式がえられる。

$$\begin{aligned} & \cos^2 p d\theta - \sigma \sin 2p d\varphi + \{2\sigma \sin p \sin 2\varphi + r w \{ \sin \theta \\ & \quad + \sin p \sin(2\varphi + \theta) \} \} d\theta \\ & - \left\{ \frac{2\sigma \sin p}{r} (\sin p - \cos 2\varphi) + w \{ \cos \theta - \sin p \cos(2\varphi + \theta) \} \right\} dr = 0 \end{aligned}$$

----- (2.4.22)

$\alpha$ -曲線と $\beta$ -曲線との交点としてきまる各節点の座標及びこの点上の $\sigma, \varphi$ の値を逐次法により解くため  $d\theta$  を  $\Delta\theta$ ,  $dr$  を  $\Delta r$ ,  $d\sigma$  を  $\Delta\sigma$ ,  $d\varphi$  を  $\Delta\varphi$  とする。第2.19図において $\Sigma$ -曲線を境界線すなわちトンネル内孔の周縁とする。この $\Sigma$ -曲線上の節点を順次  $(0,0), (1,1), (2,2), \dots, (n,n), (m,m), \dots$  とする。これらの節点を通る $\alpha$ -曲線,  $\beta$ -曲線を描く。この境界 $\Sigma$ -曲線上の節点の座標  $r, \theta$  及び  $\sigma, \varphi$  の値が已知であるから、これより出発して次のようにして近似的逐次法によつて  $ABC$  の領域中の節点の座標及び  $\sigma, \varphi$  の値を求める。

いま第2.19図に示すように $\Sigma$ 境界線上の隣接せる二節点  $(m,m), (n,n)$  の座標をそれぞれ  $(r_{mm}, \theta_{mm}), (r_{nn}, \theta_{nn})$  とし、 $\sigma$  及び  $\varphi$  の値をそれぞれ  $(\sigma_{mm}, \varphi_{mm}), (\sigma_{nn}, \varphi_{nn})$  とする。これらの値は已知の値である。 $(m,m)$  節点を通る $\alpha$ -曲線と  $(n,n)$  節点を通る $\beta$ -曲線の交点である節点  $(m,n)$  の座標  $(r_{mn}, \theta_{mn})$  及び  $(\sigma_{mn}, \varphi_{mn})$  を求める。

#### [A] 第1次近似法

いま $\alpha$ -曲線に沿つて  $\Delta\theta = \theta_{mn} - \theta_{mm}$ ,  $\Delta r = r_{mn} - r_{mm}$ ,  $\Delta\sigma = \sigma_{mn} - \sigma_{mm}$ ,  $\Delta\varphi = \varphi_{mn} - \varphi_{mm}$  として、上り線の節点の座標  $r, \theta$  を求めるには、(2.4.19)式において第1次近似法として  $r = \frac{r_{mn} + r_{mm}}{2}$ ,  $\varphi = \varphi_{mm}$  として、上り線の節点の座標  $r_{mn}, \theta_{mn}$  を求める。この値を用いて  $\sigma_{mn}, \varphi_{mn}$  を求めるには

(2.4.21) 式において、

$$r = \frac{r_{mn} + r_{mm}}{2}, \quad \theta = \frac{\theta_{mn} + \theta_{mm}}{2}, \quad \varphi \doteq \varphi_{mm},$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{mn} + \sigma_{mm}}{2} \quad \text{とする。}$$

また  $\beta$ -曲線に沿って  $\Delta\theta = \theta_{mn} - \theta_{nn}$ ,  $\Delta r = r_{mn} - r_{nn}$ ,  $\Delta\sigma = \sigma_{mn} - \sigma_{nn}$ ,  $\Delta\varphi = \varphi_{mn} - \varphi_{nn}$  として、上り線の節点の座標  $r, \theta$  を求めるときに (2.4.20) 式において第1次近似法として  $r = \frac{r_{mn} + r_{nn}}{2}$ ,  $\varphi \doteq \varphi_{nn}$  として、上り線の節点の座標  $(r_{mn}, \theta_{mn})$  を求める。この値を用いて  $\sigma_{mn}, \varphi_{mn}$  を求めるときには (2.4.22) 式において、

$$r = \frac{r_{mn} + r_{nn}}{2}, \quad \theta = \frac{\theta_{mn} + \theta_{nn}}{2}, \quad \varphi \doteq \varphi_{nn}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{mn} + \sigma_{nn}}{2}$$

とする。

① 上り線上の節点の座標の求め方：—

(2.4.19) 式より、

$$\frac{r_{mn} + r_{mm}}{2} (\theta_{mn} - \theta_{mm}) = (r_{mn} - r_{mm}) \tan \left\{ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \varphi_{mm} \right\} \quad (2.4.23)$$

(2.4.20) 式より、

$$\frac{r_{mn} + r_{nn}}{2} (\theta_{mn} - \theta_{nn}) = (r_{mn} - r_{nn}) \tan \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \varphi_{nn} \right\} \quad (2.4.24)$$

(2.4.23) 式及び (2.4.24) 式より  $r_{mn}$  及び  $\theta_{mn}$  を求めれば次式となる。

$$\theta_{mn} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (2.4.25)$$

上式における符号は、(2.4.25) 式によつて求められる  $\theta_{mn}$  の値が  $\theta_{mm}$  または  $\theta_{nn}$  に近い値をとるように符号中の何れかをとる。

$$r_{mn} = \frac{(G_2 - G_1)\theta_{mn} + (H_2 - H_1)}{F_1 - F_2} \quad (2.4.26)$$

上式の  $\theta_{mn}$  の値としては (2.4.25) 式より求められる値を用いる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -\frac{\theta_{mm}}{2} + \tan \left\{ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \varphi_{mm} \right\}, & G_1 &= -\frac{r_{mm}}{2} \\ F_2 &= -\frac{\theta_{nn}}{2} + \tan \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \varphi_{nn} \right\}, & G_2 &= -\frac{r_{nn}}{2} \\ H_1 &= r_{mm} \left[ -\frac{\theta_{mm}}{2} - \tan \left\{ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \varphi_{mm} \right\} \right] \\ H_2 &= r_{nn} \left[ -\frac{\theta_{nn}}{2} - \tan \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \varphi_{nn} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.4.27)$$



及び

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}(G_2 - G_1)^2 \\ B &= (F_1 G_2 - F_2 G_1)(G_2 - G_1) - \frac{1}{2}(G_2 - G_1)(H_2 - H_1) \\ C &= (F_1 G_2 - F_2 G_1)(H_2 - H_1) + (H_1 G_2 - H_2 G_1)(F_1 - F_2) \end{aligned} \right\} \dots (2.4.28)$$

とする。

(ii) ヒリ線上の節点の  $\sigma, \varphi$  の求め方: —

(2.4.21) 式より,

$$\begin{aligned} & \cos^2 \rho (\sigma_{mn} - \sigma_{mm}) + \frac{\tau_{mn} + \sigma_{mn}}{2} \sin 2\rho (\varphi_{mn} - \varphi_{mm}) \\ & + \left\{ (\sigma_{mm} + \sigma_{mn}) \sin \rho \sin 2\varphi_{mm} + w \frac{\tau_{mn} + \tau_{nn}}{2} \left\{ \sin \frac{\theta_{mn} + \theta_{nn}}{2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sin \rho \sin \left( 2\varphi_{mm} + \frac{\theta_{mn} + \theta_{nn}}{2} \right) \right\} \right\} (\theta_{mn} - \theta_{mm}) \\ & - \left\{ \frac{2(\sigma_{mm} + \sigma_{mn}) \sin \rho}{\tau_{mm} + \tau_{nn}} (\sin \rho - \cos 2\varphi_{mm}) + w \left\{ \cos \frac{\theta_{mn} + \theta_{nn}}{2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin \rho \cos \left( 2\varphi_{mm} + \frac{\theta_{mn} + \theta_{nn}}{2} \right) \right\} \right\} (\tau_{mn} - \tau_{mm}) = 0 \dots (2.4.29) \end{aligned}$$

また (2.4.22) 式より,

$$\begin{aligned} & \cos^2 \rho (\sigma_{nn} - \sigma_{nn}) - \frac{\tau_{nn} + \sigma_{nn}}{2} \sin 2\rho (\varphi_{nn} - \varphi_{nn}) \\ & + \left\{ (\sigma_{nn} + \sigma_{nn}) \sin \rho \sin 2\varphi_{nn} + w \frac{\tau_{nn} + \tau_{nn}}{2} \left\{ \sin \frac{\theta_{nn} + \theta_{nn}}{2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sin \rho \sin \left( 2\varphi_{nn} + \frac{\theta_{nn} + \theta_{nn}}{2} \right) \right\} \right\} (\theta_{nn} - \theta_{nn}) \\ & - \left\{ \frac{2(\sigma_{nn} + \sigma_{nn}) \sin \rho}{\tau_{nn} + \tau_{nn}} (\sin \rho - \cos 2\varphi_{nn}) + w \left\{ \cos \frac{\theta_{nn} + \theta_{nn}}{2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin \rho \cos \left( 2\varphi_{nn} + \frac{\theta_{nn} + \theta_{nn}}{2} \right) \right\} \right\} (\tau_{nn} - \tau_{nn}) = 0 \dots (2.4.30) \end{aligned}$$

(2.4.25) 式より求められる  $\theta_{mn}$  及び (2.4.26) 式より求められる  $\tau_{mn}$  の値を用いて (2.4.29) 式及び (2.4.30) 式より  $\sigma_{mn}$  及び  $\varphi_{mn}$  を求めれば次式となる。

$$\varphi_{mn} = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D} \dots (2.4.31)$$

上式における複号は (2.4.31) 式によって求められる  $\varphi_{mn}$  の値が  $\varphi_{mm}$  または  $\varphi_{nn}$  に近い値をとるように複号中の短れかをとるものとする。

$$\sigma_{mn} = \frac{(R_2 Q_1 - R_1 Q_2) \varphi_{mn} + S_2 Q_1 - S_1 Q_2}{P_1 Q_1 - P_2 Q_2} \dots (2.4.32)$$

上式の  $\varphi_{mn}$  の値としては (2.4.31) 式によって求められる値をとる。ただし,

$$P_1 = \cos^2 \rho - \frac{\sin 2\rho}{2} \varphi_{mm} + \sin \rho \sin 2\varphi_{mm} (\theta_{mn} - \theta_{mm})$$

$$- \frac{2 \sin \rho}{r_{mm} + r_{mn}} (\sin \rho - \cos 2\varphi_{mm}) (r_{mn} - r_{mm})$$

$$Q_1 = \frac{\sin 2\rho}{2}$$

$$R_1 = \frac{1}{2} \sigma_{mm} \sin 2\rho$$

$$S_1 = -\sigma_{mm} \cos^2 \rho - \frac{\sigma_{mm} \varphi_{mm}}{2} \sin 2\rho + \left[ \sigma_{mm} \sin \rho \sin 2\varphi_{mm} \right.$$

$$+ w \frac{r_{mm} + r_{mn}}{2} \left\{ \sin \frac{\theta_{mm} + \theta_{mn}}{2} + \sin \rho \sin \left( 2\varphi_{mm} + \frac{\theta_{mm} + \theta_{mn}}{2} \right) \right\} \times$$

$$(\theta_{mn} - \theta_{mm}) - \left[ \frac{2\sigma_{mm} \sin \rho}{r_{mm} + r_{mn}} (\sin \rho - \cos 2\varphi_{mm}) + w \left\{ \cos \frac{\theta_{mm} + \theta_{mn}}{2} \right. \right.$$

$$\left. - \sin \rho \cos \left( 2\varphi_{mm} + \frac{\theta_{mm} + \theta_{mn}}{2} \right) \right\} (r_{mn} - r_{mm})$$

$$P_2 = \cos^2 \rho + \frac{\sin 2\rho}{2} \varphi_{nn} + \sin \rho \sin 2\varphi_{nn} (\theta_{mn} - \theta_{nn})$$

$$- \frac{2 \sin \rho}{r_{nn} + r_{mn}} (\sin \rho - \cos 2\varphi_{nn}) (r_{mn} - r_{nn})$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2} \sin 2\rho$$

$$R_2 = -\frac{1}{2} \sigma_{nn} \sin 2\rho$$

$$S_2 = -\sigma_{nn} \cos^2 \rho + \frac{\sigma_{nn} \varphi_{nn}}{2} \sin 2\rho + \left[ \sigma_{nn} \sin \rho \sin 2\varphi_{nn} \right.$$

$$+ w \frac{r_{nn} + r_{mn}}{2} \left\{ \sin \frac{\theta_{nn} + \theta_{mn}}{2} + \sin \rho \sin (2\varphi_{nn} \right.$$

$$\left. + \frac{\theta_{nn} + \theta_{mn}}{2} \right\} (\theta_{mn} - \theta_{nn}) - \left[ \frac{2\sigma_{nn} \sin \rho}{r_{nn} + r_{mn}} (\sin \rho - \cos 2\varphi_{nn}) \right.$$

$$\left. + w \left\{ \cos \frac{\theta_{nn} + \theta_{mn}}{2} - \sin \rho \cos \left( 2\varphi_{nn} + \frac{\theta_{nn} + \theta_{mn}}{2} \right) \right\} (r_{mn} - r_{nn}) \right]$$

(2.4.33)

и

$$D = (Q_1 R_2 - Q_2 R_1)^2$$

$$E = (P_1 R_2 - P_2 R_1)(R_2 Q_1 - R_1 Q_2) + (Q_1 R_2 - Q_2 R_1)(S_2 Q_1 - S_1 Q_2)$$

$$F = (P_1 R_2 - P_2 R_1)(S_2 Q_1 - S_1 Q_2) + (P_1 Q_2 - P_2 Q_1)(S_1 R_2 - S_2 R_1)$$

(2.4.34)

とする。トンネル円孔周縁上においては、 $r_{mn} = r_{nn} = r_0$  及び  $\varphi_{mn} = \varphi_{nn} = \frac{\pi}{2}$  となるゆえに  $G_1 = G_2 = G$  となり、(2.4.23) 式及び (2.4.24) 式よりそれぞれ

$$(F_1 - \frac{1}{2} \theta_{mn}) r_{mn} + G \theta_{mn} + H_1 = 0$$

$$(F_2 - \frac{1}{2} \theta_{mn}) r_{mn} + G \theta_{mn} + H_2 = 0$$

より  $r_{mn}$  及び  $\theta_{mn}$  を求めれば、

$$r_{mn} = \frac{H_2 - H_1}{F_1 - F_2} \quad (2.4.25)$$

$$\theta_{mn} = \frac{2(F_1 H_2 - F_2 H_1)}{(H_2 - H_1) - 2G(F_1 - F_2)} \quad (2.4.26)$$

となる。

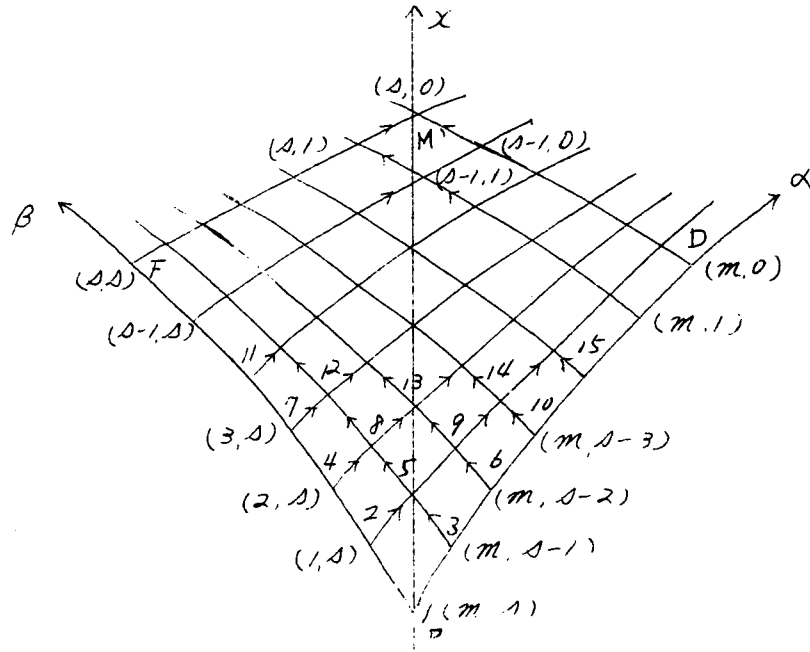
### (B) 第2次近似法

(2.4.23) 式及び (2.4.24) 式を用いて上り線上の節点の座標  $r_{mn}$ ,  $\theta_{mn}$  を求めるとき、第1次近似法で求めた (2.4.21) 式の  $\varphi_{mn}$  の値を用いて  $\varphi_{mn}$  の代りに  $\frac{\varphi_{mn} + \varphi_{nn}}{2}$ ,  $\varphi_{nn}$  の代りに  $\frac{\varphi_{nn} + \varphi_{nn}}{2}$  とする。この値を (2.4.27) 式に代入し、(2.4.28) 式を用いて (2.4.25) 式及び (2.4.26) 式によってそれぞれ  $\theta_{mn}$  と  $r_{mn}$  とを求める。

このようにして求められた  $\theta_{mn}$  及び  $r_{mn}$  を (2.4.29) 式及び (2.4.30) 式に用いて、また (2.4.21) 式の  $\varphi_{mn}$  の値をも用いて、 $\varphi_{mn}$  の代りに  $\frac{\varphi_{mn} + \varphi_{nn}}{2}$ ,  $\varphi_{nn}$  の代りに  $\frac{\varphi_{nn} + \varphi_{nn}}{2}$  をとって、第2次近似法によってえられた  $r_{mn}$ ,  $\theta_{mn}$  の値を用いて (2.4.23) 式を計算し、(2.4.24) 式の値を用いて (2.4.21) 式及び (2.4.32) 式によってそれぞれ  $\varphi_{mn}$ ,  $\varphi_{nn}$  を求める。このような方法を繰返す程  $r_{mn}$ ,  $\theta_{mn}$ ,  $\varphi_{mn}$ ,  $\varphi_{nn}$  の値の精度が高くなる。

またトンネル円孔より遠ざかる程上り線によってできる網目が粗になるゆえに、網目を密にして計算を行うと精度があがる。以上のように第2.19図において境界上上の  $(m, m)$ ,  $(n, n)$  の節点より  $(m, n)$  の節点の値を求め、 $(0, 0)$  と  $(1, 1)$  の節点より  $(1, 0)$  の節点の値を、 $(1, 1)$  と  $(2, 2)$  節点より  $(2, 1)$  の節点の値を、……、 $(1, 0)$  と  $(2, 1)$  の節点より  $(2, 0)$  の節点の値を、……逐次に段階的に求めて  $AB$   $C$  内の領域の中の全部の節点の値が求められるのである。

円形トンネルの周縁全部が塑性流動を起す場合は第2.18図の場合であつて、上り線  $ABD$ ,  $ACD$  上の節点の座標  $r$ ,  $\theta$  及び  $\varphi$  の値が求められる。例えば  $BD$  曲線上のものか計算できれば、 $BF$  曲線は  $x$  軸に關し  $BD$  曲線と対称なる故に  $BF$  曲線上の座標はすぐ求められる。 $BF$  曲線上の  $\theta$  の値は  $BD$  曲線上の  $\theta$  と同一であり、 $BF$  曲線上の  $\varphi$  の値は  $BD$  曲線上の  $\varphi$  の符号を反対にした値をとる。このようにして  $BD$ ,  $BF$  曲線上の値が決定できれば、これより外方の領域の中の節点の  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  の求め方はつぎのようになる。すなわち第2.20図に示すように  $BD$ ,  $BF$  曲線上の節点の番号をきめる。 $BD$  曲線を  $x$ -座標軸としてその上に  $1(m, s)$ ,  $2(m, s-1)$ ,  $3(m, s-2)$ ,  $4(m, s-3)$ , ……  $(m, 1)$ ,  $(m, 0)$  の節点を決定し、これらの点と  $x$  軸に關し対称な位置に  $1(m, s)$ ,  $2(1, s)$ ,  $4(2, s)$ ,  $7(3, s)$ , ……  $(s-1, s)$ ,  $(s, s)$  点を



第 2.20 図

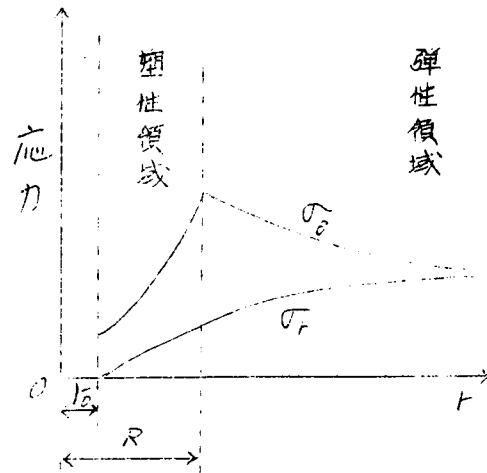
決定すると、これらの節点は BF 曲線上にあり BF 曲線を  $\beta$ -座標軸とする。これらの節点上の  $\theta, \sigma, \varphi$  は已知である。各節点の  $\theta, \sigma, \varphi$  の値に関しては、2点、3点の値より (2.4.26) 式、(2.4.25) 式、(2.4.32) 式、(2.4.31) 式によつて求められる。同様にして 4点、5点から 8点の値を、5点、6点から 9点の値を逐次求めて第 2.20 図の領域 BFM D の内の各節点の値が求められる。また第 2.18 図の C J F 曲線と C J D 曲線の外方の領域内の値も同様にして求めることができる。

X 軸上の節点においては  $\theta = 0$  で  $\tau = 0$  となるから、(2.4.2) 式より  $\sigma \sin \varphi \sin 2\varphi = 0$  となり  $\sigma_0 > \sigma_f$  であるから  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  となることによつて各節点の値を定めることができる。

また第 2.20 図の BMD の領域の中の節点の  $\theta, \sigma, \varphi$  を次のようにして定めることができる。2点、3点より 5点の値を求め、5点、6点より 9点の値を求め、X 軸にあり 9点と対称な 8点の値はすぐに決定でき、9点、9点より 13点の値が求められる。以下同様にして BMD の領域中の節点の値が求まれば、領域 BMF は X 軸にあり領域 BMD と対称なることよりただちに求めることができる。このようにしてトンネル周囲の塑性流動領域の  $\theta, \sigma, \varphi$  の値が求まれば (2.4.2) 式によつて応力が求められるのである。

#### 第 4 節 トンネル円孔周辺の弾塑性変換

円形立て坑が軟弱な地山中に掘削されたとき、かなり深い地点において立て坑の周辺近傍が塑性状態になり、その外方が弾性状態になっているときの円形立て坑の周辺の弾塑性応力分布の問題は数多く研究され、K. Terzaghi<sup>(41)</sup>、R. Fenner<sup>(42)</sup> 及び伊藤博士<sup>(43)</sup>、川本氏<sup>(44)</sup>、H. W. Westergaard<sup>(45)</sup> 等によつて研究発表されている。

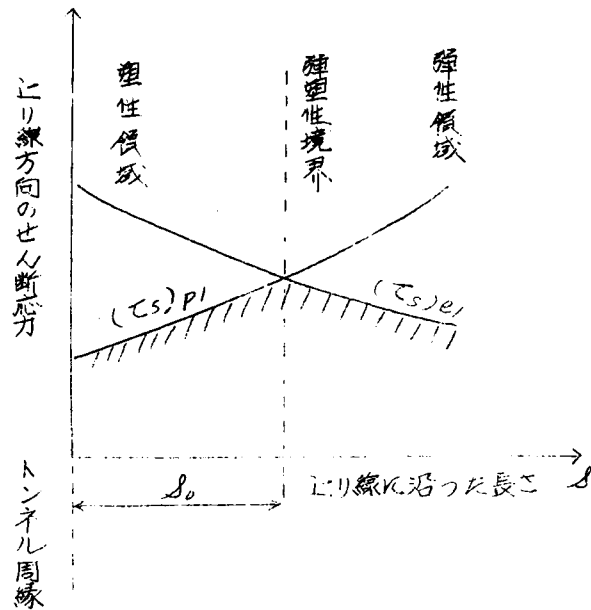


第2.2/四

いづれも第2.2/四に示すように立て坑半径を $r_0$ とし、トンネル中心よりの距離を $r$ とすれば、接線方向直応力 $\sigma_\theta$ 、半径方向直応力 $\sigma_r$ は塑性領域においてはトンネル中心より外方に行くに従って増大している、弾塑性境界においてはその内側の塑性領域の $\sigma_\theta$ の計算式より求めた値と、外側の弾性領域の $\sigma_\theta$ の計算式より求めた値とは等しく、また $\sigma_r$ についても塑性領域の式より求めたものと、弾性領域について求めたものとは等しくなっている。そして弾性領域の $\sigma_\theta$ はトンネル外方に向うに従い次第に減少し、 $\sigma_r$ は次第にまし、無限遠の外方では、 $\sigma_\theta = \sigma_r =$ 自然地盤の水平方向応力となつてゐる。そうして地山荷重と円形立て坑半径の大きさ、地山のせん断抵抗力に応じて弾塑性境界が立て坑の周りに円形に存在することが証明されている。

この事柄より粘性土地山中のトンネル周辺においても、トンネル周辺直傍が塑性状態にあるならば、そのトンネルを取り囲む弾塑性境界が存在し、応力分布も上記の立て坑の場合と類似した応力分布が発生するものと考えられる。これに関して定性的には Karl F. G. Keil<sup>(6)</sup> 及び K. Terzaghi<sup>(7)</sup> も論じており、また平松博士、岡氏<sup>(8)</sup> は弾塑性境界の大きさを求める理論式及び応力分布の理論式を求めておられるが、これは地山の自然状態の応力が鉛直方向、水平方向とも等しく物体力の影響は考えられなくならず、結局立て坑の場合と似た考えで導かれたものである。トンネルの場合のように重力の物体力の作用したときのトンネル周辺の弾塑性問題については未だ研究がされていない。

前節に述べた理論によつてトンネル周辺の地山が弾塑性状態にあるときの応力分布について計算できるが、この応力分布が弾塑性境界において、その外方の弾性領域の応力分布に如何様に接続するののかの問題はその数学的取扱ひが非常に困難である。そこで弾塑性境界の形、大きさを決定するには次のことを仮定して求めることとする。すなわち材料の破壊は応力の deviator に関連するから、この場合はより線方向のせん断応力が問題となるという考えより、塑性領域内においてより線に沿つてより線方向のせん断応力 $(\tau_s)_p$ の値を求め、また弾性体とみなされる円形トンネル周辺の応力をもとめる理論式よりより線方向のせん断応力 $(\tau_s)_e$ をより線に沿つて求める。これらを第2.22図のように書いて $(\tau_s)_p$ 曲線と $(\tau_s)_e$ 曲線との交点が弾塑性境界の曲線の上の点であるとする。



第 2.22 図

即ち  $(\tau_s)_{p1} < (\tau_s)_{e1}$  の場合は塑性流動領域であり、 $(\tau_s)_{p1} > (\tau_s)_{e1}$  の場合は弾性領域であるとするのである。最大主応力方向とトンネルは  $\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$  の角をなすことより第 2.15 図の Mohr 応力円を参考にして、

$$\tau_s = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \rho\right)$$

及び

$$\frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \cos 2\varphi$$

とより

$$\tau_s = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2 \cos 2\varphi} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \rho\right) \quad (2.437)$$

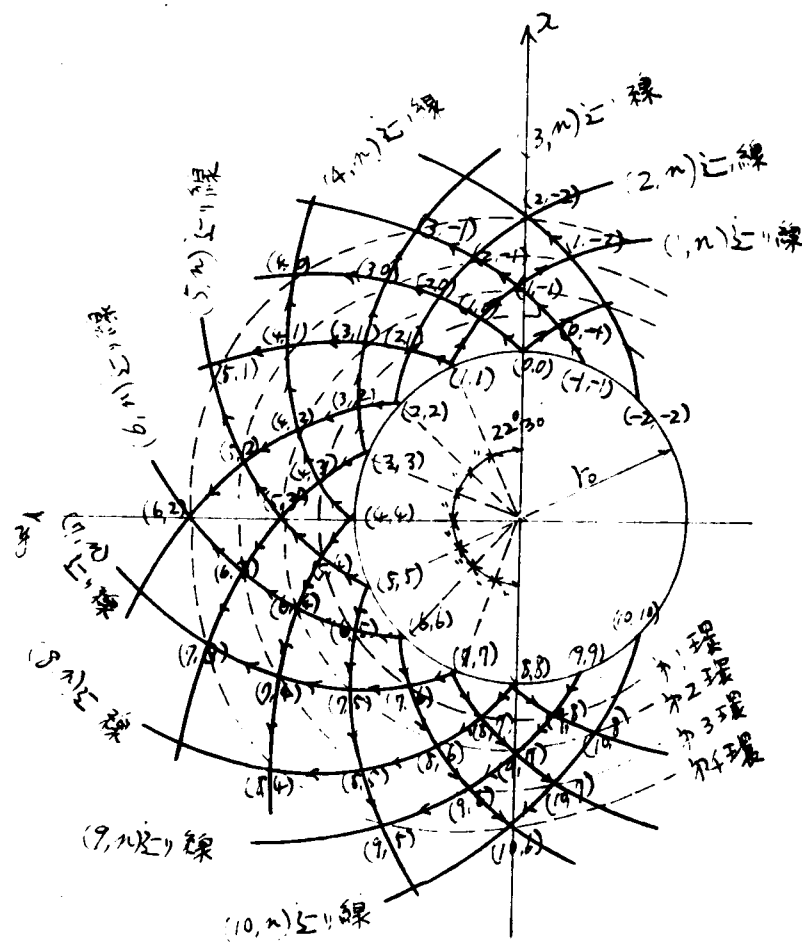
として  $\tau_s$  が求められ、塑性領域に対するものは (2.437) 式の  $\sigma_r, \sigma_\theta$  を (2.436) 式に代入して  $(\tau_s)_{p1}$  を求めることができる。また  $(\tau_s)_{e1}$  を求めるときに  $\sigma_r, \sigma_\theta$  の値としては (2.442) 式によって求めたものを (2.437) 式に代入して計算することができる。  $(\tau_s)_{p1} = (\tau_s)_{e1}$  となる点が弾塑性境界の曲線上の点とみなすことができるが、これに関してつぎの計算例によって考察することとする。

計算例：——

地表面よりトンネル中心までの深さ  $H = 10\text{m}$ 、円形トンネルの半径  $r_0 = 3\text{m}$ 、地山の単位容積重量  $w = 2.5 \text{ t/m}^3$ 、地山の内部摩擦角  $\rho = 33^\circ 50'$ 、地山の粘着力  $c \tan \rho = 0.3, 5 \text{ kg/cm}^2$  とすれば  $c = 0.560 \text{ kg/cm}^2$ 、地山は粘性土地山としたときポアッサン数  $\mu = 2$  とする。

トンネル円周上において第 2.22 図に示すように節点 (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8) をとり、 $\theta$  の値としてそれぞれ  $22^\circ 30'$ ,

$45^\circ, 67^\circ30', 90^\circ, 112^\circ30', 135^\circ, 157^\circ30', 180^\circ$  として、この節点上の  $r, \theta, \varphi$  の値より近似逐次法によつてトンネル円孔外周の節点の  $r, \theta, \varphi$  の値を前節の理論に従つて求める。トンネル円孔外周のより線の交点上の節点の番号を第2.23図のように定める。第1環上の節点を  $(1,0), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (6,5), (7,6), (8,7)$  とする。第2環上の節点を  $(1,-1), (2,0), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4), (7,5), (8,6), (9,7)$  とする。第3環上の節点を  $(2,-1), (3,0), (4,1), (5,2), (6,3), (7,4), (8,5), (9,6)$  とする。第4環上の節点を  $(2,-2), (3,-1), (4,0), (5,1), (6,2), (7,3), (8,4), (9,5), (10,6)$  とする。またより線の名称は、たとえば  $(2,2)$  の節点を通り  $(2,1), (2,0), (2,-1), (2,-2), \dots$  を通るものを、 $(2,n)$  より線と称することとする。



才2.23図

トンネル円孔上に おいてはすべての節点上で

$$r = r_0 = 3m, \quad \sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = 1.407 \text{ kg/cm}^2, \quad \tau = 0.$$

となる。節点  $(m, n)$  上の  $r, \theta, \sigma, \varphi$  をそれぞれ  $r_{m,n}, \theta_{m,n}, \sigma_{m,n}, \varphi_{m,n}$  とする。近似逐次法の計算の順序は第2.23図の矢印に示すように進め、トンネル円周より第1環、第2環、第3環、……と外方に向けて計算を進める。その計算値について表-2.5及び表-2.6に示す。

表-2.5 (2.4.25)式より(2.4.28)式までの計算,  $(r, \theta)$  の値

環 号	節 点	$r_{m,n}$ (cm)	$r_{m,n}$ (mm)	$\theta_{m,n}$ (°)	$\theta_{m,n}$ (°)	$\varphi_{m,n}$ (°)	$\varphi_{m,n}$ (°)	$\sigma_{m,n}$ kg/cm <sup>2</sup>	$\sigma_{m,n}$ kg/cm <sup>2</sup>	$H_1$	$H_2$	$F_1$	$F_2$	$G_1$	$G_2$	A	B	C	$r_{m,n}$ (mm)	$\theta_{m,n}$ (°)	備考
第1環	(1.0)	$r_{10}$ 300	$r_{11}$ 300	$\theta_{10}$ 0	$\theta_{11}$ 22.5	$\varphi_{10}$ 90	$\varphi_{11}$ 90	$\sigma_{10}$ 126.3	$\sigma_{11}$ 126.3	621.3	-562.2	-1877	1877	-150	-150				$r_{10}$ 300	$\theta_{10}$ 0	
	(2.1)	$r_{21}$ 310	$r_{22}$ 300	$\theta_{21}$ 22.5	$\theta_{22}$ 45	$\varphi_{21}$ 90	$\varphi_{22}$ 90	$\sigma_{21}$ 126.3	$\sigma_{22}$ 126.3	680.1	-503.1	-1481	2071	-150	-150				$r_{21}$ 300	$\theta_{21}$ 22.5	
	(3.2)	$r_{32}$ 300	$r_{33}$ 300	$\theta_{32}$ 45	$\theta_{33}$ 67.5	$\varphi_{32}$ 90	$\varphi_{33}$ 90	$\sigma_{32}$ 126.3	$\sigma_{33}$ 126.3	738.9	-444.3	-728.5	2267	-150	-150				$r_{32}$ 300	$\theta_{32}$ 45	
	(4.3)	$r_{43}$ 300	$r_{44}$ 300	$\theta_{43}$ 67.5	$\theta_{44}$ 90	$\varphi_{43}$ 90	$\varphi_{44}$ 90	$\sigma_{43}$ 126.3	$\sigma_{44}$ 126.3	798.0	-385.5	-108.8	2463	-150	-150				$r_{43}$ 300	$\theta_{43}$ 67.5	
	(5.4)	$r_{54}$ 300	$r_{55}$ 300	$\theta_{54}$ 90	$\theta_{55}$ 112.5	$\varphi_{54}$ 90	$\varphi_{55}$ 90	$\sigma_{54}$ 126.3	$\sigma_{55}$ 126.3	856.8	-326.8	-289.0	2660	-150	-150				$r_{54}$ 300	$\theta_{54}$ 90	
第2環	(6.5)	$r_{65}$ 300	$r_{66}$ 300	$\theta_{65}$ 112.5	$\theta_{66}$ 135	$\varphi_{65}$ 90	$\varphi_{66}$ 90	$\sigma_{65}$ 126.3	$\sigma_{66}$ 126.3	915.6	-267.6	-696.6	2856	-150	-150				$r_{65}$ 300	$\theta_{65}$ 112.5	
	(7.6)	$r_{76}$ 300	$r_{77}$ 300	$\theta_{76}$ 135	$\theta_{77}$ 157.5	$\varphi_{76}$ 90	$\varphi_{77}$ 90	$\sigma_{76}$ 126.3	$\sigma_{77}$ 126.3	974.7	-208.7	-1099.0	3052	-150	-150				$r_{76}$ 300	$\theta_{76}$ 135	
	(8.7)	$r_{87}$ 300	$r_{88}$ 300	$\theta_{87}$ 157.5	$\theta_{88}$ 180	$\varphi_{87}$ 90	$\varphi_{88}$ 90	$\sigma_{87}$ 126.3	$\sigma_{88}$ 126.3	1033.5	-149.7	-1302.0	3249	-150	-150				$r_{87}$ 300	$\theta_{87}$ 157.5	
	(1-1)	$r_{1-1}$ 333.3	$r_{10}$ 333.3	$\theta_{1-1}$ -112.5	$\theta_{10}$ -112.5	$\varphi_{1-1}$ 90	$\varphi_{10}$ 90	$\sigma_{1-1}$ 126.3	$\sigma_{10}$ 126.3	645.6	-645.6	-1739	1739	-1667	-1667				$r_{1-1}$ 333.3	$\theta_{1-1}$ -112.5	
	(2.0)	$r_{20}$ 333.3	$r_{21}$ 333.3	$\theta_{20}$ -90	$\theta_{21}$ -67.5	$\varphi_{20}$ 90	$\varphi_{21}$ 90	$\sigma_{20}$ 126.3	$\sigma_{21}$ 126.3	685.5	-603.9	-1468	2010	-1667	-1667				$r_{20}$ 333.3	$\theta_{20}$ -90	
第3環	(3.1)	$r_{31}$ 333.3	$r_{32}$ 333.3	$\theta_{31}$ -67.5	$\theta_{32}$ -45	$\varphi_{31}$ 90	$\varphi_{32}$ 90	$\sigma_{31}$ 126.3	$\sigma_{32}$ 126.3	731.8	-546.6	-1215	2291	-1665	-1665				$r_{31}$ 333.3	$\theta_{31}$ -67.5	
	(4.2)	$r_{42}$ 333.3	$r_{43}$ 333.3	$\theta_{42}$ -45	$\theta_{43}$ -22.5	$\varphi_{42}$ 90	$\varphi_{43}$ 90	$\sigma_{42}$ 126.3	$\sigma_{43}$ 126.3	784.9	-488.0	-1041	2587	-1665	-1665				$r_{42}$ 333.3	$\theta_{42}$ -45	
	(5.3)	$r_{53}$ 333.3	$r_{54}$ 333.3	$\theta_{53}$ -22.5	$\theta_{54}$ 0	$\varphi_{53}$ 90	$\varphi_{54}$ 90	$\sigma_{53}$ 126.3	$\sigma_{54}$ 126.3	868.9	-430.0	-837	2726	-1667	-1667				$r_{53}$ 333.3	$\theta_{53}$ -22.5	
	(6.4)	$r_{64}$ 333.3	$r_{65}$ 333.3	$\theta_{64}$ 0	$\theta_{65}$ 22.5	$\varphi_{64}$ 90	$\varphi_{65}$ 90	$\sigma_{64}$ 126.3	$\sigma_{65}$ 126.3	923.0	-372.0	-611	2934	-1667	-1667				$r_{64}$ 333.3	$\theta_{64}$ 0	
	(7.5)	$r_{75}$ 333.3	$r_{76}$ 333.3	$\theta_{75}$ 22.5	$\theta_{76}$ 45	$\varphi_{75}$ 90	$\varphi_{76}$ 90	$\sigma_{75}$ 126.3	$\sigma_{76}$ 126.3	984.2	-313.4	-409	3170	-1667	-1667				$r_{75}$ 333.3	$\theta_{75}$ 22.5	
第4環	(8.6)	$r_{86}$ 333.3	$r_{87}$ 333.3	$\theta_{86}$ 45	$\theta_{87}$ 67.5	$\varphi_{86}$ 90	$\varphi_{87}$ 90	$\sigma_{86}$ 126.3	$\sigma_{87}$ 126.3	1044.6	-254.6	-370	3270	-1667	-1667				$r_{86}$ 333.3	$\theta_{86}$ 45	
	(9.7)	$r_{97}$ 333.3	$r_{98}$ 333.3	$\theta_{97}$ 67.5	$\theta_{98}$ 90	$\varphi_{97}$ 90	$\varphi_{98}$ 90	$\sigma_{97}$ 126.3	$\sigma_{98}$ 126.3	1104.2	-195.2	-236	3379	-1666	-1666				$r_{97}$ 333.3	$\theta_{97}$ 67.5	
	(2-1)	$r_{2-1}$ 371.2	$r_{20}$ 371.2	$\theta_{2-1}$ -45	$\theta_{20}$ -22.5	$\varphi_{2-1}$ 90	$\varphi_{20}$ 90	$\sigma_{2-1}$ 126.3	$\sigma_{20}$ 126.3	759.6	-695.6	-1687	1874	-1854	-1854				$r_{2-1}$ 371.2	$\theta_{2-1}$ -45	
	(3.0)	$r_{30}$ 370.7	$r_{31}$ 370.7	$\theta_{30}$ -22.5	$\theta_{31}$ 0	$\varphi_{30}$ 90	$\varphi_{31}$ 90	$\sigma_{30}$ 126.3	$\sigma_{31}$ 126.3	766.2	-636.2	-767	2102	-1853	-1853				$r_{30}$ 370.7	$\theta_{30}$ -22.5	
	(4.1)	$r_{41}$ 370.3	$r_{42}$ 370.3	$\theta_{41}$ 0	$\theta_{42}$ 22.5	$\varphi_{41}$ 90	$\varphi_{42}$ 90	$\sigma_{41}$ 126.3	$\sigma_{42}$ 126.3	840.4	-578.0	-1097	2525	-1857	-1857				$r_{41}$ 370.3	$\theta_{41}$ 0	
第5環	(5.2)	$r_{52}$ 371.3	$r_{53}$ 371.3	$\theta_{52}$ 22.5	$\theta_{53}$ 45	$\varphi_{52}$ 90	$\varphi_{53}$ 90	$\sigma_{52}$ 126.3	$\sigma_{53}$ 126.3	922.3	-519.5	-1069	2684	-1857	-1857				$r_{52}$ 371.3	$\theta_{52}$ 22.5	
	(6.3)	$r_{63}$ 370.1	$r_{64}$ 370.1	$\theta_{63}$ 45	$\theta_{64}$ 67.5	$\varphi_{63}$ 90	$\varphi_{64}$ 90	$\sigma_{63}$ 126.3	$\sigma_{64}$ 126.3	972.6	-460.3	-846	2680	-1850	-1850				$r_{63}$ 370.1	$\theta_{63}$ 45	



観測番号	節点	$r_{1n}$ (cm)	$r_{2n}$ (cm)	$\theta_{1n}$ (°)	$\theta_{2n}$ (°)	$\varphi_{1n}$ (°)	$\varphi_{2n}$ (°)	$\sigma_{1n}$ (%)	$\sigma_{2n}$ (%)	$H_1$	$H_2$	$F_1$	$F_2$	$G_1$	$G_2$	$A$	$B$	$C$	$r_{1n}$ (cm)	$\theta_{1n}$ (°)	備考
第3環	(0.4)	164 369.9	175 369.9	0.64 113.64	0.75 135.95	4.64 93.32	4.75 93.32	1.73 17.30	1.75 17.37	106.22	43.49	-0.504	3.159	-1.448	-1.448				174 408.7	0.74 126.03	
	(0.5)	175 369.1	186 369.0	0.75 135.95	0.86 157.84	4.75 93.32	4.86 93.90	1.75 17.37	1.86 15.91	109.93	33.33	-0.223	0.227	-1.445	-1.445				185 409.3	0.85 146.36	
	(0.6)	186 369.0	197 369.4	0.86 157.84	0.97 180	4.86 93.90	4.97 90.29	1.86 15.91	1.97 15.36	124.48	31.33	-0.280	0.605	-1.445	-1.445				196 406.2	0.96 170.09	
第4環	(2.2)	171 413.3	172 420.3	0.12 115.1	0.21 115.1	4.12 90.17	4.21 89.83	1.71 17.94	1.72 17.94	82.16	32.16	-1.786	1.786	-2.067	-2.067				172 460.0	0.22 0	
	(3.1)	171 413.3	173 414.5	0.21 115.1	0.30 135.8	4.21 89.83	4.30 89.89	1.71 17.94	1.73 18.65	907.8	727.4	-1.576	1.962	-2.073	-2.067	-0.18	930.0	-3.81	173 462.1	0.31 23.89	
	(4.0)	173 414.5	174 425.9	0.30 135.8	0.41 157.47	4.30 89.89	4.41 90.88	1.73 18.65	1.74 19.04	944.5	645.8	-1.289	2.172	-2.070	-2.073	-9.25	646.4	1.52	174 460.5	0.40 46.46	
	(5.1)	174 425.9	175 427.1	0.41 157.47	0.52 179.12	4.41 90.88	4.52 90.8	1.74 19.04	1.75 20.95	1044.2											
	(6.2)	175 427.1	176 447.3	0.52 179.12	0.63 192.3	4.52 90.8	4.63 91.26	1.75 20.95	1.76 22.85	1114.6	481.6	-0.885	2.565	-2.087	-2.076	-13.0	711.94	1.24	176 460.2	0.62 92.28	
	(7.3)	176 447.3	177 448.7	0.63 192.3	0.74 120.53	4.63 91.26	4.74 90.97	1.76 22.85	1.77 21.97	1181.2	452.8	-0.700	2.87	-2.044	-2.087	-9.25	657.3	1.370	177 461.1	0.73 113.32	
第5環	(8.4)	177 448.7	178 448.7	0.74 120.53	0.85 140.88	4.74 90.97	4.85 90.69	1.77 21.97	1.78 19.55	1275.8	348.6	-0.527	3.053	-2.047	-2.044	-0.45	463.5	-1.14	178 453.6	0.84 133.65	
	(9.5)	178 448.7	179 448.2	0.85 140.88	0.96 170.09	4.85 90.69	4.96 92.06	1.78 19.55	1.79 16.90	1302.7	259.6	-0.237	3.224	-2.031	-2.047	-1.28	237.5	6.22	179 452.7	0.95 15.89	
	(10.6)	179 448.2	180 440.2	0.96 170.09	1.07 199.91	4.96 92.06	5.07 87.94	1.79 16.90	1.80 16.90	1505.4	229.1	-0.32	3.574	-2.031	-2.031				180 441.8	1.06 1.07	

表-2.6 (2.4.31)式より(2.4.34)式までの計算。(σ,φ)の値

観測番号	節点	$P_1$	$Q_1$	$R_1$	$S_1$	$P_2$	$Q_2$	$R_2$	$S_2$	$D$	$E$	$R$	$\varphi_{1n}$ (°)	$\sigma_{1n}$ (%)	備考
第1環	(1.0)	-0.127	0.463	0.585	-2.044	1.327	-0.463	-0.585	-0.181	0	0		4.10 90.46	1.70 18.54	
	(2.1)	-0.127	0.463	0.585	-2.025	1.327	-0.463	-0.585	-0.121	0	0		4.21 91.49	1.797	
	(3.2)	-0.127	0.463	0.585	-2.018	1.327	-0.463	-0.585	-0.068	0	0		4.32 92.29	1.738	
	(4.3)	-0.127	0.463	0.585	-1.959	1.325	-0.463	-0.585	-0.022	0	0		4.43 91.95	1.654	
	(5.4)	-0.127	0.463	0.585	-1.923	1.327	-0.463	-0.585	0.013	0	0		4.54 92.06	1.582	
	(6.5)	-0.127	0.463	0.585	-1.878	1.327	-0.463	-0.585	0.073	0	0		4.65 92.52	1.504	
	(7.6)	-0.127	0.463	0.585	-1.811	1.327	-0.463	-0.585	0.089	0	0		4.76 91.43	1.425	
第2環	(8.7)	-0.127	0.463	0.585	-1.765	1.327	-0.463	-0.585	0.098	0	0		4.87 90.40	1.386	
	(1.1)	-0.127	0.463	0.585	-2.957	1.323	-0.463	-0.585	-0.263	0	0		4.11 90.0	1.701	
	(2.0)	-0.126	0.463	0.582	-2.853	1.328	-0.463	-0.585	-0.246	0	0.280	-0.040	4.20 90.34	1.763	
第3環	(3.1)	-0.126	0.463	0.583	-2.755	1.331	-0.463	-0.580	-0.137	0	0.028	-0.047	4.31 92.08	1.759	

要素 番号	節点	$P_1$	$Q_1$	$R_1$	$S_1$	$P_2$	$Q_2$	$R_2$	$S_2$	$D$	$E$	$F$	$\varphi_{mn}$ (°)	$\sigma_{mn}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	備 考
第 2 環	(4.2)	-0.138	0.463	0.764	-2.627	1335	-0.463	-0.803	-0.084	0	0.039	-0.063	$\varphi_{42}$ 92.52	$\sigma_{42}$ 2318	
	(5.3)	-0.135	0.463	0.726	-2.407	1331	-0.463	-0.765	-0.063	0	0.026	-0.041	$\varphi_{53}$ 90.34	$\sigma_{53}$ 2054	
	(6.4)	-0.138	0.463	0.696	-2.287	1336	-0.463	-0.736	0.041	0	0.035	-0.057	$\varphi_{64}$ 93.22	$\sigma_{64}$ 1930	
第 3 環	(7.5)	-0.130	0.463	0.664	-2.127	1339	-0.463	-0.696	0.054	0	0.026	-0.042	$\varphi_{75}$ 92.52	$\sigma_{75}$ 1757	
	(8.6)	-0.126	0.463	0.646	-1.994	1335	-0.463	-0.664	0.098	0	0.038	-0.023	$\varphi_{86}$ 93.90	$\sigma_{86}$ 1591	
	(9.7)	-0.124	0.463	0.646	-1.948	1329	-0.463	-0.646	0.097	0	0		$\varphi_{97}$ 90.29	$\sigma_{97}$ 1536	
第 4 環	(2.1)	-0.132	0.463	1.218	-4.168	1325	-0.463	-1.250	-0.308	0.00022	0.05218	-0.08244	$\varphi_{2-1}$ 89.83	$\sigma_{2-1}$ 3794	
	(3.0)	-0.145	0.463	1.138	-3.930	1323	-0.463	-1.218	-0.262	0.00137	0.12112	-0.19388	$\varphi_{3-0}$ 89.89	$\sigma_{3-0}$ 3665	
	(4.1)	-0.126	0.463	1.072	-3.607	1349	-0.463	-1.138	-0.085	0.00093	0.09202	-0.14902	$\varphi_{4-1}$ 90.86	$\sigma_{4-1}$ 3104	
	(5.2)	-0.121	0.463	0.950	-3.176	1348	-0.463	-1.072	-0.056	0.00324	0.15023	-0.24445	$\varphi_{5-2}$ 90.00	$\sigma_{5-2}$ 2775	
	(6.3)	-0.154	0.463	0.893	-2.983	1315	-0.463	-0.950	-0.018	0.00070	0.06380	-0.10281	$\varphi_{6-3}$ 91.26	$\sigma_{6-3}$ 2663	
	(7.4)	-0.136	0.463	0.813	-2.625	1345	-0.463	-0.893	0.096	0.00137	0.07938	-0.13069	$\varphi_{7-4}$ 90.87	$\sigma_{7-4}$ 2197	
	(8.5)	-0.144	0.463	0.736	-2.328	1338	-0.463	-0.813	0.115	0.00127	0.004746	-0.11046	$\varphi_{8-5}$ 90.69	$\sigma_{8-5}$ 1956	
第 5 環	(9.6)	-0.119	0.463	0.710	-2.171	1351	-0.463	-0.736	0.131	0.00014	0.02487	-0.02511	$\varphi_{9-6}$ 92.06	$\sigma_{9-6}$ 1690	
	(2.2)	-0.128	0.463	1.755	-5.920	1325	-0.463	-1.755	-0.406	0	0		$\varphi_{2-2}$ 90	$\sigma_{2-2}$ 5235	
	(3.1)	-0.129	0.463	1.696	-5.747	1320	-0.463	-1.755	-0.383	0.00075	0.13283	-0.20833	$\varphi_{3-1}$ 89.37	$\sigma_{3-1}$ 5224	
	(4.0)	-0.148	0.463	1.436	-4.959	1326	-0.463	-1.696	-0.280	0.01449	0.09104	-0.17966	$\varphi_{4-0}$ 88.85	$\sigma_{4-0}$ 4793	
	(5.1)	-0.113	0.463	1.284	-4.266	1342	-0.463	-1.436	-0.115	0.00495	0.25261	-0.44233	$\varphi_{5-1}$ 88.91	$\sigma_{5-1}$ 3257	
	(6.2)	-0.127	0.463	1.232	-4.078	1312	-0.463	-1.284	-0.102	0.000576	0.00423	-0.12916	$\varphi_{6-2}$ 90	$\sigma_{6-2}$ 3596	
	(7.3)	-0.143	0.463	1.017	-3.344	1337	-0.463	-1.232	0.024	0.00991	0.2705	-0.44425	$\varphi_{7-3}$ 89.03	$\sigma_{7-3}$ 3060	
	(8.4)	-0.128	0.463	0.905	-2.897	1332	-0.463	-1.017	0.056	0.00289	0.12386	-0.19976	$\varphi_{8-4}$ 89.31	$\sigma_{8-4}$ 2505	
	(9.5)	-0.139	0.463	0.782	-2.426	1335	-0.463	-0.905	0.097	0.00324	0.11370	-0.18368	$\varphi_{9-5}$ 88.68	$\sigma_{9-5}$ 2106	
	(10.6)	-0.099	0.463	0.782	-2.350	1355	-0.463	-0.782	0.106	0	0		$\varphi_{10-6}$ 90	$\sigma_{10-6}$ 1787	

表-2.6 の  $\sigma$ ,  $\varphi$  の値を (2.4.2) 式に代入して  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  の値を計算したものを表-2.7 に示す。また表-2.5 より上り線を描いたものが第2.24 図であつて、表-2.7 より  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  の塑性状態のときの応力をそれぞれ第2.25 図、第2.26 図に示す。この値は殆

んど表に近いが、これは近次逐次法によつて求めたからであつて、実際には表となる。

つぎに(2.4.27)式より  $(\tau_s)_{p/}$  と  $(\tau_s)_{e/}$  の値を求めたものを表-2.8 に示す。この値を各より線に沿つて如何に变化するかを示したものが第2.27(a), (b), (c) 図であつて第2.22図に示すように  $(\tau_s)_{p/}$  曲線と  $(\tau_s)_{e/}$  曲線の交点が弾塑性境界の点であるとして、弾塑性境界を求めたのを第2.24図に示す。この弾塑性境界上の点を極座標で示すと表-2.9 となる。

表-2.7 塑性状態の  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau$  の値

(単位  $\text{kg/cm}^2$ )

トンネル 円周	(0,0)	(1,1)	(2,2)	(3,3)	(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)
	$\sigma_r=0$	$\sigma_r=0$	$\sigma_r=0$	$\sigma_r=0$	$\sigma_r=0$	$\sigma_r=0$	$\sigma_r=0$	$\sigma_r=0$	$\sigma_r=0$
	$\sigma_\theta=1407$	$\sigma_\theta=1407$	$\sigma_\theta=1407$	$\sigma_\theta=1407$	$\sigma_\theta=1407$	$\sigma_\theta=1407$	$\sigma_\theta=1407$	$\sigma_\theta=1407$	$\sigma_\theta=1407$
	$\tau=0$	$\tau=0$	$\tau=0$	$\tau=0$	$\tau=0$	$\tau=0$	$\tau=0$	$\tau=0$	$\tau=0$
第1環	(1,0)	(2,1)	(3,2)	(4,3)	(5,4)	(6,5)	(7,6)	(8,7)	
	$\sigma_r=0.261$	$\sigma_r=0.238$	$\sigma_r=0.220$	$\sigma_r=0.194$	$\sigma_r=0.168$	$\sigma_r=0.109$	$\sigma_r=0.076$	$\sigma_r=0.058$	
	$\sigma_\theta=2327$	$\sigma_\theta=2236$	$\sigma_\theta=2136$	$\sigma_\theta=2014$	$\sigma_\theta=1916$	$\sigma_\theta=1779$	$\sigma_\theta=1671$	$\sigma_\theta=1614$	
	$\tau=-0.017$	$\tau=-0.052$	$\tau=-0.077$	$\tau=-0.063$	$\tau=-0.064$	$\tau=-0.074$	$\tau=-0.040$	$\tau=-0.011$	
第2環	(1,-1)	(2,0)	(3,1)	(4,2)	(5,3)	(6,4)	(7,5)	(8,6)	(9,7)
	$\sigma_r=0.637$	$\sigma_r=0.607$	$\sigma_r=0.537$	$\sigma_r=0.467$	$\sigma_r=0.350$	$\sigma_r=0.303$	$\sigma_r=0.222$	$\sigma_r=0.153$	$\sigma_r=0.120$
	$\sigma_\theta=3645$	$\sigma_\theta=3541$	$\sigma_\theta=3261$	$\sigma_\theta=3049$	$\sigma_\theta=2638$	$\sigma_\theta=2437$	$\sigma_\theta=2172$	$\sigma_\theta=1909$	$\sigma_\theta=1832$
	$\tau=0$	$\tau=-0.018$	$\tau=-0.027$	$\tau=-0.023$	$\tau=-0.014$	$\tau=-0.125$	$\tau=-0.086$	$\tau=-0.119$	$\tau=-0.088$
第3環	(2,-1)	(3,0)	(4,1)	(5,2)	(6,3)	(7,4)	(8,5)	(9,6)	
	$\sigma_r=1.121$	$\sigma_r=1.063$	$\sigma_r=0.815$	$\sigma_r=0.669$	$\sigma_r=0.622$	$\sigma_r=0.415$	$\sigma_r=0.307$	$\sigma_r=0.192$	
	$\sigma_\theta=5347$	$\sigma_\theta=5146$	$\sigma_\theta=4273$	$\sigma_\theta=3761$	$\sigma_\theta=3584$	$\sigma_\theta=2859$	$\sigma_\theta=2485$	$\sigma_\theta=2068$	
	$\tau=0.013$	$\tau=0.008$	$\tau=-0.052$	$\tau=0$	$\tau=-0.065$	$\tau=-0.042$	$\tau=-0.026$	$\tau=-0.068$	
第4環	(2,-2)	(3,-1)	(4,0)	(5,1)	(6,2)	(7,3)	(8,4)	(9,5)	(10,6)
	$\sigma_r=1.781$	$\sigma_r=1.754$	$\sigma_r=1.587$	$\sigma_r=1.108$	$\sigma_r=1.033$	$\sigma_r=0.799$	$\sigma_r=0.553$	$\sigma_r=0.375$	$\sigma_r=0.232$
	$\sigma_\theta=7669$	$\sigma_\theta=7574$	$\sigma_\theta=6893$	$\sigma_\theta=5286$	$\sigma_\theta=5040$	$\sigma_\theta=4201$	$\sigma_\theta=3340$	$\sigma_\theta=2717$	$\sigma_\theta=2222$
	$\tau=0$	$\tau=0.063$	$\tau=0.107$	$\tau=0.079$	$\tau=0$	$\tau=0.058$	$\tau=0.024$	$\tau=0.054$	$\tau=0$

表-2.8 により線に沿つてのより線方向せん断応力  $\tau_s$  の値

(単位  $\text{kg/cm}^2$ )

より線 番号	節点	塑性状態			地山を弾性体とみなす場合				
		$\sigma_r$	$\sigma_\theta$	$\varphi(^{\circ})$	$(\tau_s)_{p/}$	$\sigma_r$	$\sigma_\theta$	$\varphi(^{\circ})$	$(\tau_s)_{e/}$
(1, $\pi$ )	(1,1)	0	1407	90°	0.573	0	4308	90°	1.788
	(1,0)	0.261	2327	90°28'	0.862	0.317	3713	"	1.402
	(1,-1)	0.637	3645	90°00'	1.249	0.547	3202	"	1.103
(2, $\pi$ )	(2,2)	0	1407	90°	0.583	0	4471	"	1.856
	(2,1)	0.238	2236	91°29'	0.789	0.342	3836	"	1.451
	(2,0)	0.607	3341	90°20'	1.219	0.568	3284	"	1.128
	(2,-1)	1.121	5347	89°50'	1.755	0.704	2805	"	0.873
	(2,-2)	1.781	7669	90°00'	2.446	0.776	2414	"	0.680

上り線 番号	節 点	望 性 状 態				地山を弾性体とみなす場合			
		$\sigma_r$	$\sigma_\theta$	$\varphi(^{\circ})$	$(\tau_s)_{PI}$	$\sigma_r$	$\sigma_\theta$	$\varphi(^{\circ})$	$(\tau_s)_{eI}$
(3.7)	(3.3)	0	1407	90°	0.583	0	4714	90°	1959
	(3.2)	0.220	2136	92°17'	0.798	0.385	4065	"	1529
	(3.1)	0.537	3261	92°52'	1.107	0.608	3497	"	1188
	(3.0)	1.063	5146	89°53'	1.696	0.787	2963	"	0904
	(3.-1)	1.754	7574	89°22'	2.420	0.835	2498	"	0691
(4.7)	(4.4)	0	1407	90°	0.583	0	5000	"	2076
	(4.3)	0.174	2114	91°57'	0.766	0.444	4363	"	1628
	(4.2)	0.467	3079	92°31'	1.089	0.747	3785	"	1262
	(4.1)	0.815	4273	90°52'	1.436	0.900	3350	"	1018
	(4.0)	1.567	6093	88°51'	2.214	0.982	2768	"	0742
(5.7)	(5.5)	0	1407	90°	0.583	0	5286	"	2195
	(5.4)	0.148	1916	92°04'	0.736	0.506	4542	"	1676
	(5.3)	0.350	2638	90°26'	0.950	0.813	4013	"	1329
	(5.2)	0.669	3761	90°00'	1.284	1.055	3665	"	1084
	(5.1)	1.108	5286	88°51'	1.707	1.153	3248	"	0870
(6.7)	(6.6)	0	1407	90°	0.583	0	5529	"	2296
	(6.5)	0.109	1779	92°31'	0.696	0.560	4990	"	1840
	(6.4)	0.303	2437	93°19'	0.892	0.981	4515	"	1468
	(6.3)	0.622	3584	91°16'	1.231	1.316	4015	"	1121
	(6.2)	1.033	5040	90°00'	1.665	1.702	4020	"	0963
(7.7)	(7.7)	0	1407	90°	0.583	0	5692	"	2384
	(7.6)	0.076	1671	91°26'	0.663	0.606	5218	"	1916
	(7.5)	0.222	2172	92°31'	0.813	1.074	4815	"	1554
	(7.4)	0.415	2859	90°58'	1.016	1.430	4448	"	1253
	(7.3)	0.799	4201	89°02'	1.414	1.705	4015	"	0959
(8.7)	(8.8)	0	1407	90°	0.583	0	5750	"	2385
	(8.7)	0.058	1614	90°24'	0.646	0.627	5345	"	1960
	(8.6)	0.153	1909	93°54'	0.736	1.137	5007	"	1607
	(8.5)	0.307	2485	90°41'	0.905	1.561	4714	"	1310
	(8.4)	0.553	3340	89°19'	1.162	1.847	4376	"	1051
(9.7)	(9.7)	0.120	1832	90°17'	0.711	1.165	5072	"	1623
	(9.6)	0.192	2068	92°04'	0.782	1.591	4864	"	1360
	(9.5)	0.375	2717	88°41'	0.974	1.994	4653	"	1105
(10.7)	(10.6)	0.232	2220	90°00'	0.827	1.943	4757	"	1169

表-2.9

$\theta$	$0^\circ$	$22^\circ 30'$	$45^\circ$	$67^\circ 30'$	$90^\circ$	$112^\circ 30'$	$135^\circ$	$157^\circ 30'$	$180^\circ$
$r(m)$	360	362	368	377	400	425	445	475	500

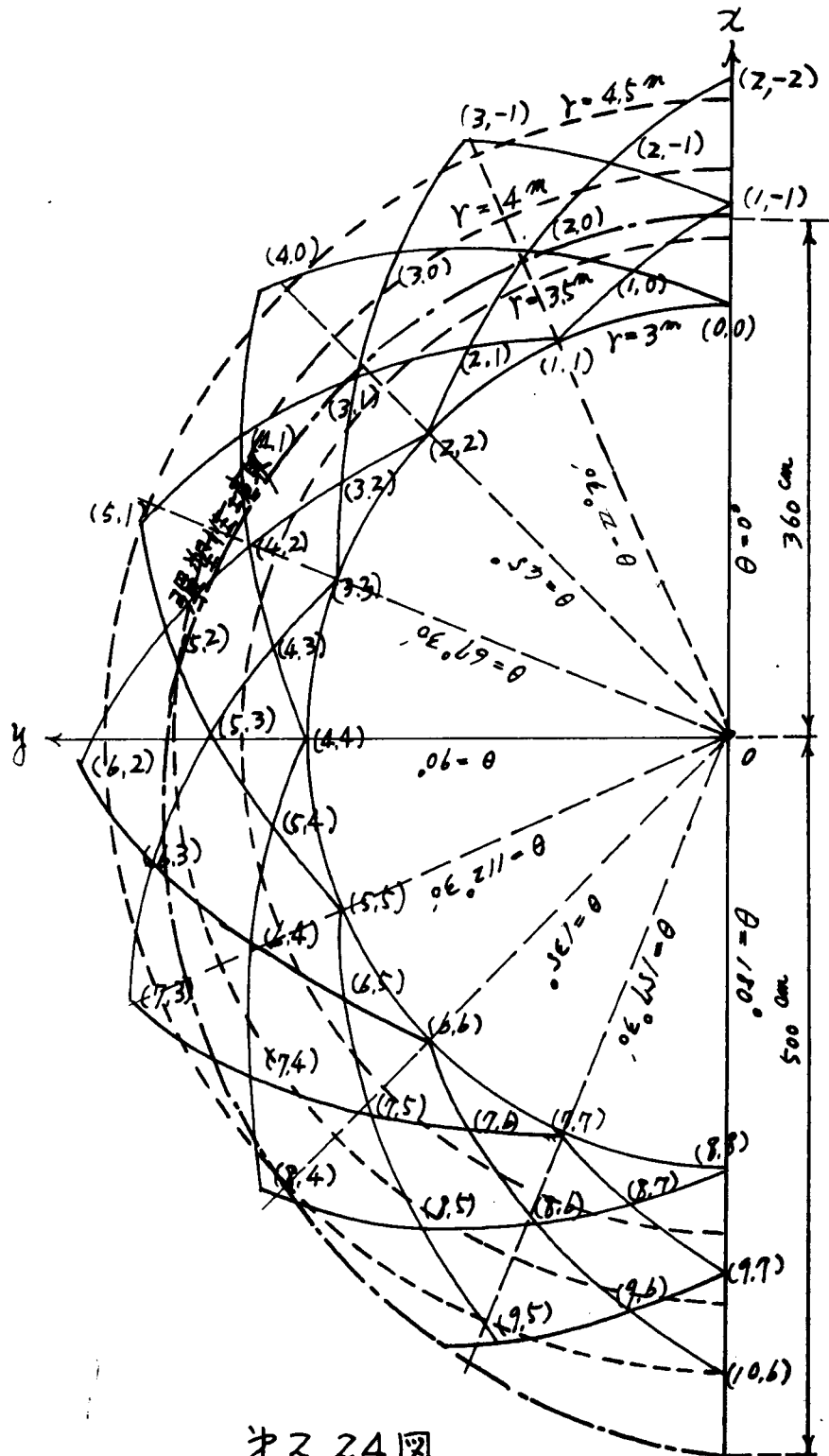
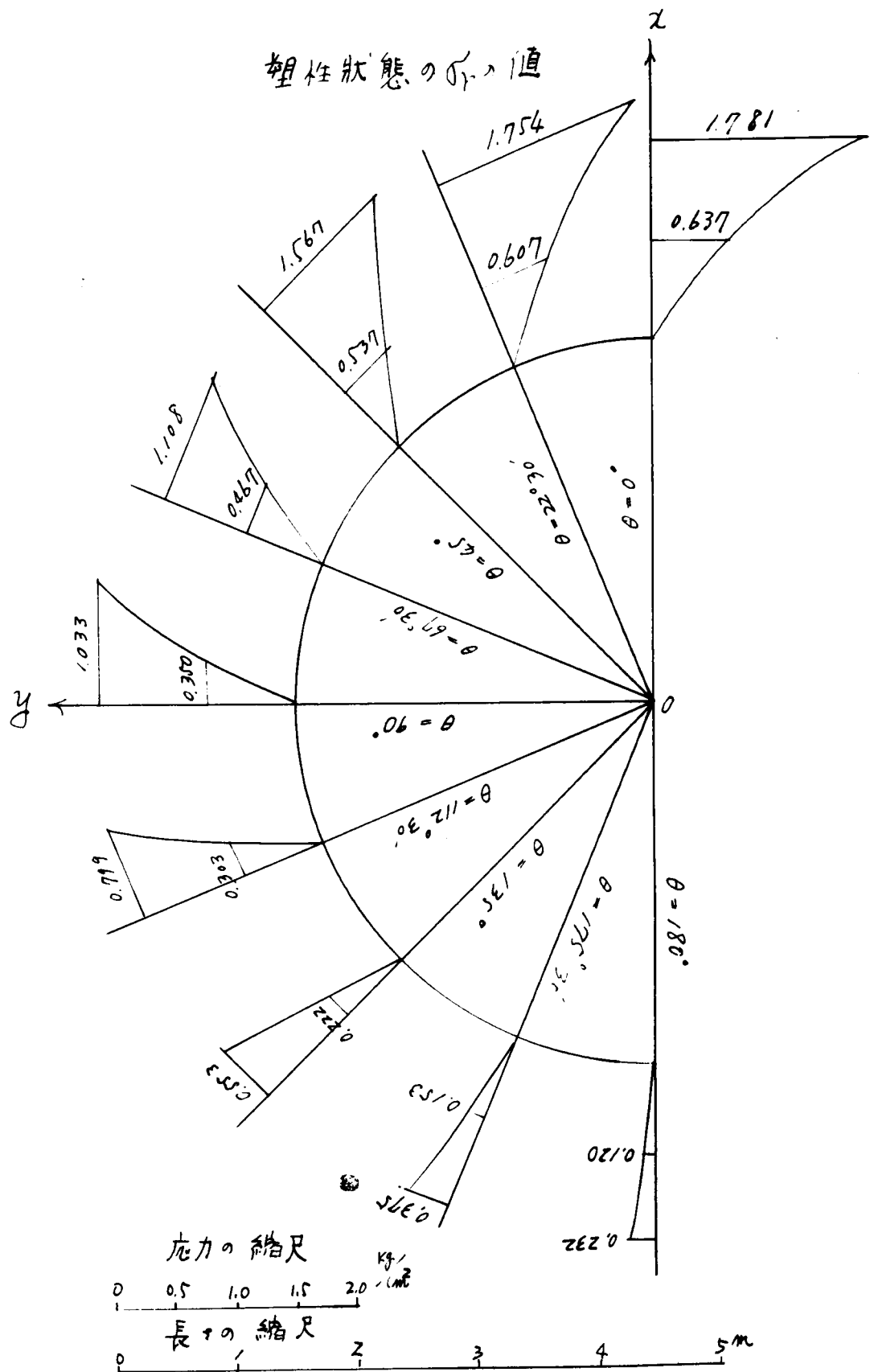


图 2.24

いま平松博士、西氏<sup>49)</sup>の求められた坑道中心から流動限界条件を満足する最も遠い点までの距離 $R$ をつぎに計算してみる。この $R$ は弾塑性境界上の点の座標 $r$ となると考えられる。 $P$ ；地山の鉛直方向，水平方向の自然状態のときの圧力， $P, C$ ；第2, 15図に示すもの， $k = \sin \phi$ として，この場合 $P$ は圧縮力で負号をとるとし， $C$ は引張応力で正号をとるとすれば，

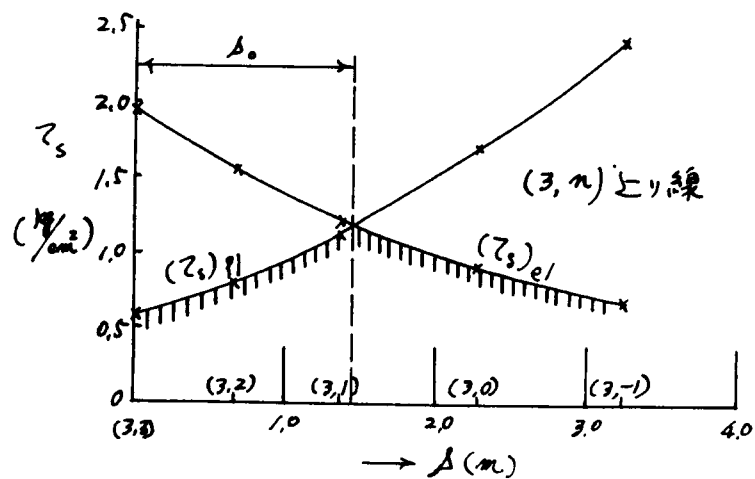
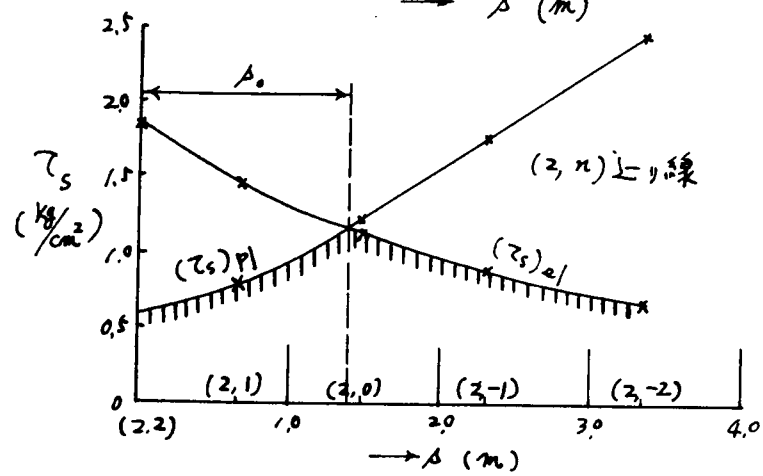
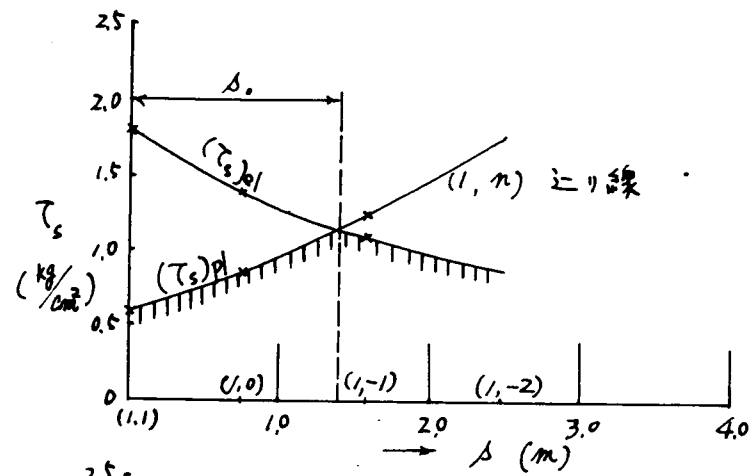
$$R = r_0 \left\{ \frac{(P-C)(1-k)}{\sigma_{ra} - C} \right\}^{\frac{1-k}{2k}} \quad (24.38)$$

ただし， $r_0$ ；トンネル円孔半径， $\sigma_{ra}$ ； $r=r_0$ における $\sigma_r$ の値とする。この場合  $r_0 = 300\text{cm}$ ， $P = 33^\circ 50'$ ， $k = 0.557$ ， $C = 0.560\text{kg/cm}^2$ ， $P = WH = -2.5\text{kg/cm}^2$ ， $\sigma_{ra} = 0$ ，を(24.38)式に代入して  $R = 426\text{cm}$  となる。これに対して表-2.9における $\theta = 0^\circ$ と $\theta = 180^\circ$ のときの弾塑性境界上の点の座標 $r$ の平均値は $430\text{cm}$ となり，また， $\theta = 90^\circ$ のときの $r$ の値は $400\text{cm}$ となっている。しかるに(24.38)式は重力の影響は考えられていないので，これによつて求められる弾塑性境界はトンネルを囲み，トンネル円孔と同心円となるのである。実際のトンネルの場合は重力の影響があるから表-2.9に示すようにトンネルの側壁から下盤に向つてトンネル中心から弾塑性境界までの距離が大となっていることがわかる。









※2,27(a)図

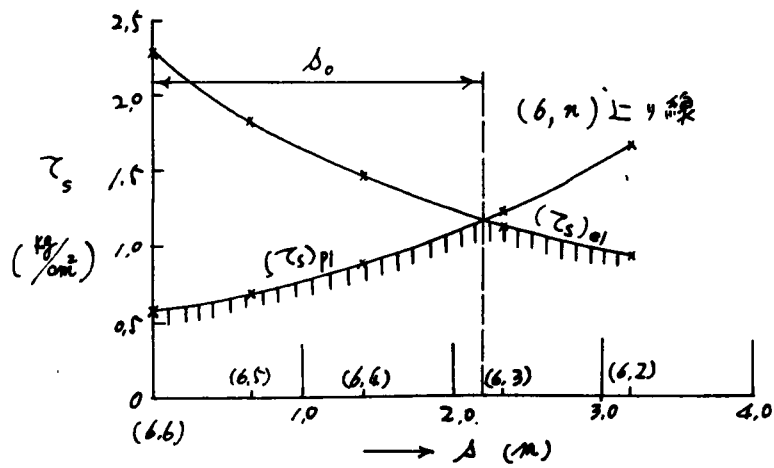
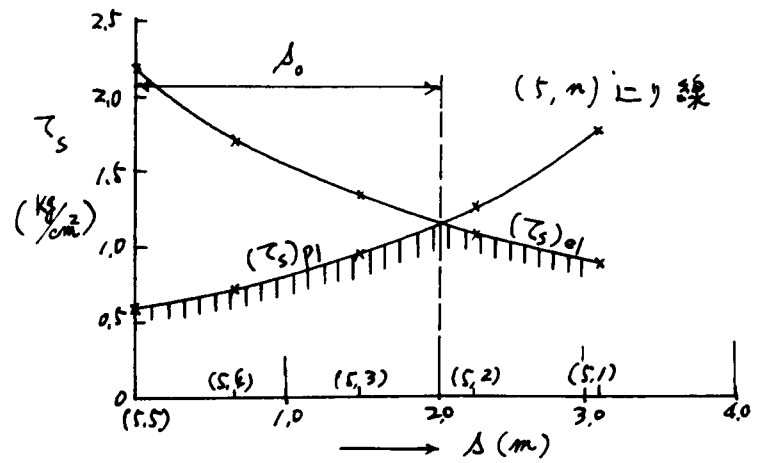
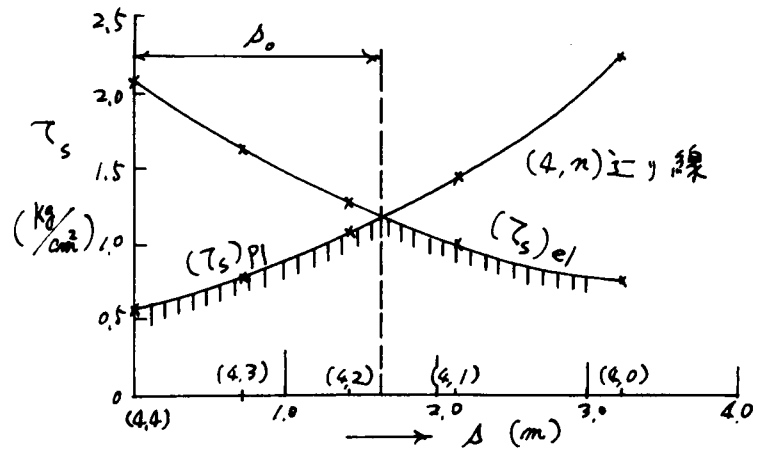
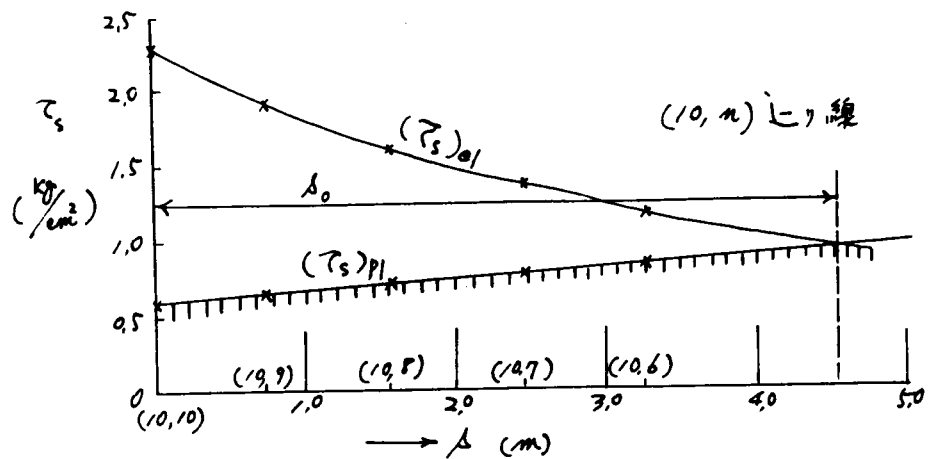
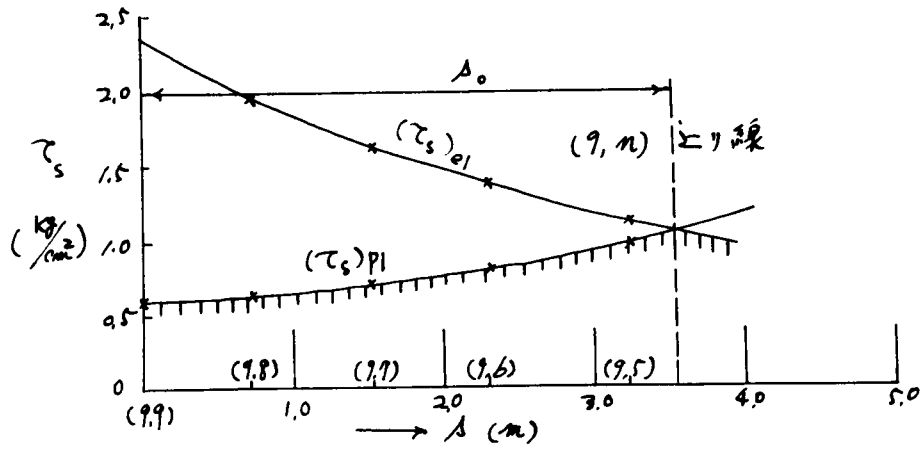
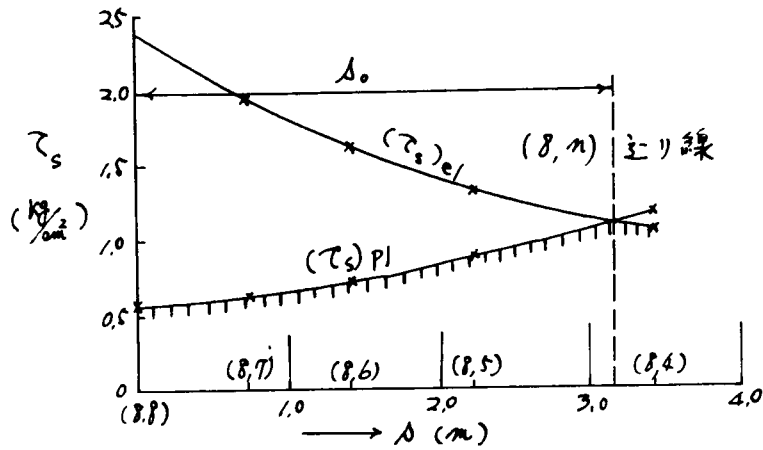
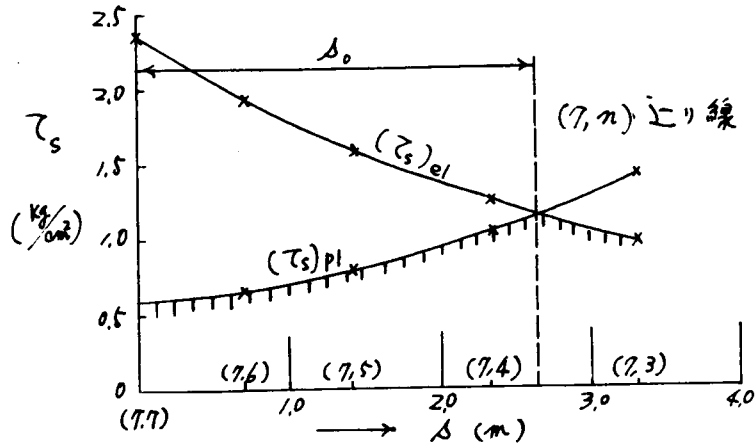


图 2.27(b)



第2.27(c)図

## 第5節 結 語

前節の計算例において、次のような傾向があることがわかる。上り線の理論式(2.4.25)式より(2.4.28)式までの計算でわかるように重力の影響がないので、上り線はトンネル孔の形、大きさ及び地山の土の内部摩擦角の因子によつて変化するか、トンネル断面が円形の場合は座標軸 $x, y$ 軸に関して対称であることがわかる。計算例は近似逐次法によつて、数分かの誤差が入っている。 $\mu$ の値も理論的には $90^\circ$ であるが、近似逐次法によつて、数分かの誤差が入っている。これに関連してのせん断応力も理論的には零になるが近似逐次法の計算では数分の誤差が入っている。

トンネル周辺の摩擦性塑性体の領域中の応力は第2.25図、第2.26図に示すように、 $\sigma_r$ の値とともにトンネル円周より離れるに従い増加して、またトンネル頂点より側壁、下盤に向うに従つて減少している傾向がある。そうしてまた、 $\sigma_r$ の値が $\sigma_\theta$ 方向に増加するときの増加率もトンネル頂点より側壁、下盤に向うに従つて減少している。

摩擦性境界 $K$ に関しては第2.22図に示す方法を仮定して求めたものと、(2.4.28)式より求めたものと比較すれば、(2.4.28)式より求めたものは $R=426\text{ cm}$ となるの $K$ に対して表-2.9の平均値は $412\text{ cm}$ となつて、両者は実用的には近似した数値となつていることがわかる。

以上着者の考察した理論によつて重力の影響を受けるトンネル周辺の摩擦性塑性領域の応力分布が明白となつたのである。

## 第5章 粘土の地山中の円形トンネルの周辺の弾塑性問題

### 第1節 重調和函数による円孔周辺の応力分布の一般的問題

前章の場合のようなトンネル周辺に摩擦性塑性領域が発生し、このときの応力分布及び圧り線について述べた。またこの場合の弾塑性境界については、第2, 2a図に示すような仮定を導入して論じたのであるが、この問題を次のような簡単な場合については理論的に解決できるので、弾塑性境界及びその外方の弾性領域中の応力分布についても求められる。よって塑性領域中の応力と弾性領域中の応力との関連性について考察することとする。

トンネルが相当地山の地表面より深い所では、次のような塑性地盤模型と同じ状態と考えられる。すなわち均質等方性の単純な塑性材料からできていて、一辺の長さが十分大きい正方形断面の水平角柱を考えることにする。第2, 2a図に示すようにこの角柱の上、下の側面には鉛直方向に一樣な圧力 $B$ が作用し、左右の側面には水平方向に一樣な圧力 $A$ が作用しているものとする。水平座標軸を $x$ 軸、鉛直座標軸を $y$ 軸として、これらに直角の方向を $z$ 軸とすると、 $z$ 軸はこの水平角柱の中心軸となる。 $z$ 軸を中心軸として半径の十分小さい円筒形空洞を開削したとき空洞周囲の地盤は $z$ 方向に全然変位しないように、角柱の両底面には適当な分布の圧力が作用しているものとする。すなわち平面歪の問題として扱うこととする。もちろん中心軸から角柱の側面までの距離は空洞半径に比べて十分大きいから、ほとんど無限大と考えられる。このような地山のトンネルの周辺が塑性状態となったときの弾塑性境界は理論的に $L. A. Galin^{50)}$ によつて求められている。従つてこの弾塑性境界より外方の弾性領域の応力分布に関しても理論的に求められる。またこれによつて弾塑性境界がトンネル円孔を取り囲む条件につき考察することとする。

第2, 2a図に示すような荷重によつてトンネル孔の周辺に応力集中が生じ、この応力集中がその材料特有の大きさのある一定値に達するとき、トンネル孔の周りの応力成分は弾性状態でなくなつて弾性限度をこした状態に移行する。いまトンネル孔の周りにある領域内にこのような状態が生ずるものと仮定する。

弾性限度をこえた塑性状態の領域の応力状態を決定する応力函数 $\bar{U}_1(x, y)$ は双曲型の方程式を満足する。他方弾性領域中の応力函数 $\bar{U}_2(x, y)$ は、重調和函数とならねばならない。すなわち、

$$\frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \bar{U}_2}{\partial y^4} = 0 \quad (2.5.1)$$

トンネル円孔の縁において円孔周の法線方向の直応力 $\sigma_n$ 及び接線方向のせん断応力 $\tau_{nt}$ とは次式のようにトンネル周に沿う長さ $s$ の函数となるとして、

$$\sigma_n = f_1(s), \quad \tau_{nt} = f_2(s) \quad (2.5.2)$$

が作用しているとする。ただし弾性状態で無限遠では応力は、

$$\bar{U}_x(\infty) = P_1(x, y), \quad \bar{U}_y(\infty) = P_2(x, y), \quad \tau_{xy}(\infty) = -P_3(x, y)$$

塑性状態の領域の応力状態として適用される応力函数 $\bar{U}_1(x, y)$ は、次の双曲型の方程式を満たさねばならない。

$$F_1 \left( x, y, \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial U_1}{\partial x}, \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (2, 5, 3)$$

弾塑性境界  $L$  より外方では (2, 5, 1) 式を満足する重調和函数  $U_2(x, y)$  が存在し、トンネル孔はこの  $L$  で取囲まれているとき、 $L$  の上では次式が成立する。

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} \quad (2, 5, 4)$$

$x \rightarrow \infty$ , 及び  $y \rightarrow \infty$  のときは,

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = p_2(x, y), \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = p_1(x, y), \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} = p_3(x, y), \quad (2, 5, 5)$$

となる。

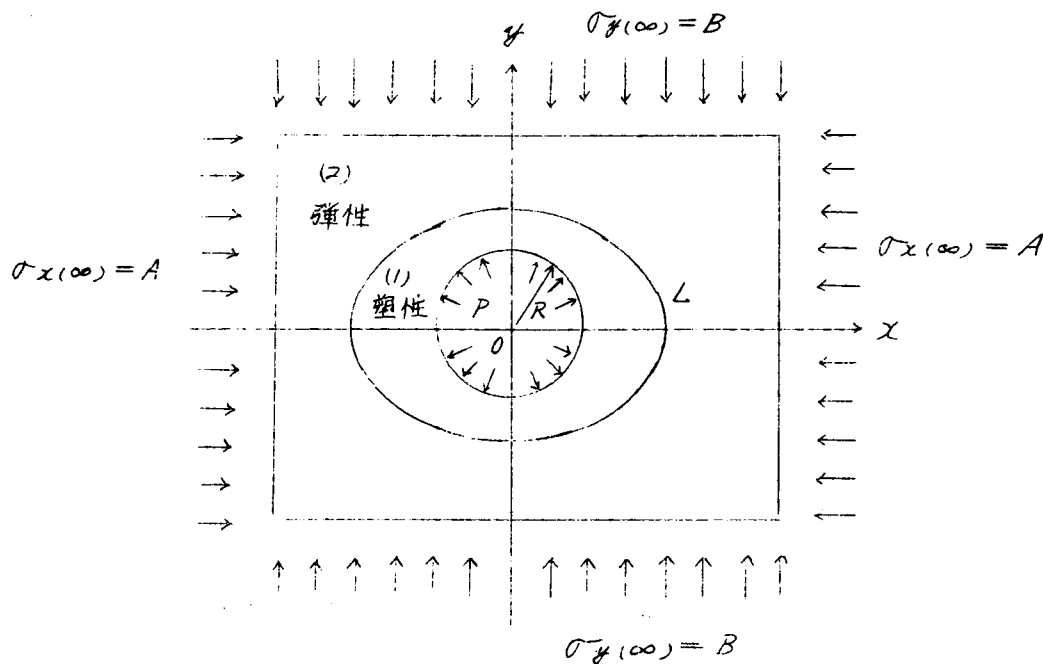
この弾塑性境界  $L$  は一般的な場合理論的に求めるのは困難なことであるが、この境界  $L$  が求められれば、弾性領域の応力分析は無限遠の応力の境界条件と境界  $L$  上の応力の境界条件によつて求めることができる。そうして塑性領域は双曲型の方程式が成立することより、トンネル円周上の応力の境界条件と降伏条件とより応力が求められ、従つて境界  $L$  上の応力の値も求められるから、境界  $L$  上の応力の境界条件も決定されるのである。

なお、塑性領域の応力成分は、

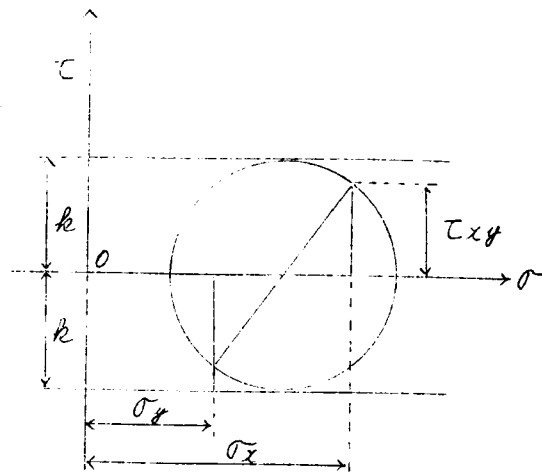
$$\sigma_x^{(1)} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}, \quad \sigma_y^{(1)} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = -\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y}, \quad (2, 5, 6)$$

となる。

## 第2節 円形孔を有する無限平面の弾塑性問題



第2.28図



第2, 29 図

前節で述べた塑性地盤模型は円形孔を有する無限平面であって、この円形孔の周辺が塑性状態になった場合については、 $\angle A. G. G. a. i. n$  が取扱い弾塑性限界が楕円になることを証明している、これを利用し  $G. N. S. a. w. i. n^{51)}$  の方法を用いて弾性領域中の応力函数  $U$  を求める方法につき述べる。

第2, 28 図に示すように座標原点を半径  $R$  の円孔の中心にとる。塑性状態のときの応力は、第2, 29 図に示すように地山が粘土のようなときには、モールの応力円は  $\sigma$  軸に平行な限界線と切する状態となつた降伏条件を満さねばならない、この粘土地山の粘着力を  $k$  とする、しからは降伏条件式は次式となる、

$$\left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4k^2 \quad (2.5.7)$$

いまトンネル円孔の縁において半径方向の圧力  $p$  が作用するとき、トンネル円孔の半径を  $R$  として、 $r=R$  において、

$$\sigma_r = p, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (2.5.8)$$

となる境界条件が成立する、ただし  $\sigma_r$  ; 半径方向の直応力,  $\sigma_\theta$  ; 接線方向の直応力,  $\tau_{r\theta}$  ; せん断応力とする、また  $x$  方向の直応力を  $\sigma_x$ ,  $y$  方向の直応力を  $\sigma_y$ ,  $xy$  座標をとつたときのせん断応力を  $\tau_{xy}$  とする。

無限遠において、

$$\sigma_x(\infty) = A, \quad \sigma_y(\infty) = B$$

となる境界条件が成立する、(2.5.7)式の解は、(2.5.8)式の境界条件によつて、次の形となる、<sup>52)</sup>

$$U(x, y) = k r^2 \log \frac{r}{R} - \frac{-p+k}{2} r^2 \quad (2.5.9)$$

(2.5.9)式の応力函数から次の応力成分が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z'' + \sigma_y'' &= 2k + 2p + 4k \log \frac{r}{R} = 2k + 2p + 2k \log \frac{z \bar{z}}{R^2} \\ \sigma_y'' - \sigma_z'' + 2i \tau_{xy}'' &= 2k \frac{\bar{z}}{z} \end{aligned} \right\} (2.5.10)$$

ただし (2.5.10) 式中の  $z, \bar{z}$  は、次式で表わされるものである。

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy,$$

すなわち  $\bar{z}$  は  $z$  の共轭形である。 $U_2$  に関する境界条件は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} &= 2k + 2p + 2k \log \frac{z \bar{z}}{R^2} \quad (\angle \text{境界において}) \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} &= A + B \quad (z \rightarrow \infty \text{において}) \end{aligned} \right\} (2.5.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} &= 2k \frac{\bar{z}}{z} \quad (\angle \text{境界において}) \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} &= B - A \quad (z \rightarrow \infty \text{において}) \end{aligned} \right\} (2.5.12)$$

弾塑性境界  $\angle$  の外方の弾性領域において正則なる Muschelischwili の函数<sup>5.3)</sup> を  $\Phi_2^*(z), \Psi_2^*(z)$  とすれば、 $U_2(x, y)$  と、これらの函数との関係は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} &= 4 \operatorname{Re} [\Phi_2^*(z)] \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} &= [\bar{z} \Phi_2'^*(z) + \Psi_2^*(z)] \end{aligned} \right\} \dots (2.5.13)$$

ただし  $\operatorname{Re}$  は  $\{ \}$  の中が実部をとるべきことを示している。(2.5.13) 式と (2.5.11) 式及び (2.5.12) 式とより、

$$\left. \begin{aligned} 4 \operatorname{Re} \Phi_2^*(z) &= 2k + 2p + 2k \log \frac{z \bar{z}}{R^2} \quad (\angle \text{境界において}) \\ 4 \operatorname{Re} \Phi_2^*(z) &= A + B \quad (z \rightarrow \infty \text{において}) \end{aligned} \right\} \dots (2.5.14)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 [\bar{z} \Phi_2'^*(z) + \Psi_2^*(z)] &= 2k \frac{\bar{z}}{z} \quad (\angle \text{境界において}) \\ 2 [\bar{z} \Phi_2'^*(z) + \Psi_2^*(z)] &= B - A \quad (z \rightarrow \infty \text{において}) \end{aligned} \right\} \dots (2.5.15)$$

いま写像の問題について考えるに、等角写像論で明らかなように  $z$  平面の領域  $S$  の境界  $C$  を

$$z = w(\zeta)$$

の関係で  $S$  面での単位円  $|\zeta| = 1$  に一意的に等角写像することができる。



$$z = \rho e^{i\theta}$$

として、 $\rho, \theta$  を  $z$  面での極座標とすると、 $\rho = \text{一定}$  及び  $\theta = \text{一定}$  は  $z$  面である曲線となる。この曲線は  $\rho = \text{一定}$  に対しては、 $z = w(\theta)$  なる点を囲む内曲線であり、 $\theta = \text{一定}$  に対しては、この点から出て周辺  $C$  に達する放射状の曲線である。この2種の曲線は互いに直交しているが、これを  $z$  面での弾塑性境界  $L$  より外方の領域における座標に採用する。 $\theta = \text{一定}$  に対する曲線を  $\rho$ -線、 $\rho = \text{一定}$  に対する線を  $\theta$ -線と名づけ、そのおのおのの母線方向を  $\rho$ -軸、 $\theta$ -軸ということとする。L. A. Galin によつて弾塑性境界  $L$  は楕円となることを示しているから、次の写像函数を用いて  $z$ -平面の単位円  $\gamma$  の外に、境界  $L$  の外方を写像する。

$$z = w(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} \quad (2.5.17)$$

$$\Phi_2^* [w(\zeta)] = \Phi_2(\zeta), \quad \Psi_2^* [w(\zeta)] = \Psi_2(\zeta) \quad (2.5.18)$$

とするとき、(2.5.14) 式及び (2.5.15) 式は、次の形をとる。

$$\left. \begin{aligned} 4 \operatorname{Re} \Phi_2(\zeta) &= 2k + 2\rho + 2k \log \frac{w(\zeta) \overline{w(\zeta)}}{R^2} \quad (\text{単位円} \gamma \text{ 上}) \\ 4 \operatorname{Re} \Phi_2(\zeta) &= A + B \quad (\zeta \rightarrow \infty \text{ において}) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.19)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \left[ \frac{\overline{w(\zeta)}}{w'(\zeta)} \Phi_2'(\zeta) + \Psi_2(\zeta) \right] &= 2k \frac{\overline{w(\zeta)}}{w(\zeta)} \quad (\text{単位円} \gamma \text{ 上}) \\ 2 \left[ \frac{\overline{w(\zeta)}}{w'(\zeta)} \Phi_2'(\zeta) + \Psi_2(\zeta) \right] &= B - A \quad (\zeta \rightarrow \infty \text{ において}) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.20)$$

ただし、 $\overline{w(\zeta)}$  は  $w(\zeta)$  の共軛形なることを表わす。

(2.5.19) 式と (2.5.20) 式との形より  $\Phi_2(\zeta)$  と  $\Psi_2(\zeta)$  の函数は、次の形となる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2(\zeta) &= a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{a_n}{\zeta^n} + \dots \\ \Psi_2(\zeta) &= b_0 + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{b_n}{\zeta^n} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.5.21)$$

単位円  $\gamma$  の縁において  $\overline{\zeta}(\sigma) = \overline{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$  となることに注目して、(2.5.20) 式の第一の条件を次の形でかき表わす。

$$2 \left[ \frac{\overline{w(\frac{1}{\sigma})}}{w'(\sigma)} \Phi_2'(\sigma) + \Psi_2(\sigma) \right] = 2k \frac{\overline{w(\frac{1}{\sigma})}}{w(\sigma)} \quad (2.5.22)$$

さて、

$$\frac{\overline{w(\frac{1}{\sigma})}}{w(\sigma)} = \frac{\overline{c} \frac{1}{\sigma} + \overline{c_1} \sigma}{c\sigma + \frac{c_1}{\sigma}} = \frac{\overline{c_1}}{c} + M(\sigma) \quad (2.5.23)$$

となつて  $M(\sigma)$  は  $\gamma$  の外側で正則函数であり  $M(\infty) = 0$  となるものである。ゆえに

$$\frac{\bar{w}(\frac{1}{\sigma})}{w'(\sigma)} \bar{\Phi}_2'(\sigma) = N(\sigma) \quad (2.5.24)$$

となる。ただし  $N(\sigma)$  もまた  $\rho$  の外側において正則函数であり、 $N(\infty) = 0$  である。  
(2.5.22) 式に  $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$  を乗ずる。ここでは  $\rho$  円の内部の点として、 $\rho$  に沿って積分する。

すなわち、Cauchy の積分を行えば<sup>54)</sup>

$$2k_0 = 2k \frac{\bar{C}_1}{C} \quad (2.5.25)$$

また、(2.5.20) 式の第二式より、

$$2k_0 = B - A \quad (2.5.26)$$

上の二式より、

$$\bar{C}_1 = C_1 = \frac{B-A}{2k} C = C\beta \quad (2.5.27)$$

となる。ただし  $C_1$  は実数なる故に  $\bar{C}_1 = C_1$  となるのである。

また、上式において、

$$\beta = \frac{B-A}{2k} \quad (2.5.28)$$

とおく。しからは、(2.5.17) 式は、

$$Z = w(\zeta) = C \left( \zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right) \quad (2.5.29)$$

となる。ここに  $C$  の値は未定の係数であつて、(2.5.19) 式より決定される。

すなわち、 $\Phi_2$  が

$$\Phi_2 = k \log C - k \log R + k \log \left( \zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right) + \frac{k+p}{2} - k \log \zeta \quad (2.5.30)$$

を満足するときは、(2.5.19) 式の第1の条件が満足され、つぎに (2.5.19) 式の第2の条件より  $\zeta \rightarrow \infty$  として、

$$A + B = 4 \left( k \log C - k \log R + \frac{k+p}{2} \right)$$

となつて、これより、

$$C = R \exp \left\{ \frac{1}{2k} \left( \frac{B+A}{2} - p - k \right) \right\} \quad (2.5.31)^{55)}$$

(2.5.20) 式の第1式は単位円  $\rho$  上において成立するから、この場合  $\zeta(\sigma) = \sigma$  を代入して、

$$\Phi_2(\sigma) = k \frac{\bar{w}(\frac{1}{\sigma})}{w(\sigma)} - \frac{\bar{w}(\frac{1}{\sigma})}{w'(\sigma)} \Phi_2'(\sigma) = k \frac{\bar{w}(\frac{1}{\sigma})}{w'(\sigma)} \frac{1}{\sigma} \quad (2.5.32)$$

$\frac{\bar{w}(\frac{1}{\zeta})}{w'(\zeta)} \frac{1}{\zeta}$  は、 $\rho$  の内部で  $\zeta = 0$  のときでも極はなく正則であるから、 $\zeta$  を  $\rho$  の内部

の点として、(2.5, 32) 式に  $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\omega}{\omega - \zeta}$  を乗じて、 $\zeta$  に沿って Cauchy の積分を行えば、

$$\Psi_2(\zeta) = k \frac{\bar{\omega}(\frac{1}{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \frac{1}{\zeta} = k \frac{\frac{1}{\zeta} + \beta\zeta}{1 - \frac{\beta}{\zeta^2}} \frac{1}{\zeta} \quad (2.5, 33)$$

となる。弾塑性境界は (2.5, 29) 式において  $\zeta(r) = r = e^{i\theta}$  となるから、

$$Z = x + iy = C \left[ (1+\beta) \cos \theta + i(1-\beta) \sin \theta \right]$$

となることより、

$$x = C(1+\beta) \cos \theta, \quad y = C(1-\beta) \sin \theta,$$

楕円形の弾塑性境界の  $x$  軸方向の楕円の半径を  $a$  とすれば、 $\theta = 0^\circ$  として、

$$a = C(1+\beta) \quad (2.5, 34)$$

またこの楕円形の  $y$  軸方向の半径を  $b$  とすれば、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  として、

$$b = C(1-\beta) \quad (2.5, 35)$$

となる。ところで以上の導かれた式は、弾塑性境界  $\angle$  がトンネル内孔を包囲するという条件の下に成立している故に、(2.5, 34) 式及び (2.5, 35) 式において、

$$C(1-|\beta|) \geq R$$

なる条件が必要である。これより、

$$|B-A| \leq 2k \left[ 1 - \exp \left\{ \frac{1}{2k} \left( p+k - \frac{B+A}{2} \right) \right\} \right] \quad (2.5, 36)$$

なることが必要条件となる。

### 第3節 塑性領域、弾性領域における応力成分

#### (I) 塑性領域：

塑性領域における応力函数  $\psi$  は、(2.5, 9) 式で求められているから、応力成分は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r''' &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 2k \log \frac{r}{R} + p \\ \sigma_\theta''' &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 2k \log \frac{r}{R} + 2k + p \\ \sigma_{r\theta}''' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5, 37)$$

となり、 $\theta$  には無関係である。

#### (II) 弾性領域：

弾性領域における応力函数  $\psi_1$  と剛性をもつた  $\psi_2$ 、 $\psi_3$  はそれぞれ (2.5, 30) 式及び (2.5, 33) 式によって求められているから、これを用いて次式によって応力成分を求める。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p^{(2)} + \sigma_\theta^{(2)} &= 2 \left( \bar{\Psi}_2(z) + \overline{\Psi_2(z)} \right) = 4 \operatorname{Re} \bar{\Psi}_2(z) \\ \sigma_\theta^{(2)} - \sigma_p^{(2)} + 2i \tau_{p\theta}^{(2)} &= \frac{2z^2}{p^2 \bar{w}'(z)} \left[ \overline{w'(z)} \bar{\Psi}_2(z) + w'(z) \Psi_2(z) \right] \end{aligned} \right\} (2.5.38)^{56)}$$

となる。ただし、 $\sigma_p^{(2)}$ ;  $p$ -線方向の直応力、 $\sigma_\theta^{(2)}$ ;  $\theta$ -線方向の直応力、 $\tau_{p\theta}^{(2)}$ ;  $p-\theta$ 座標軸をとったときのせん断応力、とする。この応力成分を求める点の座標は、 $z = p e^{i\theta}$ を(2.5.29)式に代入して

$$z = x + iy = c \left\{ \left( p + \frac{\beta}{p} \right) \cos \theta + i \left( p - \frac{\beta}{p} \right) \sin \theta \right\}$$

となることより、

$$\left. \begin{aligned} x &= c \left( p + \frac{\beta}{p} \right) \cos \theta \\ y &= c \left( p - \frac{\beta}{p} \right) \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.5.39)$$

となる。ただし $\theta$ は水平軸の $x$ 軸より反時計方向 $K$ とった角である。(2.5.38)式に(2.5.39)式及び(2.5.39)式を代入して、このとき(2.5.29)式を用いて、

$$\begin{aligned} \sigma_p^{(2)} + \sigma_\theta^{(2)} &= 4k \log c - 4k \log R + 2(k+p) - 4k \log p \\ &\quad + 2k \log \left\{ \left( p^2 + \frac{\beta^2}{p^2} \right) + 2\beta \cos 2\theta \right\} \dots \dots \dots (2.5.40) \end{aligned}$$

$\overline{w(z)}$ は $w(z)$ の共軛形であり、 $\overline{w'(z)}$ は $w'(z)$ の共軛形であり、 $\overline{w(z)} = \overline{w(z)}$ となることを用いて、

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(2)} - \sigma_p^{(2)} + 2i \tau_{p\theta}^{(2)} &= 2k \left\{ \frac{(p^4 - \beta^2)^2 - 4p^4 \beta^2 \sin^2 2\theta + i \cdot 4(p^4 - \beta^2) p^2 \beta \sin 2\theta}{(p^4 - \beta^2)^2 + 4p^4 \beta^2 \sin^2 2\theta} \right\} \\ &\quad - 2k \left\{ \frac{p^4 - \beta^2 + i p^2 \beta \cdot 2 \sin 2\theta}{p^4 + \beta^2 - p^2 \beta (2 \cos 2\theta)} \right\} \\ &\quad + 2k \left\{ \frac{p^2 - \beta^2 p^2 + \beta p^4 \cos 2\theta - \beta \cos 2\theta + i (\beta p^4 \sin 2\theta + \beta \sin 2\theta)}{p^4 + \beta^2 - p^2 \beta (2 \cos 2\theta)} \right\} \dots \dots \dots (2.5.41) \end{aligned}$$

(2.5.41)式より次の二式が得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(2)} - \sigma_p^{(2)} &= 2k \left\{ \frac{(p^4 - \beta^2)^2 - 4p^4 \beta^2 \sin^2 2\theta}{(p^4 - \beta^2)^2 + 4p^4 \beta^2 \sin^2 2\theta} - \frac{p^4 - \beta^2}{p^4 + \beta^2 - p^2 \beta (2 \cos 2\theta)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p^2 - \beta^2 p^2 + \beta p^4 \cos 2\theta - \beta \cos 2\theta}{p^4 + \beta^2 - p^2 \beta (2 \cos 2\theta)} \right\} \dots \dots \dots (2.5.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{p\theta}^{(2)} &= k \left\{ \frac{4(p^4 - \beta^2) p^2 \beta \sin 2\theta}{(p^4 - \beta^2)^2 + 4p^4 \beta^2 \sin^2 2\theta} - \frac{2p^2 \beta \sin 2\theta}{p^4 + \beta^2 - p^2 \beta (2 \cos 2\theta)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta p^4 \sin 2\theta + \beta \sin 2\theta}{p^4 + \beta^2 - p^2 \beta (2 \cos 2\theta)} \right\} \dots \dots \dots (2.5.43) \end{aligned}$$

$\{(2.5.40) + (2.5.42)\} \frac{1}{2}$  を計算すれば、

$$\begin{aligned} \sigma_p^{(2)} = & 2k \log C - 2k \log R + (k+p) - 2k \log p + k \log \left\{ \left( p^2 + \frac{\beta^2}{p^2} \right) + 2\beta \cos 2\theta \right\} \\ & + k \left\{ \frac{(p^4 - \beta^2)^2 - 4p^4 \beta^2 \sin^2 2\theta}{(p^4 - \beta^2)^2 + 4p^4 \beta^2 \sin^2 2\theta} - \frac{p^4 - \beta^2}{p^4 + \beta^2 - 2p^2 \beta \cos 2\theta} \right. \\ & \left. + \frac{p^2 - \beta^2 p^2 + \beta p^4 \cos 2\theta - \beta \cos 2\theta}{p^4 + \beta^2 - 2p^2 \beta \cos 2\theta} \right\} \quad (2.5.44) \end{aligned}$$

$\{(2.5.40) - (2.5.42)\} \frac{1}{2}$  を計算すれば、

$$\begin{aligned} \sigma_p^{(2)} = & 2k \log C - 2k \log R + (k+p) - 2k \log p \\ & + k \log \left\{ \left( p^2 + \frac{\beta^2}{p^2} \right) + 2\beta \cos 2\theta \right\} - k \left\{ \frac{(p^4 - \beta^2)^2 - 4p^4 \beta^2 \sin^2 2\theta}{(p^4 - \beta^2)^2 + 4p^4 \beta^2 \sin^2 2\theta} \right. \\ & \left. - \frac{p^4 - \beta^2}{p^4 + \beta^2 - 2p^2 \beta \cos 2\theta} + \frac{p^2 - \beta^2 p^2 + \beta p^4 \cos 2\theta - \beta \cos 2\theta}{p^4 + \beta^2 - 2p^2 \beta \cos 2\theta} \right\} \quad (2.5.45) \end{aligned}$$

(2.5.43)式、(2.5.44)式及び(2.5.45)式によつて、それぞれ弾性領域の応力成分  $\sigma_r^{(2)}$ 、 $\sigma_\theta^{(2)}$  及び  $\sigma_p^{(2)}$  が求められる。ここで  $\sigma_p^{(2)}$  には  $p$  を含む項がなく、 $A$  と  $B$  を含む項がある。

計算例；——

トンネル内孔の半径  $R = 300 \text{ cm}$ 、地山の粘着力  $k = 3 \text{ kg/cm}^2$ 、地表面よりトンネル中心までの深さ  $H = 50 \text{ m}$ 、地山の土の単位体積重量  $w = 2.0 \text{ t/m}^3$ 、地山の土のポアソン数  $m = 2.33$  とすれば、鉛直荷重  $B = 10 \text{ kg/cm}^2$ 、水平方向自然地山圧力  $A = \frac{1}{m-1} B = 7.5 \text{ kg/cm}^2$  となる。 $p = 0.1 \sim 2 \text{ kg/cm}^2$  の三種類  $K$  に対して計算して  $p$  の変化によつて弾塑性境界の大きさの変化、及び応力分布の変化の様相について研究してみる。(2.5.31)式より、

$$C = R \exp \left\{ \frac{1}{2k} \left( \frac{B+A}{2} - p - k \right) \right\} = 300 \exp \left\{ \frac{1}{2 \times 3} \left( \frac{10+7.5}{2} - p - 3 \right) \right\}$$

(2.5.28)式より、
$$\beta = \frac{B-A}{2k} = \frac{10-7.5}{2 \times 3} = 0.417 \quad \text{となる。}$$

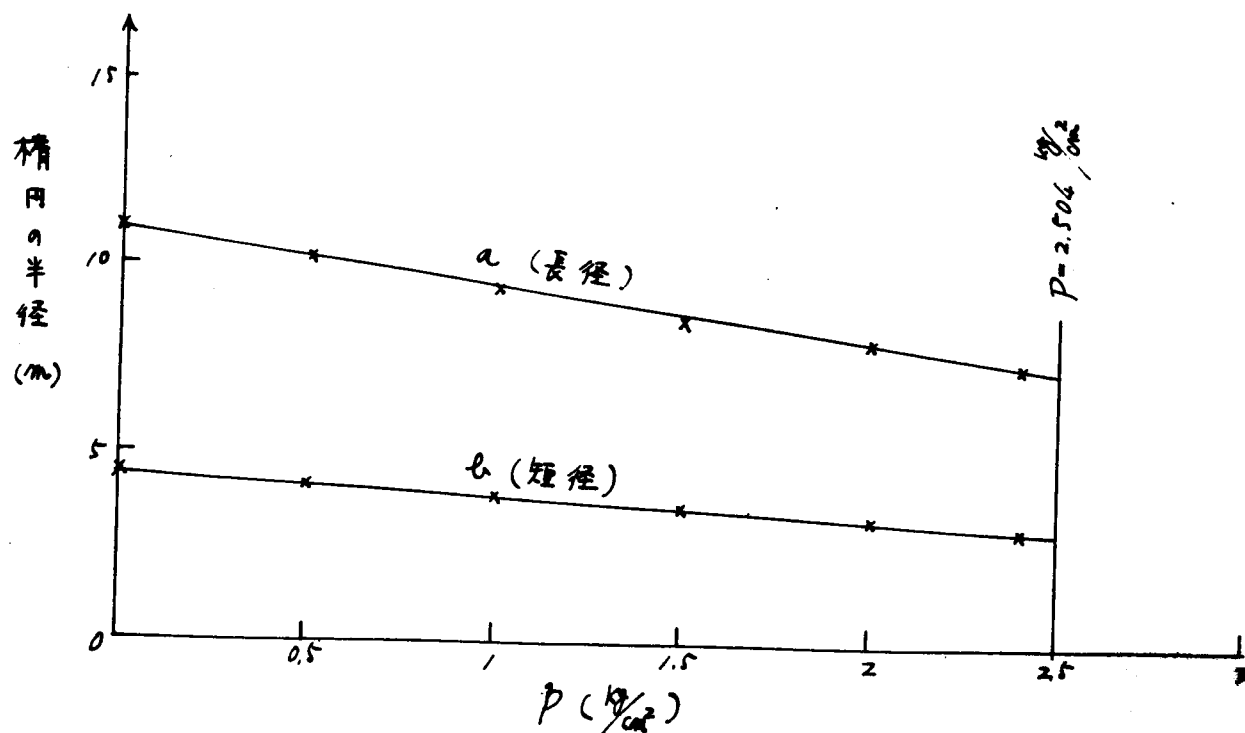
これらの数値を用いて (2.5.34) 式, (2.5.35) 式より  $a, b$  を求めれば表-2.9 となる。これを図示したものが第2.30 図であって,  $P$  の変化による  $a, b$  の変化の様相を示したものであり, 表-2.10 には  $P$  の変化による弾塑性境界の楕円の座標の値を示し, これを図示したものが第2.31 図である。

表-2.9  $C, a, b$  の値 (単位  $cm$ )

$P (kg/cm^2)$	0	0.5	1	1.5	1.7	2.0	2.4
$C$	783	720	663	608	589	562	525
$a$	1110	1020	939	862	835	795	744
$b$	456	420	387	355	343	327	306

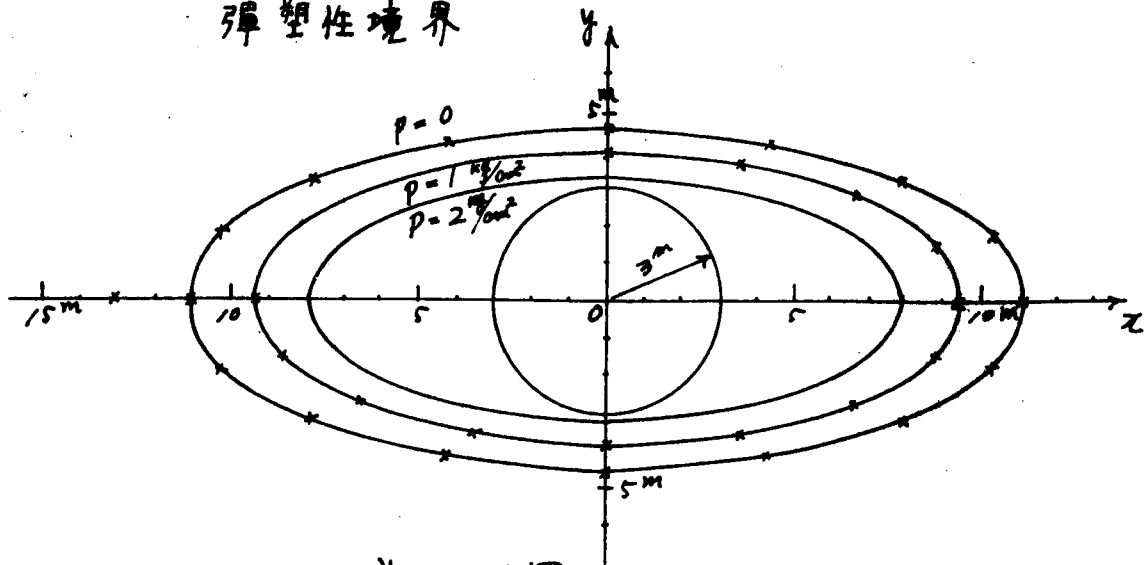
表-2.10 弾塑性境界の楕円の座標  $x, y$  (単位  $cm$ )

$\theta$ ( $^{\circ}$ )	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$P=0$		$P=1 kg/cm^2$		$P=2 kg/cm^2$	
			$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
0	1	0	1110	0	939	0	795	0
22°30'	0.924	0.383	1026	175	868	148	732	125
45°	0.707	0.707	785	322	664	274	562	201
67°30'	0.383	0.924	425	421	360	358	304	301
90°	0	1	0	456	0	387	0	327



第2.30 図

# 弾塑性境界



第2,31図

(2.5.37)式によつて塑性領域内の応力  $\sigma_r^{(1)}$ ,  $\sigma_\theta^{(1)}$  の値を求めたのが表~2,11 の値である。ただし  $\tau_{r\theta}^{(1)}$  はこの場合すべて零である。また(2.5.43)式, (2.5.44)式, (2.5.45)式によつて弾性領域内の応力を求める。  $\theta = 0^\circ$  の場合の  $\sigma_\theta^{(2)}$ ,  $\sigma_r^{(2)}$  の値を表~2,12 に示す。  $\tau_{r\theta}^{(2)} = 0$  となる。  $\theta = 90^\circ$  の場合の  $\sigma_\theta^{(2)}$ ,  $\sigma_r^{(2)}$  の値を表~2,14 に示す。  $\tau_{r\theta}^{(2)} = 0$  となる。このときの  $p$  の値  $K$  に対する座標は  $\theta = 0^\circ$   $K$  に対しては 表~2,13  $K$  示し、  $\theta = 90^\circ$  に対しては 表~2,15 に示している。

表~2,11 塑性領域内の応力 (単位  $\text{kg/cm}^2$ )

$r \text{ (cm)}$	$p = 0$		$p = 1 \text{ kg/cm}^2$		$p = 2 \text{ kg/cm}^2$	
	$\sigma_r^{(1)}$	$\sigma_\theta^{(1)}$	$\sigma_r^{(1)}$	$\sigma_\theta^{(1)}$	$\sigma_r^{(1)}$	$\sigma_\theta^{(1)}$
300	0	6.000	1.000	7.000	2.000	8.000
310	0.177	6.177	1.177	7.177	2.177	8.177
320	0.389	6.389	1.390	7.390	2.399	8.390
330	0.572	6.572	1.572	7.572	2.572	8.572
340	0.749	6.749	1.749	7.749	2.749	8.749
350	0.926	6.926	1.926	7.926	2.926	8.926
360	1.094	7.094	2.094	8.094	3.094	9.094

$r(\text{cm})$	$p = 0$		$p = 1 \text{ kg/cm}^2$		$p = 2 \text{ kg/cm}^2$	
	$\sigma_r^{(1)}$	$\sigma_\theta^{(1)}$	$\sigma_r^{(1)}$	$\sigma_\theta^{(1)}$	$\sigma_r^{(1)}$	$\sigma_\theta^{(1)}$
380	1424	7424	2424	8424	3424	9424
400	1724	7724	2724	8724	3724	9724
460	2563	8563	3563	9563	4563	10563
500	3065	9065	4065	10065	5065	11065
560	3745	9745	4745	10745	5745	11745
600	4159	10159	5159	11159	6159	12159
660	4730	10730	5730	11730	6730	12730
700	5083	11083	6083	12083	7083	13083
760	5576	11576	6576	12576	7576	13576
800	5886	11886	6886	12886	7886	13886
900	6600	12600	7600	13600	8600	14600
1000	7224	13224	8224	14224	9224	15224
1100	7806	13806	8806	14806	9806	15806

表 ~ 2.12 弾性領域中の応力 (x 軸上の値  $\theta = 0^\circ$ )

(単位  $\text{kg/cm}^2$ )

$p$	$p = 0$		$p = 1 \text{ kg/cm}^2$		$p = 2 \text{ kg/cm}^2$	
	$\sigma_\theta^{(2)}$	$\sigma_p^{(2)}$	$\sigma_\theta^{(2)}$	$\sigma_p^{(2)}$	$\sigma_\theta^{(2)}$	$\sigma_p^{(2)}$
1	13644	7644	13648	7648	13579	7579
1.2	12323	7829	12327	7833	12258	7764
1.4	11818	7996	11822	8000	11753	7931
1.6	11411	7955	11415	7959	11346	7890
1.8	11099	7864	11103	7868	11034	7799
2.0	10890	7816	10894	7820	10825	7751
3.0	10390	7654	10394	7658	10325	7589



表～2.13  $\theta = 0$  の場合の弾性領域における  $P$  の値  
に対する座標

(単位  $\text{cm}$ )

$P$	$P = 0$		$P = 1 \text{ kg/cm}^2$		$P = 2 \text{ kg/cm}^2$	
	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
1	1110	0	939	0	796	0
1.2	1212	0	1026	0	870	0
1.4	1330	0	1126	0	955	0
1.6	1457	0	1234	0	1042	0
1.8	1591	0	1347	0	1170	0
2.0	1730	0	1465	0	1238	0
3.0	2458	0	2081	0	1760	0

表～2.14 弾性領域中の応力 ( $y$  軸上の値  $\theta = 90^\circ$ )

(単位  $\text{kg/cm}^2$ )

$P$	$P = 0$		$P = 1 \text{ kg/cm}^2$		$P = 2 \text{ kg/cm}^2$	
	$\sigma_\theta^{(2)}$	$\sigma_P^{(2)}$	$\sigma_\theta^{(2)}$	$\sigma_P^{(2)}$	$\sigma_\theta^{(2)}$	$\sigma_P^{(2)}$
1	8.518	2.518	8.522	2.522	8.453	2.453
1.2	8.703	4.719	8.707	4.723	8.638	4.654
1.4	8.595	6.027	8.599	6.031	8.530	5.962
1.6	8.452	6.910	8.456	6.914	8.387	6.845
1.8	8.320	7.534	8.324	7.534	8.255	7.469
2.0	8.202	7.986	8.206	7.990	8.137	7.921
3.0	7.864	9.082	7.868	9.086	7.799	9.017

表～2.11 と表～2.12, 表～2.13, とを用いて図示したものが 図 2.3, 2.4 で  $\theta = 0$  の場合の弾性領域の応力と弾性領域の応力の分布及びその関係を示す。

表～2.11 と表～2.14, 表～2.15, とを用いて図示したものが 図 2.5, 2.6 で  $\theta = 90^\circ$  の場合の弾性領域の応力と弾性領域の応力分布及びその関係を示す。

表 ~ 2.15  $\theta = 90^\circ$  の場合の弾性領域における  $P$  の値  
に対する座標

(単位 cm)

$P$	$P = 0$		$P = 1 \text{ kg/cm}^2$		$P = 2 \text{ kg/cm}^2$	
	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
1	0	456	0	387	0	327
1.2	0	667	0	565	0	478
1.4	0	863	0	731	0	618
1.6	0	1048	0	888	0	752
1.8	0	1228	0	1040	0	880
2.0	0	1402	0	1187	0	1000
2.0	0	2240	0	1897	0	1600

つぎに  $P = 1$  の弾塑性境界上の  $\theta = 45^\circ$  の点において、弾性領域中の応力の式(2.5.27)による  $\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)}$  の値と、弾性領域中の応力の式(2.5.44)及び(2.5.45)より求めた  $\sigma_r^{(2)} + \sigma_\theta^{(2)}$  の値は一致せねばならないが、この検算をなしたものが表 ~ 2.16 であつて、多少の計算誤差はあるとしても一致した応力の和となつてゐる。

表 ~ 2.16  $P = 1$  の弾塑性境界上の  $\theta = 45^\circ$  の  
点における応力の和

$P (\text{kg/cm}^2)$	$C (\text{cm})$	$\sigma_r^{(2)} + \sigma_\theta^{(2)} (\text{kg/cm}^2)$	$r (\text{cm})$	$\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)} (\text{kg/cm}^2)$
0	783	18.468	848	18.480
1	663	18.476	717	18.450
2	562	18.440	608	18.496

$x$  軸に沿った応力分布  
 $(\theta = 0^\circ \text{ の場合})$

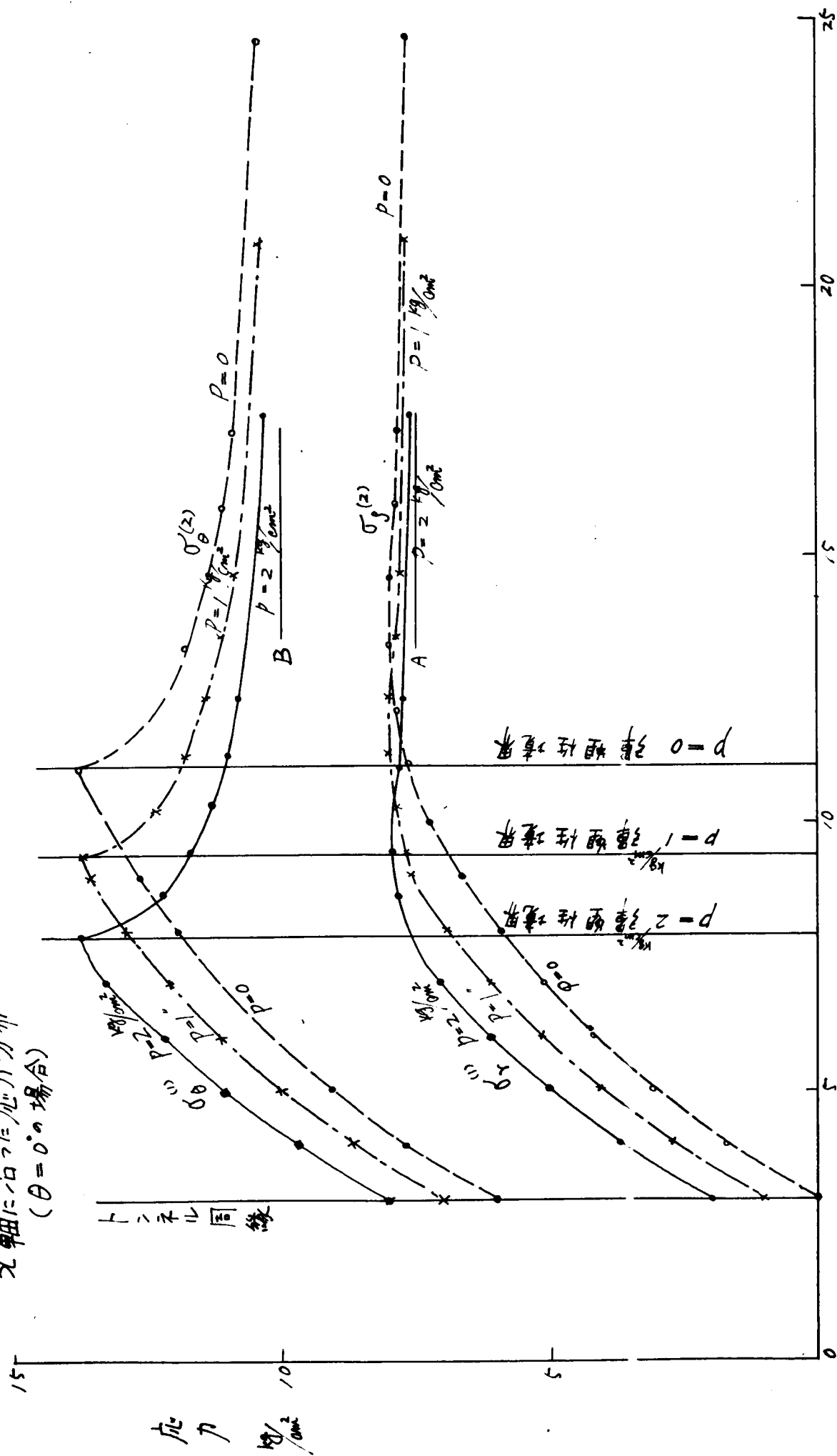


図 2, 3

$x$  軸上におけるトンネル内孔中心からの距離 (cm)

$y$  軸に沿った応力分布  
 ( $\theta = 90^\circ$  の場合)

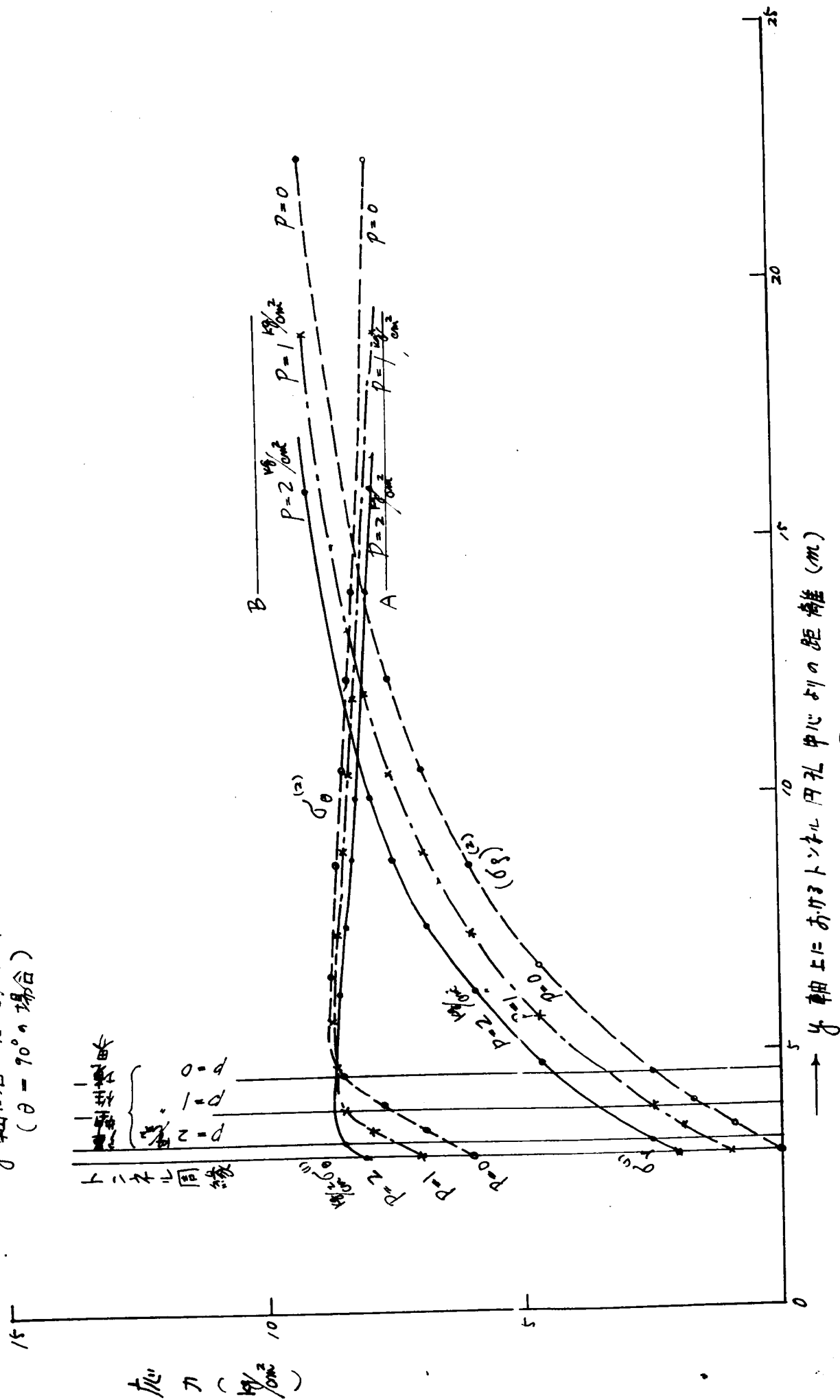


図 2, 33

## 第4節 結 語

前節の計算例によつて考察することとする。円形トンネルの内圧 $P$ はトンネル壁面の反力となる。この $P$ を増大すれば、弾塑性境界の楕円の大きさは小となり、 $P$ が減少すれば弾塑性境界の楕円は大となる。すなわち塑性領域の範囲は拡大することとなる。この楕円の長径 $a$ と短径 $b$ の $P$ による変化は第2.50図に示すように直線性がある。この計算例の場合では $P=2.504 \text{ Kg/cm}^2$ で弾塑性境界の楕円はトンネル円孔と接することとなり、 $P$ が $2.504 \text{ Kg/cm}^2$ より大となればトンネル側壁の一部が塑性領域となり、この大きさ、形については前章のじり線の解法を適用しなければならない。この問題に関して $W. Prager$ と $P. G. Hodge^{37)}$ が述べているように第2.57図において $AB$ 部分が塑性状態となる時、 $AC$ 、 $BC$ じり線と円弧 $AB$ に囲まれた領域が塑性状態となるが、 $AC$ 、 $BC$ のじり線を境としてその外方の弾性領域の応力分布と $ABC$ 塑性領域の応力分布の関連は未解決の問題である。

つきに(2.536)式の条件の下では弾塑性境界はトンネル円孔を取り囲み、 $P$ の変化するとき塑性領域の応力分布と弾性領域の応力分布の関連性については、 $\theta=0^\circ$ のときは第2.52図、 $\theta=90^\circ$ のときは第2.53図となっているが、何れの場合も塑性領域の $\sigma_{\theta}^{(p)}$ 、 $\sigma_r^{(p)}$ の曲線は $P$ の差の値だけ差がついていて平行し、 $P$ の増加と共に応力は増加している。弾性領域における $\sigma_{\theta}^{(e)}$ については、 $\theta=0^\circ$ のとき弾塑性境界において応力の最大値となり、これより外方に向つて $\sigma_{\theta}^{(e)}$ は急激に減少し、 $B$ の値に漸近している。このように弾塑性境界附近で応力の急な変化があるのはトンネル側壁に大なる応力集中を生ずるためである。これに対して $\theta=90^\circ$ のときには $\theta=0^\circ$ のとき程大きな応力集中がおこらないから、弾塑性境界より少し外方の点で $\sigma_{\theta}^{(e)}$ は最大値となり、これより外方に向つて緩慢に減少し $A$ に漸近してゆく。また弾性領域における $\sigma_r^{(e)}$ については、 $\theta=0^\circ$ のときは弾塑性境界の少し外方で最大値となつて、この点より外方に向い緩慢に減少し $A$ の値に漸近している。し、 $\theta=90^\circ$ のときは弾塑性境界を過ぎて外方に向つても $\sigma_r^{(e)}$ の値は増加して $B$ の値に漸近し、弾塑性境界で顕著な変化はない。

また $B$ の値なる程(2.537)式より $C$ は小となる。すなわち弾塑性境界の大きさが小となる。すなわち地山のり率的变化がなる程塑性領域の範囲は小となることを示している。

以上の理論によつてこのような円形トンネルの弾性領域、塑性領域のある場合の弾性領域中の応力分布をも求めることができ、これが塑性領域の大きさ及びその応力分布との関連性につき明らかにすることができた。

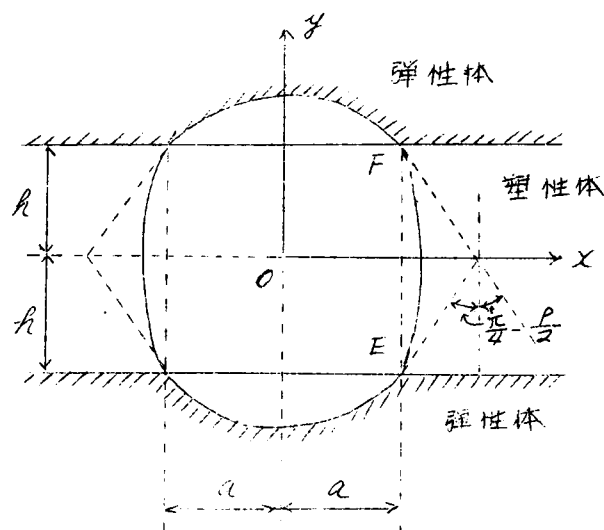
# 第6章 摩擦性塑性体としての水平層を有する地山中の トンネル応力分布<sup>(58)</sup>

## 第1節 摩擦性塑性体の二次元問題における応力の基礎方程式

水平な地表面を有する弾性体の地山中に塑性体とみなされる水平層が介在する場合を仮定する。この塑性層中にトンネルを穿てば、塑性体の物質はトンネル中心方向に塑性流動を起す。この場合支保工で支えて応力の平衡状態をえたときのトンネル周辺の応力分布、塑性流動限界を求める理論について考察することとする。

炭坑においては前述に述べた均質な地山という仮定は適切でない。多分にわたる地質史的年代のときに層をなして沈澱した種々の地層は、その後の地殻運動により岩石化して必然的に地層の複合構造物となる。粒子の大きさ、膠着物質及び弾性的及び塑性的特性について多様に区別されている。また砂岩と泥岩の互層のような場合もこれと同じことがいえる。このような地層が地山の中に自然状態のままにあるときは、地層は膨張することを制限され、その境界面は平行して成層をなしている。種々な層の境は完全に平行な平面になっていて、その中の一層が非常に軟弱であつて、その地層の厚さは全域にわたって一様であるとし、これを塑性体とみなされるものとする。そうしてこの地層の厚さはトンネルの高さよりやや小なりと仮定する。トンネルの構造は塑性体物質がトンネルに膨張してきて、これを削り取つて支えることができるような膨張に耐えることのできる構造とする。この種の向題に関しては従来より R. Fenner<sup>(59)</sup> が取扱つてゐるが、トンネル側壁近傍の応力分布について詳しく述べられていないので、これに關して研究したことを述べる。

地山がトンネルの寸法に較べて無限に広がつていて、坑口より相当の距離の地点の応力状態を考える。しからばトンネルの軸に直交する鉛直平面上の二次元の応力問題として取り扱つてよい。故に第2, 34図のごとくトンネル中心を直交座標の原点にとり、水平軸をx軸、鉛直軸をy軸とする。水平層の厚さは地山の地表面よりの深さに比較して僅小なりとすれば、



第2.34図

水平層の自重は無視して考える。  $\sigma_x$  : 水平方向の直応力,  $\sigma_y$  : 鉛直方向の直応力,  $\tau$  : せん断応力、とすれば、応力の平衡条件式は次式となる。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad \dots \quad (2.6.1)$$

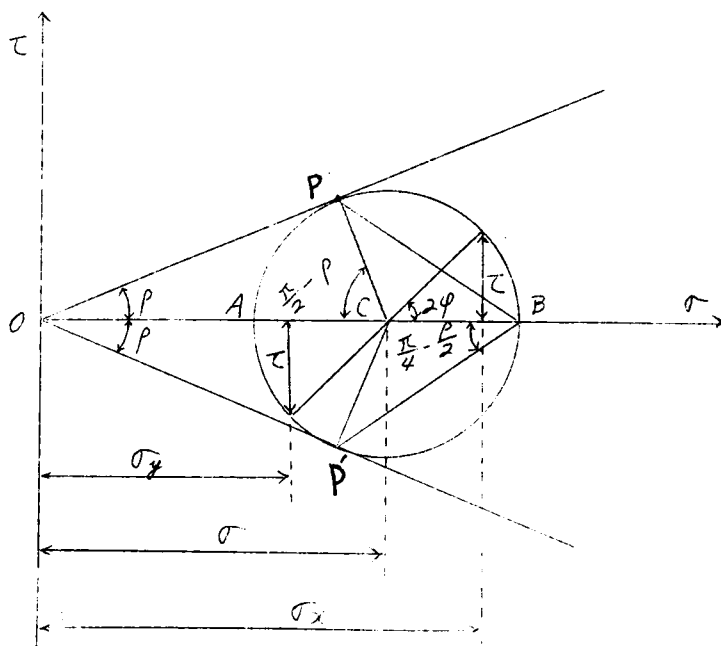
いま  $\rho$ : 塑性体の内部摩擦角,  $\varphi$ : 水平軸と最大主応力のなす角,  $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$  とすれば, 水平層の塑性体の土は粘着力のない場合を考えると第2, 3, 5図に示すように Mohr の応力円とせん断試験の限界線とが切する関係より降伏条件は次式となる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma (1 + \sin p \cos 2\varphi) \\ \sigma_y &= \sigma (1 - \sin p \cos 2\varphi) \\ \tau &= \sigma \sin p \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.6.2)$$

(2.6.2)式を(2.6.1)式に代入して次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sin p \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sin p \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\sigma \sin p \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ + 2\sigma \sin p \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \sin p \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (1 - \sin p \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\sigma \sin p \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ + 2\sigma \sin p \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (2, 6, 3)$$

上式は  $x, y$  が独立変数,  $\sigma, \varphi$  が従属変数となっていて,  $\sigma$  と  $\varphi$  とが  $x, y$  に関する偏導関数の係数の中に入っていて,  $x, y, \sigma, \varphi$  を含む連立偏微分方程式である。



第 2.95 图

$$A_1 = 1 + \sin p \cos 2\varphi, \quad B_1 = \sin p \sin 2\varphi, \quad C_1 = -2\sigma \sin p \sin 2\varphi, \quad D_1 = 2\sigma \sin p \cos 2\varphi,$$

$$A_2 = \sin p \sin 2\varphi, \quad B_2 = (1 - \sin p \cos 2\varphi), \quad C_2 = 2\sigma \sin p \cos 2\varphi, \quad D_2 = 2\sigma \sin p \sin 2\varphi.$$

とする。なお (2.6.3) 式の第1式で  $\sigma$  と  $\varphi$  との  $x, y$  に関する偏導函数を含まない項を  $E_1$  とする。また (2.6.3) 式の第2式で  $\sigma$  と  $\varphi$  との  $x, y$  に関する偏導函数を含まない項を  $E_2$  とすれば、この場合は  $E_1 = 0, E_2 = 0$  となる。次の Poisson Bracket  $\{P\theta\} = P_1\theta_2 - P_2\theta_1$  の計算を行えば、

$$\left. \begin{aligned} a &= \{AC\} = 2\sigma \sin p \cos 2\varphi + 2\sigma \sin^2 p, \\ 2b &= \{AD\} + \{BC\} = 4\sigma \sin p \sin 2\varphi, \\ c &= \{BD\} = 2\sigma \sin^2 p - 2\sigma \sin p \cos 2\varphi, \\ T &= \{AB\} = \cos^2 p, \\ S &= \{BC\} = 2\sigma \sin p \sin 2\varphi, \\ L &= \{AE\} = 0 \\ M &= \{BE\} = 0 \\ \lambda_+ &= \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{\sin 2\varphi + \cos p}{\cos 2\varphi + \sin p} \\ \lambda_- &= \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{\sin 2\varphi - \cos p}{\cos 2\varphi + \sin p} \end{aligned} \right\} \quad (2.6.4)$$

として、(2.6.3)式の連立偏微分方程式を解くことは、(2.6.4)式を用いて次の特有連立方程式<sup>60)</sup>を解くことにより達せられる。 $\alpha, \beta$ を特有変数として、

$$\left. \begin{aligned} C^+ \text{ 曲線; } \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} - (\lambda_+) \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \alpha} &= 0 \\ C^- \text{ 曲線; } \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} - (\lambda_-) \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \beta} &= 0 \\ \Gamma^+ \text{ 曲線; } T \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} + (2\lambda_+ - S) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + (L\lambda_+ - M) \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \alpha} &= 0 \\ \Gamma^- \text{ 曲線; } T \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} + (2\lambda_- - S) \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + (L\lambda_- - M) \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6.5)$$

上式に (2.6.4) 式を代入して、

$$C^+ \text{ 曲線; } \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = \frac{\sin 2\varphi + \cos p}{\cos 2\varphi + \sin p} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \alpha} \quad (2.6.6)$$

$$C^- \text{ 曲線; } \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = \frac{\sin 2\varphi - \cos p}{\cos 2\varphi + \sin p} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \beta} \quad (2.6.7)$$

$$\Gamma^+ \text{ 曲線; } \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} = -2\sigma \tan p \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \quad (2.6.8)$$

$$\Gamma^- \text{ 曲線; } \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} = 2\sigma \tan p \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \quad (2.6.9)$$



上式の  $C+$  曲線,  $C-$  曲線は物理面  $X, \varphi$  についてであり,  $\Gamma+$  曲線,  $\Gamma-$  曲線は応力面の  $\rho$  についてである。物理面と応力面とでは一対一の対応があり,  $C+$  曲線と  $\Gamma+$  曲線,  $C-$  曲線と  $\Gamma-$  曲線とはそれぞれ相対応している。

## 第2節 物理面における特有曲線の性質

$\theta = \alpha, \beta$  の二つの場合に, 物理面の特有曲線  $C+, C-$  曲線がパラメータ  $\theta$  を用いて,

$$X = X(\theta), \quad \varphi = \varphi(\theta)$$

の形で与えられているとき, 特有条件式は次式となる。

$$a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2 - 2b\left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + c\left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)^2 = 0 \quad (2.6.10)^{(1)}$$

上式に (2.6.4) 式を代入して,

$$\begin{aligned} & (2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi + 2\sigma \sin^2 \rho) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2 - 4\sigma \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ & + (2\sigma \sin^2 \rho - 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi) \left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)^2 = 0 \quad (2.6.11) \end{aligned}$$

$$2/\sqrt{2\sigma \sin \rho + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi} \cdot \sqrt{2\sigma \sin \rho - 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi} = 4\sigma \sin \rho \sin 2\varphi$$

なることを利用して, (2.6.11) 式を変形すれば

$$\begin{aligned} & \left\{ \sqrt{2\sigma \sin \rho + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \sqrt{2\sigma \sin \rho - 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi} \frac{\partial X}{\partial \theta} \right\}^2 \\ & = 2\sigma \sin \rho (1 - \sin \rho) \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)^2 \right\} \quad (2.6.12) \end{aligned}$$

となり, 両辺に  $(\partial \theta)^2$  を乗じて変形すれば,

$$\begin{aligned} & \frac{\left\{ \sqrt{2\sigma \sin \rho + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi} d\varphi - \sqrt{2\sigma \sin \rho - 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi} dX \right\}^2}{\left\{ (\sqrt{2\sigma \sin \rho + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi})^2 + (\sqrt{2\sigma \sin \rho - 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi})^2 \right\} (dX^2 + d\varphi^2)} \\ & = \frac{1 - \sin \rho}{2} \quad (2.6.13)^{(2)} \end{aligned}$$

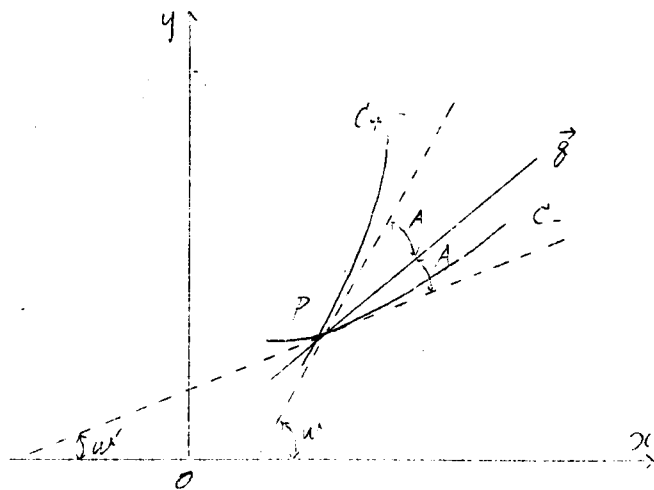
第2.36図において  $X, \varphi$  平面においてベクトル  $\vec{\rho}$  の  $X, \varphi$  成分をそれぞれ

$\sqrt{2\sigma \sin \rho + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi}$  及び  $\sqrt{2\sigma \sin \rho - 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi}$  とする。  $C+, C-$  曲線の交点におけるこれらの曲線の切線と, この交点  $P$  を通る  $\vec{\rho}$  とはす角を求めるには,  $C$  特有曲線の方角  $\rho$  の線素片の直角成分  $dX, d\varphi$  を用いて第2.37図より

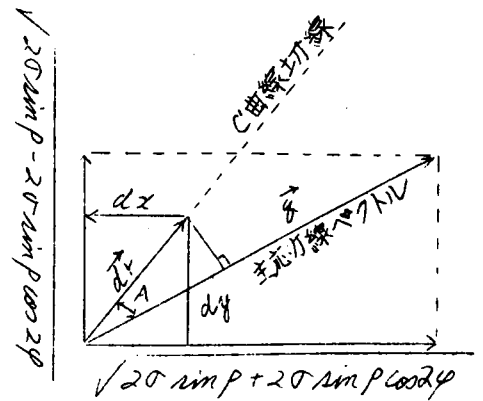
$$\begin{aligned} & \sqrt{2\sigma \sin \rho + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi} d\varphi - \sqrt{2\sigma \sin \rho - 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi} dX \\ & = \vec{\rho} \cdot d\vec{r} \sin A \quad (2.6.14) \end{aligned}$$

$$dX^2 + d\varphi^2 = d\vec{r}^2 \quad (2.6.15)$$

ただし  $A$ ;  $C$  曲線の一つの切線と  $\vec{\rho}$  とはす角, とする。(2.6.15) 式を (2.6.14) 式に代入して



第2.36図



第2.37図

$$A = \sin^{-1} \left\{ \pm \frac{\sqrt{20 \sin p (1 - \sin p)}}{\bar{r}} \right\} \quad (2.6.16)$$

がえられる。しかるに

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \left\{ \left\{ \sqrt{20 \sin p + 20 \sin p \cos 2 \phi} \right\}^2 + \left\{ \sqrt{20 \sin p - 20 \sin p \cos 2 \phi} \right\}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{40 \sin p} \end{aligned}$$

なることを用いて、(2.6.16)式より、

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{p}{2} \quad (2.6.17)$$

(2.6.16)式において複号の現われることはC特有曲線の二分岐  $C_+$ ,  $C_-$  のその交点Pにおける二切線ベクトル  $\vec{r}$  の向と等角  $(\frac{\pi}{4} - \frac{p}{2})$  をなすことを示す。

またP点における  $C_+$ ,  $C_-$  曲線の切線がx軸となす角を第2.36図に示すようにそれぞれ  $u$ ,  $u'$  とする。(2.6.6)式より  $C_+$  曲線の切線傾斜は次式となる。

$$\frac{dy}{dx} = \tan \left\{ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{p}{2} \right) + \phi \right\} = \tan u \quad \text{より}$$

$$u = \frac{\pi}{4} - \frac{p}{2} + \phi \quad \text{となる。}$$

(2.6.7)式より  $C_-$  曲線の切線の傾斜は次式となる。

$$\frac{dy}{dx} = \tan \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{p}{2} \right) + \phi \right\} = \tan u' \quad \text{より}$$

$$u' = - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{p}{2} \right) + \phi \quad \text{となる。}$$

故に  $C_+$  曲線の切線と  $C_-$  曲線のなす角は、

$$u - u' = \frac{\pi}{2} - p \quad \text{となる。}$$

第2図の四角において  $BP$  と  $BP'$  とのなす角は二つの相交わるじり線のなす角であつて  $\frac{\pi}{2} - \rho$  となる。じり線と最大主応力方向となす角は  $\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$  なる角をなすことより、 $\theta$  の方向が最大主応力ならば、 $C+$ 、 $C-$  曲線の方はじり線の方となる。

### 第3節 水平層中のトンネル周辺の応力の解法

#### (A) $\varphi = f(\theta)$ となる領域の解法

この場合の応力状態を決定する境界条件を考えるに、トンネルより相当離れた所では水平層と上下の鍾柱体との境界の二つの水平直線は一つのじり線となり、トンネル右方無限遠まで考えると、下の水平境界直線上では最大主応力線は  $+x$  軸方向と  $\varphi = (\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2})$  なる角をなし、上の水平境界直線上では最大主応力線は  $+x$  軸方向と  $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}$  なる角をなし、この領域の水平層中では  $\varphi$  の値は  $\theta$  の変化に従い  $(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2})$  より  $(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2})$  まで変化し  $x$  には無関係である。

故にこの領域中では  $\varphi = f(\theta)$  として (2.6.3) 式より、

$$(1 + \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \quad (2.6.18)$$

$$\sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (1 - \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + 2\sigma \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \quad (2.6.19)$$

(2.6.18)  $\times (1 - \sin \rho \cos 2\varphi)$  - (2.6.19)  $\times \sin \rho \sin 2\varphi$  より、

$$\cos^2 \rho \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 2\sigma \sin \rho (\sin \rho - \cos 2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (2.6.20)$$

(2.6.18)  $\times \sin \rho \sin 2\varphi$  - (2.6.19)  $\times (1 + \sin \rho \cos 2\varphi)$  より

$$\cos^2 \rho \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = -2\sigma \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (2.6.21)$$

(2.6.20) 式の両辺を  $\theta$  で微分し、(2.6.21) 式の両辺を  $x$  で微分して両方の  $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial \theta}$  を等しくおけば、

$$(\cos 2\varphi - \sin \rho) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - 2 \sin 2\varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 = 0 \quad (2.6.22)$$

がえられ、この微分方程式を解いて、

$$C\theta = 2\varphi \sin \rho - \sin 2\varphi + C_2 \quad (2.6.23)$$

なる解がえられる。ただし  $C_1, C_2$  は積分定数である。つきに (2.6.6) 式より、

$$\frac{d\theta}{d\varphi} / \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\sin 2\varphi + \cos \rho}{\cos 2\varphi + \sin \rho} \quad (2.6.24)$$

(2.6.23) 式を  $\varphi$  で微分してえられる  $\frac{d\theta}{d\varphi}$  を (2.6.24) 式に代入して求められる式を積分して、

$$Cx = -2\varphi \cos \rho - \cos 2\varphi + \text{const.}(\rho) \quad (2.6.25)$$

がえられ, (2.6.25) 式は  $C_+$  曲線を表わす。また (2.6.7) 式より,

$$\frac{dy}{d\varphi} / \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\sin 2\varphi - \cos \rho}{\cos 2\varphi + \sin \rho} \quad (2.6.26)$$

(2.6.23) 式を  $\varphi$  で微分してえられる  $\frac{dy}{d\varphi}$  を (2.6.26) 式に代入して求められる式をさらに積分して

$$Cx = 2\varphi \cos \rho - \cos 2\varphi + \text{const.}(\alpha) \quad (2.6.27)$$

がえられ, (2.6.27) 式は  $C_-$  曲線を表わす。

次に  $\Gamma$  特有曲線の方程式を用いて  $\sigma$  を求める。(2.6.8) 式及び (2.6.9) 式を用いて

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} d\beta = \sigma \left\{ \tan \rho \frac{\partial(-2\varphi)}{\partial \alpha} d\alpha + \tan \rho \frac{\partial(2\varphi)}{\partial \beta} d\beta \right\}$$

$\Gamma_+$  曲線,  $\Gamma_-$  曲線はそれぞれ  $C_+$  曲線,  $C_-$  曲線に対応する故に, 上式の右辺第1項の  $-2\varphi$  には (2.6.25) 式を用い, 第2項の  $2\varphi$  には (2.6.27) 式を用いて

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \tan \rho \cdot d \left( \frac{Cx + \cos 2\varphi}{\cos \rho} \right)$$

となり, 上式を積分して次式がえられる。

$$\sigma = C_1 \exp \left\{ \frac{\tan \rho}{\cos \rho} (\cos 2\varphi + Cx) \right\} \quad (2.6.28)$$

ただし  $C_1$  は積分常数である。

$y=0$  のとき  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  なる故に, これを (2.6.23) 式に代入すれば  $C_2 = -\pi \sin \rho$  となる。故に (2.6.23) 式は,

$$Cy = (2\varphi - \pi) \sin \rho - \sin 2\varphi \quad (2.6.29)$$

となる。

いま氷平層の厚さを  $2h$  とすれば, 塑性体と弾性体との下方の境界面すなわち,  $y = -h$  において  $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$  となる故に, (2.6.29) 式より

$$C = \frac{(\pi + 2\rho) \sin \rho + 2 \cos \rho}{2h}$$

となり, これを (2.6.29) 式に代入して次式がえられる。

$$y = 2h \frac{(2\varphi - \pi) \sin \rho - \sin 2\varphi}{(\pi + 2\rho) \sin \rho + 2 \cos \rho} \quad (2.6.30)$$

また  $C$  の値を (2.6.28) 式に代入すれば,

$$\sigma = C_1 \exp \left\{ \frac{\tan \rho}{\cos \rho} \left\{ \cos 2\varphi + \frac{(\pi + 2\rho) \sin \rho + 2 \cos \rho}{2h} x \right\} \right\} \quad (2.6.31)$$

となり, (2.6.31) 式を (2.6.2) 式に代入して次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= C_1 (1 + \sin p \cos 2\varphi) \exp \left\{ \frac{\tan p}{\cos p} \left\{ \cos 2\varphi + \frac{(\pi + 2p) \sin p + 2 \cos p}{2h} x \right\} \right\} \\ \sigma_y &= C_1 (1 - \sin p \cos 2\varphi) \exp \left\{ \frac{\tan p}{\cos p} \left\{ \cos 2\varphi + \frac{(\pi + 2p) \sin p + 2 \cos p}{2h} x \right\} \right\} \\ \tau &= C_1 \sin p \sin 2\varphi \exp \left\{ \frac{\tan p}{\cos p} \left\{ \cos 2\varphi + \frac{(\pi + 2p) \sin p + 2 \cos p}{2h} x \right\} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.6.32)$$

次に \$C\$ の値を (2.6.25) 式及び (2.6.27) 式に代入すれば上り線の \$C\_+\$, \$C\_-\$ の面曲線が求められる。これを (2.6.30) 式とともに書いて、\$\varphi\$ をパラメーターとして表わせれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} y_1 = y_2 &= 2h \frac{(2\varphi - \pi) \sin p - \sin 2\varphi}{(\pi + 2p) \sin p + 2 \cos p} \\ C_+ \sim \text{上り線}; x_1 &= \frac{-2\varphi \cos p - \cos 2\varphi}{(\pi + 2p) \sin p + 2 \cos p} 2h + \log t(\beta) \\ C_- \sim \text{上り線}; x_2 &= \frac{2\varphi \cos p - \cos 2\varphi}{(\pi + 2p) \sin p + 2 \cos p} 2h + \log t(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (2.6.33)$$

ただし \$C\_+\$ ~ 上り線上の点の座標は \$x\_1, y\_1\$, \$C\_-\$ ~ 上り線上の点の座標は \$x\_2, y\_2\$ である。

#### (B) \$\varphi = f(x, y)\$ となる領域の解法

つきにトンネル側壁近傍の上り線及び応力を求める方法について述べる。(2.6.8) 式及び (2.6.9) 式を積分したものを (2.6.6) 式及び (2.6.7) 式とそれぞれ組み合わせる。

\$C\_+\$ 上り線上においては、

$$\frac{d\varphi}{dx} = \tan \left\{ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{p}{2} \right) + \varphi \right\} \text{ 及び } \log \sigma = -2 \tan p \cdot \varphi + 2R(\beta) \quad (2.6.34)$$

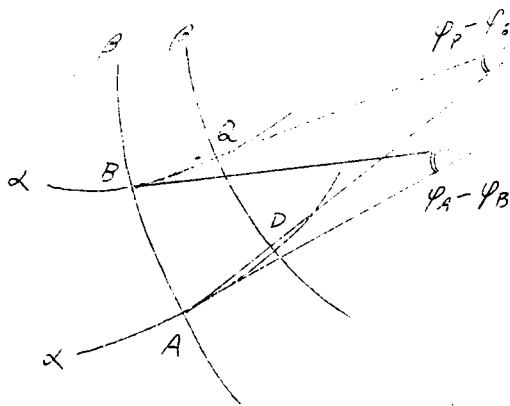
となる。ただし \$2R(\beta)\$ は \$\beta\$ に関する函数である。故に \$C\_+\$ 上り線を \$\alpha\$-上り線と称することにする。

\$C\_-\$ 上り線上においては、

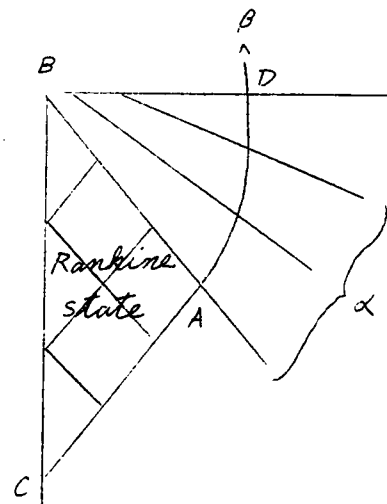
$$\frac{d\varphi}{dx} = \tan \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{p}{2} \right) + \varphi \right\} \text{ 及び } \log \sigma = 2 \tan p \cdot \varphi + 2S(\alpha) \quad (2.6.35)$$

となる。ただし \$2S(\alpha)\$ は \$\alpha\$ に関する函数である。故に \$C\_-\$ 上り線を \$\beta\$-上り線と称することにする。(2.6.34) 式及び (2.6.35) 式において物理面の点と応力面の点との間には一対一の対応がある。

第2.38 図において \$\alpha\$-上り線と \$\beta\$-上り線との交点 \$Q, P, A, B\$ の \$\sigma\$ の値をそれぞれ \$\sigma\_Q, \sigma\_P, \sigma\_A, \sigma\_B\$ とし、\$\varphi\$ の値をそれぞれ \$\varphi\_Q, \varphi\_P, \varphi\_A, \varphi\_B\$ とする。



第 2.38 図



第 2.39 図

(2.6.34) 式及び (2.6.35) 式を用いて  $Q, B, A$  の道順で計算して

$$\begin{aligned} \log \sigma_Q - \log \sigma_A &= (\log \sigma_Q - \log \sigma_B) + (\log \sigma_B - \log \sigma_A) \\ &= 2 \tan \rho (2\varphi_B - \varphi_Q - \varphi_A) \end{aligned}$$

また  $Q, P, A$  の道順で計算して,

$$\begin{aligned} \log \sigma_Q - \log \sigma_A &= \log \sigma_Q - \log \sigma_P + (\log \sigma_P - \log \sigma_A) \\ &= 2 \tan \rho (\varphi_Q + \varphi_A - 2\varphi_P) \end{aligned}$$

となり、上の二式を等しくおき次式がえられる。

$$\varphi_Q - \varphi_P = \varphi_B - \varphi_A \quad \dots \dots \dots (2.6.36)$$

すなわち等塑性変性体の場合においても塑性論における Hencky の第 1 定理が成立することとなる。また (2.6.25) 式より  $\beta$ -より線に沿って、

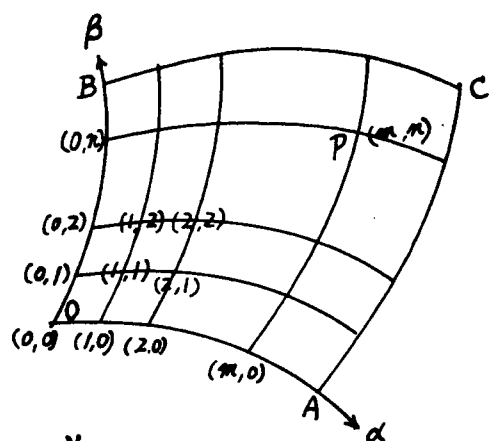
$$\log \sigma_Q - \log \sigma_P = 2 \tan \rho \cdot (\varphi_Q - \varphi_P), \quad \log \sigma_B - \log \sigma_A = 2 \tan \rho \cdot (\varphi_B - \varphi_A)$$

となり、(2.6.36) 式を適用して次式がえられる。

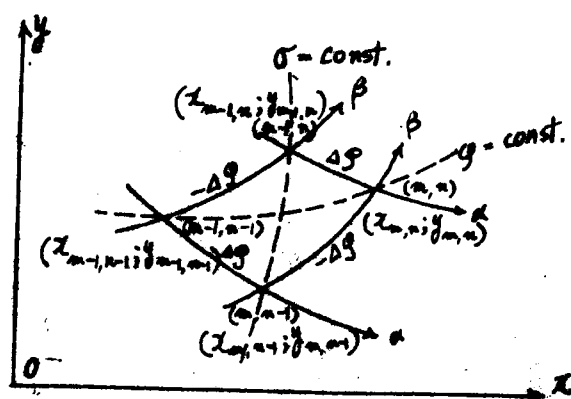
$$\log \sigma_Q - \log \sigma_P = \log \sigma_B - \log \sigma_A \quad \dots \dots \dots (2.6.37)$$

第 2.39 図に示す領域  $A, B, D$  において  $AD$  なる曲線を  $\beta$ -より線とし、 $AB$  なる直線を  $\alpha$ -より線とすれば、この二線によつて規定される領域  $A, B, D$  中のより線は (2.6.36) 式により、すべての  $\alpha$ -より線は直線となる。

いま境界条件として  $\alpha$  の  $\alpha$ -より線と  $\beta$  の  $\beta$ -より線がそれぞれ (2.6.30) 式の  $C^+$ -より線、 $C^-$ -より線として已知の場合の解法について述べる。



第2.40図



第2.41図

第2.40図においてOA線をbase  $\alpha$ -line, OB線をbase  $\beta$ -lineとすれば, 此れより規定される塑性領域OACB内の座標及びその点の応力を決定できる。(m,n) 点の $\varphi$ を $\varphi_{m,n}$ とすれば(2.6.36)式より,

$$\varphi_{m,n} = \varphi_{m,0} + \varphi_{0,n} - \varphi_{0,0} \quad (2.6.38)$$

OA線とOB線との上では $\varphi$ の値已知なる故 $\varphi_{0,0}$ ,  $\varphi_{1,0}$ ,  $\varphi_{2,0}$  より $\varphi_{1,1}$  を求め,  $\varphi_{1,1}$ ,  $\varphi_{2,0}$ ,  $\varphi_{1,0}$  より $\varphi_{2,1}$ を求め, 以下同様にしてこの領域中のすべての点の $\varphi$ の値を求めることができる。

またOA線, OB線上それぞれbase pointとして(0,0), (1,0), (2,0)..... (m,0), ..... 及び(0,0), (0,1), (0,2), ..... (0,n)..... をとり, これらはそれぞれ一定の $\varphi$ の増分 $\Delta\varphi$ ,  $-\Delta\varphi$ の値だけ間隔をもつようにする。このようにして作られるequiangular netにより,  $\sigma$ なる応力分布を明瞭にすることができる。すなわち第2.41図において(2.6.37)式より次式がえられる。

$$\log \sigma_{m,n} = \log \sigma_{m,n-1} + \log \sigma_{m-1,n} - \log \sigma_{m-1,n-1} \quad (2.6.39)$$

これより(2.6.38)式の手続きと同様にこの領域中のすべての点の $\sigma$ の値を求めることができる。また(2.6.39)式より,

$$\begin{aligned} \log \sigma_{m-1,n} &= \log \sigma_{m,n} - \log \sigma_{m,n-1} - (\log \sigma_{m,n-1} - \log \sigma_{m-1,n-1}) \\ &\quad + \log \sigma_{m,n-1}, \end{aligned}$$

に變形して, (2.6.34)式及び(2.6.35)式を用い,  $\varphi_{m,n} - \varphi_{m,n-1} = -\Delta\varphi$ ,  $\varphi_{m,n-1} - \varphi_{m-1,n-1} = \Delta\varphi$  となることを用いて,

$$\log \sigma_{m-1,n} = \log \sigma_{m,n-1}$$

となる。すなわちequiangular netにおける(m,n-1)点と(m-1,n)点なる

opposite nodal points を通る diagonal curve は  $\sigma = \text{const.}$  なる曲線となる。

また (2.6.38) 式より

$$\varphi_{m,n} = (\varphi_{m,n-1} - \varphi_{m-1,n-1}) + (\varphi_{m-1,n} - \varphi_{m-1,n-1}) + \varphi_{m-1,n-1}$$

の形をえて,  $\varphi_{m,n-1} - \varphi_{m-1,n-1} = \Delta\varphi$ ,  $\varphi_{m-1,n} - \varphi_{m-1,n-1} = -\Delta\varphi$  なることを用いて,

$$\varphi_{m,n} = \varphi_{m-1,n-1}$$

となる。すなわち equiangular net における  $(m-1, n-1)$  点と  $(m, n)$  点なる opposite nodal points を通る diagonal curve は  $\varphi = \text{const}$  なる曲線となる。

第240図における  $\alpha$ -上り線,  $\beta$ -上り線の交点としてきまる細目の各節点の座標は近似逐次法<sup>(3)</sup>により求むる。すなわち第241図において  $(x_{m-1,n-1}; y_{m-1,n-1})$ ,  $(x_{m,n-1}; y_{m,n-1})$ ,  $(x_{m-1,n}; y_{m-1,n})$  の3点の座標が已知のとき,  $(m, n-1)$  点を通る  $\beta$ -上り線と  $(m-1, n)$  点を通る  $\alpha$ -上り線との交点  $(m, n)$  の座標  $(x_{m,n}; y_{m,n})$  は次のごとくして求むる。(2.6.34) 式及び (2.6.35) 式の第1式を次の形に書き表わす。

$\alpha$ -上り線上では

$$dy = \tan \left\{ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \varphi \right\} dx$$

$\beta$ -上り線上では

$$dy = \tan \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \varphi \right\} dx$$

ここで  $dy \rightarrow \Delta y$ ,  $dx \rightarrow \Delta x$  とし,  $\varphi$  の値として上り線上の隣接せる節点の  $\varphi$  の平均値をとる。しからば上式よりそれぞれ次式が得られる。

$$y_{m,n} - y_{m-1,n} = \left\{ \tan \left\{ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n}) \right\} \right\} (x_{m,n} - x_{m-1,n})$$

$$y_{m,n} - y_{m,n-1} = \left\{ \tan \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1}) \right\} \right\} (x_{m,n} - x_{m,n-1})$$

これより  $x_{m,n}$ ,  $y_{m,n}$  を求めれば,

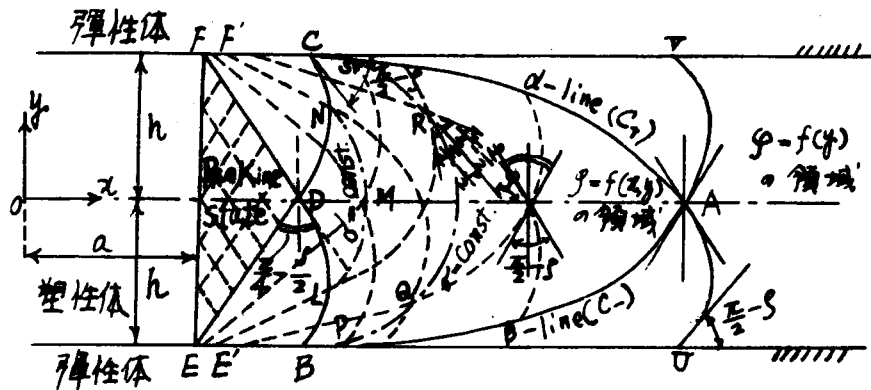
$$\left. \begin{aligned} x_{m,n} &= \frac{(y_{m-1,n} - y_{m,n-1}) + \left\{ \tan \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1}) \right\} \right\} x_{m,n-1}}{\tan \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1}) \right\}} \\ &\quad - \frac{\left\{ \tan \left\{ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n}) \right\} \right\} x_{m-1,n}}{-\tan \left\{ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n}) \right\}} \\ y_{m,n} &= \frac{(x_{m-1,n} - x_{m,n-1}) + \left\{ \cot \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1}) \right\} \right\} y_{m,n-1}}{\cot \left\{ - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) + \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1}) \right\}} \end{aligned} \right\}$$



$$\frac{-\left\{\cot\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\frac{1}{2}(\varphi_{m,n}+\varphi_{m-1,n})\right\}\right\}y_{m-1,n}}{-\cot\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\frac{1}{2}(\varphi_{m,n}+\varphi_{m-1,n})\right\}}$$

(2.6.40)

この近似解法は網目を細かくするほど精度はよくなる。



第2.42図

第2.42図に示すごとくトンネル中心Oより右側について考える。AC, ABなる曲線より右方無限遠では  $\varphi=f(\varphi)$  なる条件が満たされる故、上り線は(2.6.33)式で表わされ、応力は(2.6.32)式により求められる。(2.6.33)式で表わされるAC曲線, AB曲線はそれぞれ base  $\alpha$ -line, base  $\beta$ -lineで、この曲線上での  $\varphi$  は(2.6.31)式で表わされる。これらの base slip line で規定される塑性域は ACDB であり、この領域では(2.6.38)式, (2.6.39)式及び(2.6.40)式によりそれぞれ  $\varphi$  の及び上り線上の各節点の座標がきまり、かつD点の応力を求められる。

次に FDE なる領域は Rankine state とみなされ、上り線は直線である。そうして2組の上り線は鉛直方向と  $\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}$  の角をなす。Rankine state の領域中のすべての節点では最小主応力は水平方向、最大主応力は鉛直方向となり、その値は皆等しく、D点の応力で表わされる。故にトンネルの形はトンネルの側壁の曲線がE, Fを通りEDF内に存在するならば、側壁に作用する水平応力  $\sigma_{ax}$  は皆等しく、D点の水平応力と等しくなる。鉛直線EFはトンネル中心Oより  $a$  なる距離にあるとすれば、D点の座標もきまり、第2.42図より  $(a+h\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}), 0)$  なる座標となる。(D点の水平応力) =  $\sigma_{ax}$  より(2.6.28)式中の  $C_1$  なる積分定数が  $\sigma_{ax}$  により表わされる。故に DC 曲線, DB 曲線より右方の領域の応力は  $\sigma_{ax}$  の函数として表わされることとなる。

次に DCF の塑性域は境界上り線としては DC 曲線と DF 直線により規定され、曲線 DC 上の各点を通り、この曲線と  $\frac{\pi}{2}-\rho$  の角をなす他の上り線は(2.6.36)式より直線となる。たとえば曲線 DC 上の一点 N を通る直線 NF' 上ではそれぞれ(2.6.34)式及

ひ(2.6.36)式よりの  $\varphi$  はすべて  $N$  点の  $\sigma_x$  の値に等しくなるから、この領域中の応力も  $\sigma_{ax}$  の函数として表わされる。領域  $DBE$  も全く同様である。

#### 第4節 塑性流動限界

水平層中にトンネルを穿ち摩擦性塑性物質が塑性流動を起し、トンネルに膨張してきたものを削り取り、支保工で側壁を支えたとき、塑性流動を起した領域と起さない領域との境界すなわち塑性流動限界の形及びその位置を求める。いま地山は水平な地表面をもつとし、トンネル中心は地表面より  $H$  なる深さにあるとする。また水平層より上にある地山の単位容積当たりの重さを  $\gamma$  とする。  $N_p$  ; 摩擦性塑性体の flow value とすれば、

$$N_p = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \right) = \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho}$$

塑性流動限界を求める条件式は、初期応力としての主応力の和と  $\sigma_x + \sigma_y$  とが等しいことよりえられ次式となる。

$$\gamma H + \frac{\gamma H}{N_p} = \sigma_x + \sigma_y = 2\sigma \quad (2.6.41)$$

第2.42図の  $AC$ ,  $AB$  両曲線より外方の  $\varphi = f(\theta)$  の領域では  $\sigma_x, \sigma_y$  の値は(2.6.32)式を用いて、これを(2.6.41)式に代入して  $x$  を求める。この領域中の塑性流動限界は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2R}{(\pi+2\rho)\sin\rho+2\cos\rho} \left\{ \frac{\cos\rho}{\tan\rho} \left\{ \log \frac{\gamma H(1+N_p)}{2C/N_p} \right\} - \cos 2\varphi \right\} \\ \theta &= 2R \frac{(2\rho-\pi)\sin\rho - \sin 2\varphi}{(\pi+2\rho)\sin\rho+2\cos\rho} \end{aligned} \right\} \quad (2.6.42)$$

すなわち  $x, \theta$  は  $\varphi$  をパラメータとして表わされる。ただし  $\varphi$  の値は  $\theta = -R$  における  $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$  なる値より、 $\theta = 0$  における  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  なる値を通過して、 $\theta = R$  における  $\varphi = \frac{3}{4}\pi + \frac{\rho}{2}$  なる値まで変化する。

次に第2.42図の  $ABDC$  なる領域における塑性流動限界を求める。2組のより線の交点の中で *opposite nodal points* となる点を通る *diagonal curve* が  $x$  軸を切る点でその切線の方が鉛直となるとき *diagonal curve* に沿うのはすべて等しく、この  $\sigma$  が(2.6.41)式を満足するとき、この *diagonal curve* が塑性流動限界となる。 $FDC$  及び  $EDB$  の領域中の塑性流動限界を求めるには、たとえば第2.42図における  $E'LMNF'$  なる線に沿うのはすべて等しく、この  $\sigma$  が(2.6.41)式を満足せば、この線が塑性流動限界となる。

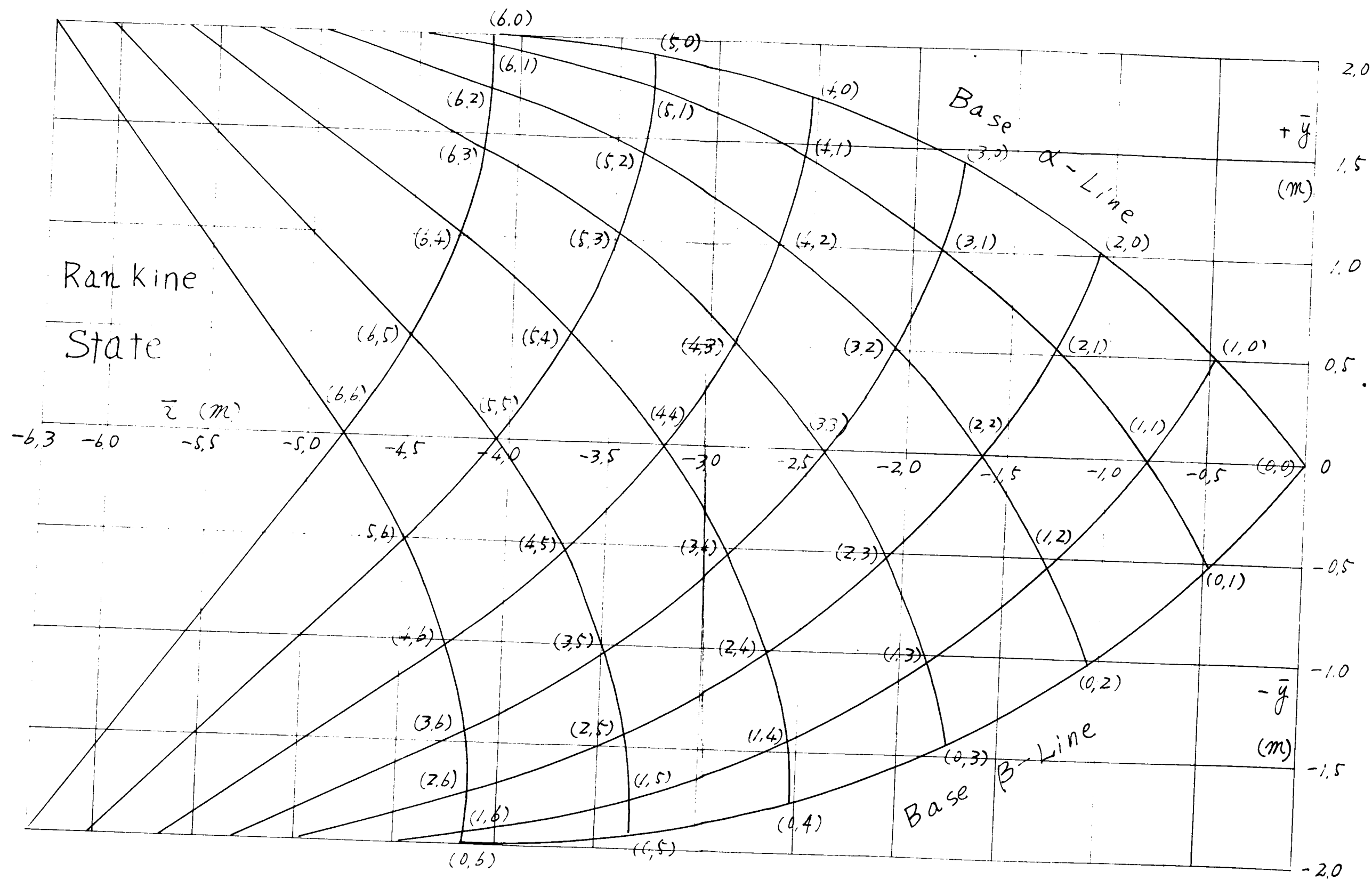
#### 第5節 計算例

トンネルの形は矩形とし  $a = b = 2^m$ ,  $\rho = 15^\circ$ ,  $H = 300^m$ ,  $\gamma = 2.4^t/m^3$  とする。いま近似逐次計算法により計算するため、 $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} = 37^\circ$  より  $\varphi = \frac{3}{4}\pi + \frac{\rho}{2} = 143^\circ$  迄を  $1/2$  等分して  $\Delta\varphi = 8^\circ 50'$  の間隔に分け、第2.42図の  $A$  点を通る二つの

り線を(2.6.33)式により求めれば、曲線CAUはC+曲線(base  $\alpha$ -line)となり、曲線BADはC-曲線(base  $\beta$ -line)となる。曲線AC, ABを base lineとして領域ABDC内の $\varphi$ 及び各節点のA点を原点とした座標( $\bar{x}, \bar{y}$ )をそれぞれ(2.6.38)式及び(2.6.40)式により求めれば $\bar{AD}=4.82m$ となる。故に原点をOとするA点の座標は $\bar{x}=0.33m$ ,  $\bar{y}=0m$ となり、座標原点をOとするABDC内の節点の座標( $x, y$ )及び $\varphi$ を表-2.17に示し、上り線及び各節点の記号( $m, n$ )を第2.43図に示す。

表-2.17 第2.42図におけるABCD内の各節点の $\varphi$ 及び $x, y$ の値  
(ただし $x, y$ の単位;  $m$ )

( $m, n$ )	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)	(6,0)
$\varphi$	$90^\circ$	$98^\circ 50'$	$107^\circ 40'$	$116^\circ 30'$	$125^\circ 20'$	$134^\circ 10'$	$143^\circ$
$x$	0.33	2.86	7.27	6.58	5.81	4.99	4.17
$y$	0	0.52	1.02	1.44	1.75	1.93	2.00
( $m, n$ )	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
$\varphi$	$81^\circ 10'$	$90^\circ$	$98^\circ 50'$	$107^\circ 40'$	$116^\circ 30'$	$125^\circ 20'$	$134^\circ 10'$
$x$	7.86	7.53	7.06	6.47	5.78	5.00	4.18
$y$	-0.52	0	0.54	1.03	1.44	1.76	1.95
( $m, n$ )	(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
$\varphi$	$72^\circ 20'$	$81^\circ 10'$	$90^\circ$	$98^\circ 50'$	$107^\circ 40'$	$116^\circ 30'$	$125^\circ 20'$
$x$	7.27	7.06	6.71	6.25	5.66	4.96	4.19
$y$	-1.02	-0.54	0	0.52	1.01	1.43	1.74
( $m, n$ )	(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
$\varphi$	$63^\circ 30'$	$72^\circ 20'$	$81^\circ 10'$	$90^\circ$	$98^\circ 50'$	$107^\circ 40'$	$116^\circ 30'$
$x$	6.58	6.47	6.25	5.92	5.45	4.85	4.16
$y$	-1.44	-1.03	-0.52	0	0.53	1.03	1.44
( $m, n$ )	(0,4)	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
$\varphi$	$54^\circ 40'$	$63^\circ 30'$	$72^\circ 20'$	$81^\circ 10'$	$90^\circ$	$98^\circ 50'$	$107^\circ 40'$
$x$	5.81	5.78	5.66	5.45	5.11	4.63	4.05
$y$	-1.75	-1.44	-1.01	-0.53	0	0.54	1.02
( $m, n$ )	(0,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
$\varphi$	$45^\circ 50'$	$54^\circ 40'$	$63^\circ 30'$	$72^\circ 20'$	$81^\circ 10'$	$90^\circ$	$98^\circ 50'$
$x$	4.99	5.00	4.96	4.85	4.63	4.28	3.83
$y$	-1.93	-1.76	-1.43	-1.03	-0.54	0	0.51
( $m, n$ )	(0,6)	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
$\varphi$	$37^\circ$	$45^\circ 50'$	$54^\circ 40'$	$63^\circ 30'$	$72^\circ 20'$	$81^\circ 10'$	$90^\circ$
$x$	4.17	4.18	4.19	4.16	4.05	3.83	3.51
$y$	-2.00	-1.95	-1.74	-1.44	-1.02	-0.51	0



第2,43图



表-2.18 第2.42図のABDC内の各節点の $\log \sigma_{m,n}$ の値  
(ただし  $\sigma_{m,n}$  の単位 ;  $\text{kg/cm}^2$ )

$(m,n)$	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)	(6,0)
$\log \sigma_{m,n}$	$1.528 + \log C$	$1.439 + \log C$	$1.350 + \log C$	$1.263 + \log C$	$1.175 + \log C$	$1.085 + \log C$	$0.996 + \log C$
$(m,n)$	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
$\log \sigma_{m,n}$	$1.439 + \log C$	$1.350 + \log C$	$1.263 + \log C$	$1.175 + \log C$	$1.085 + \log C$	$0.996 + \log C$	$0.907 + \log C$
$(m,n)$	(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
$\log \sigma_{m,n}$	$1.350 + \log C$	$1.263 + \log C$	$1.175 + \log C$	$1.085 + \log C$	$0.996 + \log C$	$0.907 + \log C$	$0.819 + \log C$
$(m,n)$	(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
$\log \sigma_{m,n}$	$1.263 + \log C$	$1.175 + \log C$	$1.085 + \log C$	$0.996 + \log C$	$0.907 + \log C$	$0.819 + \log C$	$0.730 + \log C$
$(m,n)$	(0,4)	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
$\log \sigma_{m,n}$	$1.175 + \log C$	$1.085 + \log C$	$0.996 + \log C$	$0.907 + \log C$	$0.819 + \log C$	$0.730 + \log C$	$0.641 + \log C$
$(m,n)$	(0,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
$\log \sigma_{m,n}$	$1.085 + \log C$	$0.996 + \log C$	$0.907 + \log C$	$0.819 + \log C$	$0.730 + \log C$	$0.641 + \log C$	$0.552 + \log C$
$(m,n)$	(0,6)	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
$\log \sigma_{m,n}$	$0.996 + \log C$	$0.907 + \log C$	$0.819 + \log C$	$0.730 + \log C$	$0.641 + \log C$	$0.552 + \log C$	$0.463 + \log C$

表-2.19 第2.42図のABDC内の各節点の $\sigma_{m,n}$   
(単位 ;  $\text{kg/cm}^2$ )

$(m,n)$	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)	(6,0)
$\sigma_{m,n}$	$4.003 \sigma_{ax}$	$3.662 \sigma_{ax}$	$3.353 \sigma_{ax}$	$3.074 \sigma_{ax}$	$2.812 \sigma_{ax}$	$2.573 \sigma_{ax}$	$2.354 \sigma_{ax}$
$(m,n)$	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
$\sigma_{m,n}$	$3.662 \sigma_{ax}$	$3.353 \sigma_{ax}$	$3.074 \sigma_{ax}$	$2.812 \sigma_{ax}$	$2.573 \sigma_{ax}$	$2.354 \sigma_{ax}$	$2.153 \sigma_{ax}$
$(m,n)$	(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
$\sigma_{m,n}$	$3.353 \sigma_{ax}$	$3.074 \sigma_{ax}$	$2.812 \sigma_{ax}$	$2.573 \sigma_{ax}$	$2.354 \sigma_{ax}$	$2.153 \sigma_{ax}$	$1.970 \sigma_{ax}$
$(m,n)$	(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
$\sigma_{m,n}$	$3.074 \sigma_{ax}$	$2.812 \sigma_{ax}$	$2.573 \sigma_{ax}$	$2.354 \sigma_{ax}$	$2.153 \sigma_{ax}$	$1.970 \sigma_{ax}$	$1.802 \sigma_{ax}$
$(m,n)$	(0,4)	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
$\sigma_{m,n}$	$2.812 \sigma_{ax}$	$2.573 \sigma_{ax}$	$2.354 \sigma_{ax}$	$2.153 \sigma_{ax}$	$1.970 \sigma_{ax}$	$1.802 \sigma_{ax}$	$1.650 \sigma_{ax}$
$(m,n)$	(0,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
$\sigma_{m,n}$	$2.573 \sigma_{ax}$	$2.354 \sigma_{ax}$	$2.153 \sigma_{ax}$	$1.970 \sigma_{ax}$	$1.802 \sigma_{ax}$	$1.650 \sigma_{ax}$	$1.510 \sigma_{ax}$
$(m,n)$	(0,6)	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
$\sigma_{m,n}$	$2.354 \sigma_{ax}$	$2.153 \sigma_{ax}$	$1.970 \sigma_{ax}$	$1.802 \sigma_{ax}$	$1.650 \sigma_{ax}$	$1.510 \sigma_{ax}$	$1.381 \sigma_{ax}$

つきに(2.6.31)式の対数をとつた式より曲線AC, AB上の $\log \sigma$ の値を求め、  
(2.6.39)式より第2.42図のABDC内の節点(m, n)の $\log \sigma_{m,n}$ を求めれば、  
表-2.18となる。

この表の値より第2.42図のD点、すなわち(6.6)節点の応力は $\sigma = 1.589 C_1$ となり、  
(6.6)点の水平応力は $\sigma_{ax}$ なる故に、

$$\sigma_x = 1.589 (1 + 0.276 \cos 2\pi) C_1 = \sigma_{ax}$$

より  $C_1 = 0.869 \sigma_{ax}$  となる。これを表-2.18に代入すれば、節点(m, n)の $\sigma_{m,n}$   
を $\sigma_{ax}$ で表わせる。この値を表-2.19に示す。

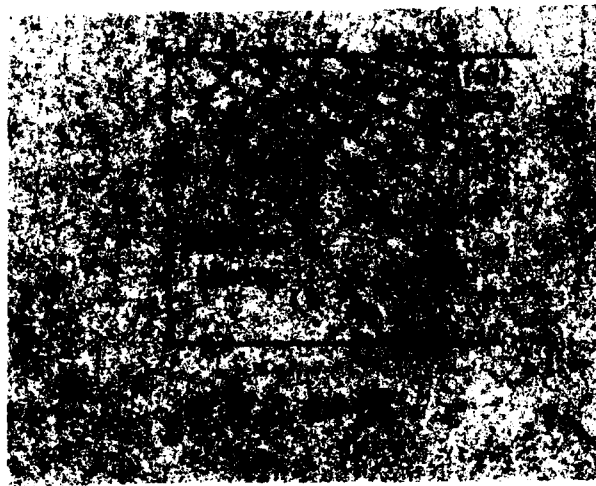
表-2.19の $\sigma$ の値及び表-2.17の $\varphi$ の値を(2.6.2)式に代入して、第2.42図のA  
BDC内のすべての応力を $\sigma_{ax}$ で表わすことができる。また $C_1$ の値を(2.6.32)式  
に代入して第2.42図のBACの右側外方の領域のすべての応力が求まる。すなわち、

$$\sigma_x = 0.869 \sigma_{ax} (1 + 0.276 \cos 2\varphi) \exp \left[ 0.298 \left( \cos 2\varphi + \frac{x}{136} \right) \right]$$

$$\sigma_y = 0.869 \sigma_{ax} (1 - 0.276 \cos 2\varphi) \exp \left[ 0.298 \left( \cos 2\varphi + \frac{x}{136} \right) \right]$$

$$\tau = 0.240 \sigma_{ax} \sin 2\varphi \cdot \exp \left[ 0.298 \left( \cos 2\varphi + \frac{x}{136} \right) \right]$$

となる。ただし $\varphi$ の値は(2.6.30)式により求められる。



第2.42図のCDFの領域の中心線の中直線となる一群は第2.44図に示す(6.1)K,  
(6.2)J, (6.3)I, (6.4)H, (6.5)G となり、この直線の水平線となす角はそれぞれ

$$\frac{3}{4}\pi + \frac{\rho}{2} - \varphi_{6.1}, \quad \frac{3}{4}\pi + \frac{\rho}{2} - \varphi_{6.2}, \quad \frac{3}{4}\pi + \frac{\rho}{2} - \varphi_{6.3}, \quad \frac{3}{4}\pi + \frac{\rho}{2} - \varphi_{6.4}, \\ \frac{3}{4}\pi + \frac{\rho}{2} - \varphi_{6.5}, \quad \text{となる。}$$

この直線上の点の応力はそれぞれ(6.1), (6.2), (6.3), (6.4), (6.5)の

節点の応力に等しい。かくしてトンネル周辺の摩擦性塑性体中の応力は  $\sigma_{ax}$  で表わされることとなる。 $\sigma_x, \sigma_y$  の応力分布は第2.45図に示す。またせん断応力  $\tau$  の分布は第2.46図に示す。また塑性流動限界と  $\sigma_{ax}$  との関係を第2.47図に示す。

## 第6節 結 語

第2.45図及び第2.46図から次のことがいえる。

- (1).  $\sigma_x, \sigma_y$ , この値はトンネルに近くなるほど少くなる。これはトンネルの近くでは、塑性流動すなわち膨脹をなして、このトンネルに膨み出した塑性物質を除去して支保工で支えれば、膨張しないときの応力より軽減されることを示し、トンネルより塑性流動限界まで応力は増加してゆき、塑性流動限界上において主応力の平均値が初期応力の  $\sigma$  と等しくなつて、それより外方では塑性流動を起さないこととなる。
- (2).  $\sigma_x, \sigma_y, \tau$  は摩擦性塑性体としての水平層と弾性体との上下の境界面に向うに従い、その大きさを増すのは、この境界面による摩擦力に影響されるためである。また  $x$  軸に近い摩擦性塑性物質ほどトンネル中心に向い塑性流動をなす。

本文においては応力はすべて  $\sigma_{ax}$  で表わされているが、塑性流動を起すに従い上盤、下盤の変形が大となり、この変形とトンネル中心より塑性流動限界までの距離との関係が判明すれば、上盤、下盤の変形の限度のときの塑性流動限界がきまり、従つてこのときの  $\sigma_{ax}$  が決定する。

つぎに前節の計算例において  $x$  軸上の塑性流動限界のトンネル中心よりの距離と側壁の圧力  $\sigma_{ax}$  との関係を図示したものが第2.48図であるが、 $\sigma_{ax}$  が減少すれば急激に塑性流動限界はトンネル側壁より外方遠くに高位の広範囲の区画にわたり塑性流動を起すこととなる。また塑性流動限界の曲線がトンネル側壁に向つてアーチ状になっていることは、塑性流動に對してアーチアクションの作用していることを示しているものである。

以上の考察によつて R. Fenner の理論を批判し、側壁土圧と塑性領域の応力分布の関連性につきより詳細に求めることができた。



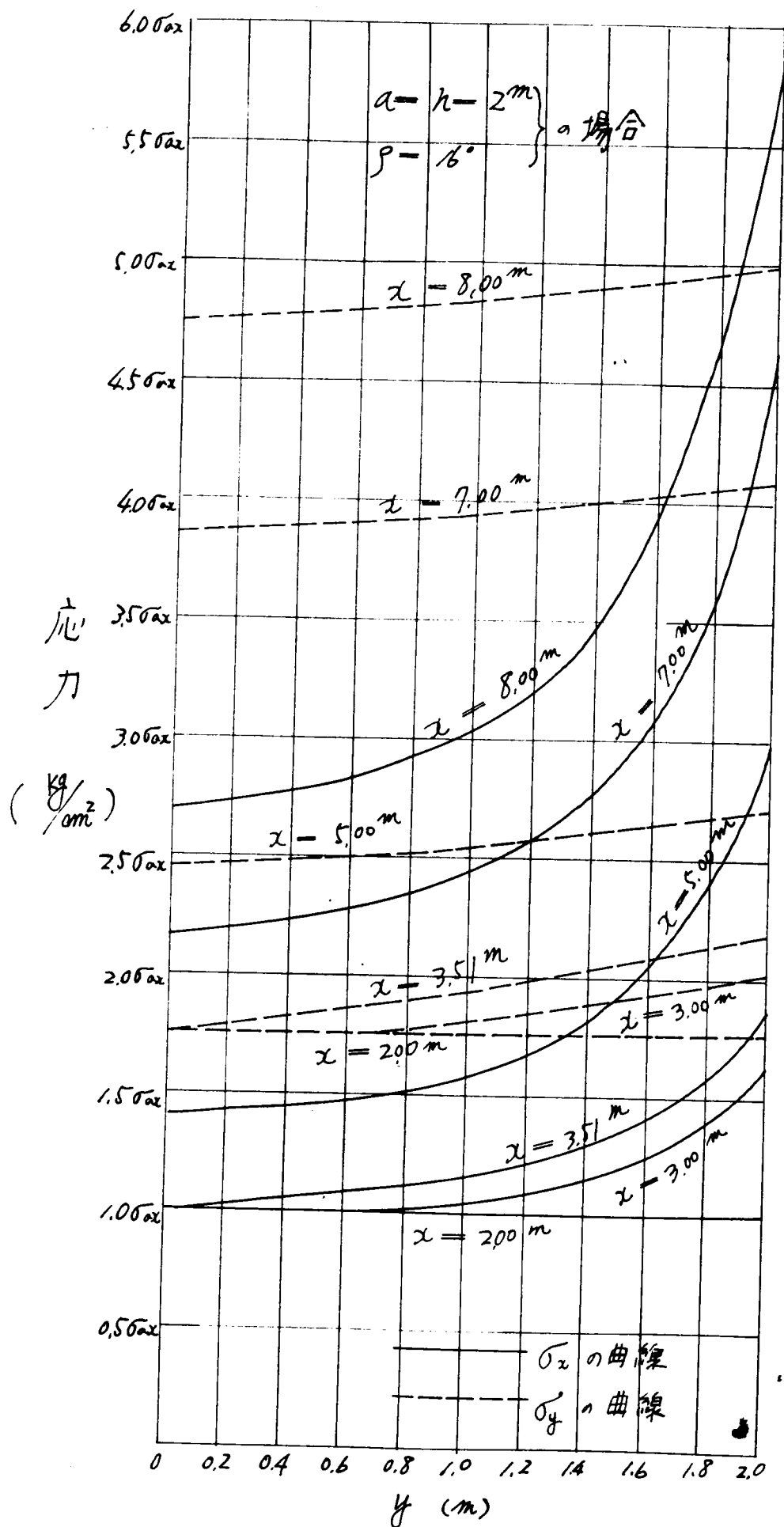
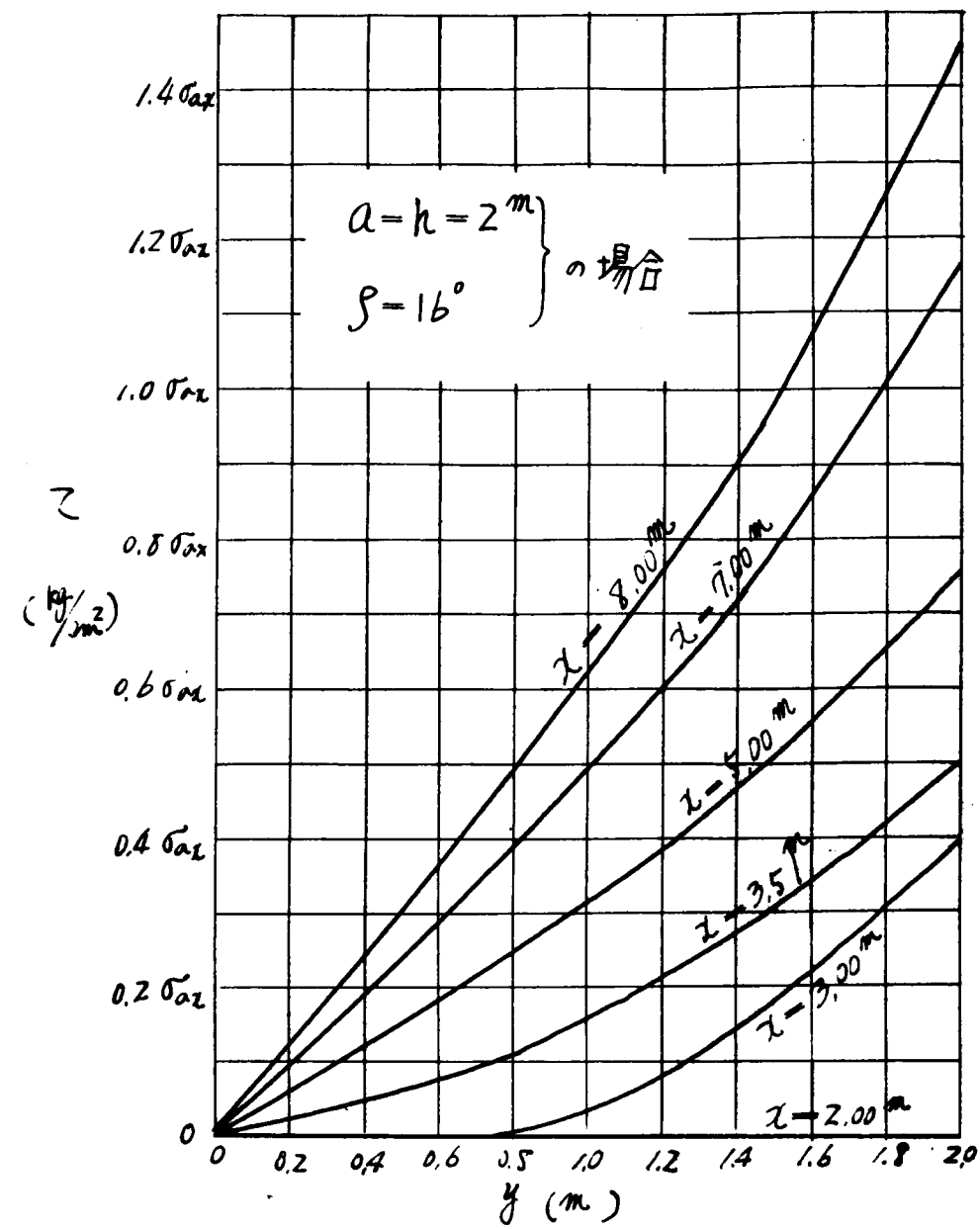
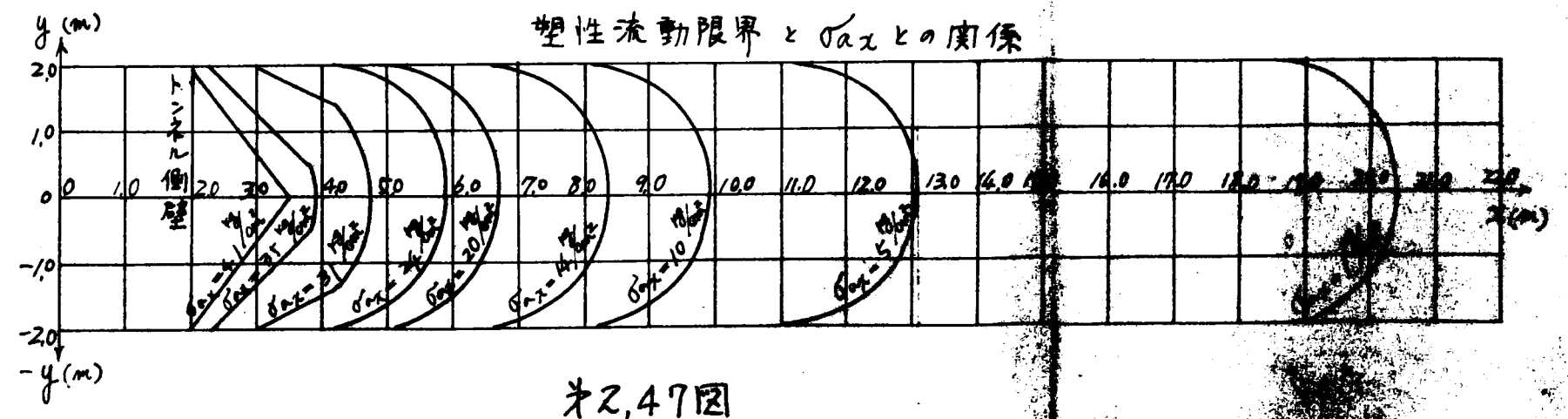


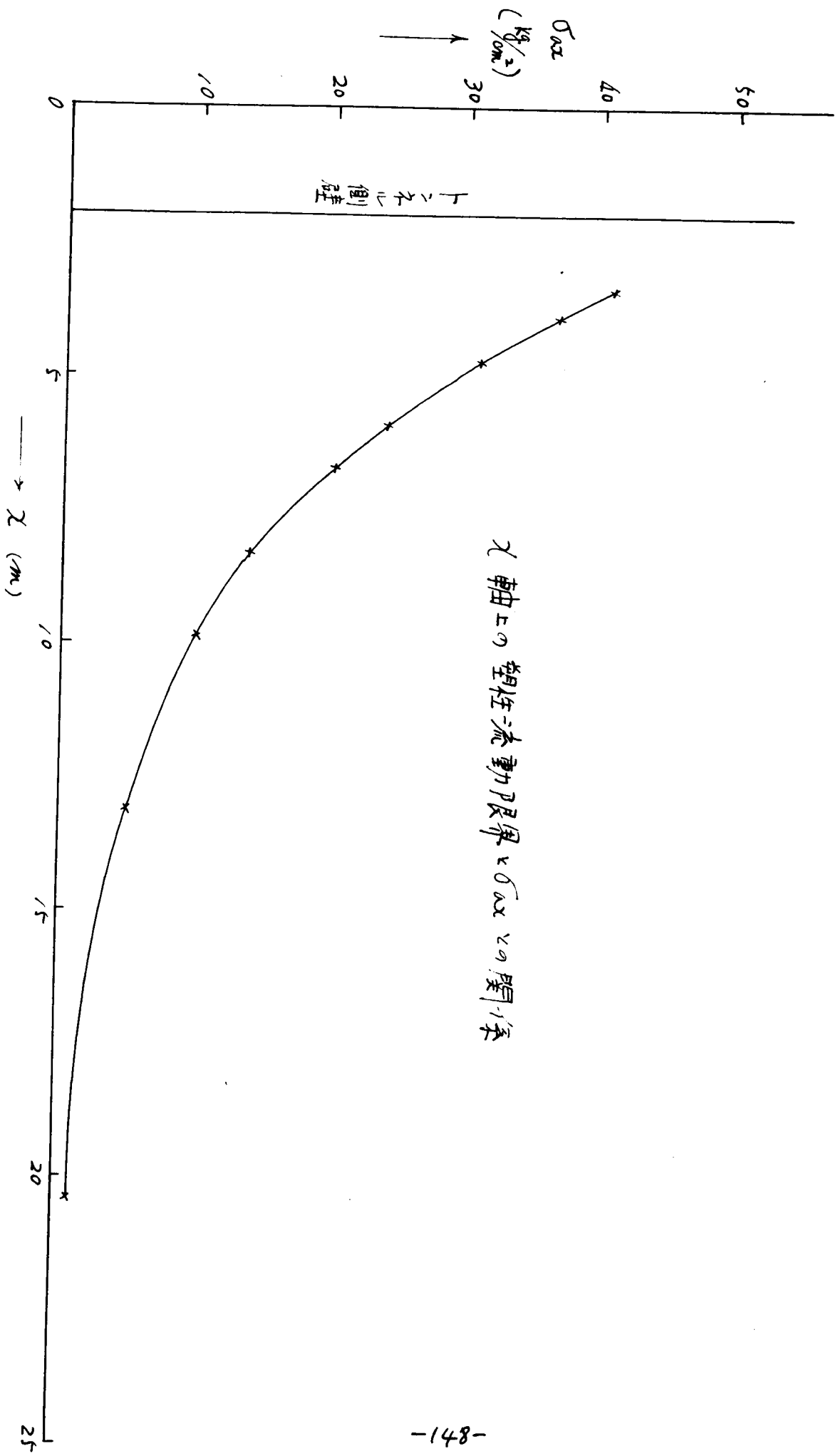
図 2.45



※2,46図



※2,47図



カ軸上の塑性流動限界と  $\sigma_{max}$  の関係

図2, 48

## 第7章 軟弱な成層を有する互層地山中の素掘円形トンネルの

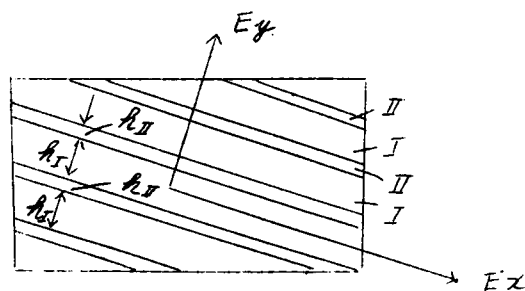
### 周辺応力分布<sup>65)</sup>

#### 第1節 軟弱な成層を有する互層の異方性

いままでは等方等質性とみなされる地山中のトンネル周辺の応力分布について研究してきたが、実際の地山にはある方向に平行に数多く岩目が発達していて均質異方性体となすともなされる場合とか、異なった岩石が互層をなしている場合とかがある。後者の場合の例としては阿讃山脈の白亜紀系の地層は砂岩と頁岩とが互層をなしている。この場合この互層の厚さがトンネル断面の大きさに比べて小なるときは互層の方向の合成された弾性係数と、これと直交方向の合成された弾性係数とは異なるが、位置によって弾性係数は異なっている。互層の厚さが小なるときは擬似均質異方性体とみなし、前者の均質異方性体と同様な方法で解きうるものとする。このような地山ではトンネル掘削によって生ずるトンネル周辺の応力集中現象は、等方均質性の地山とみなされる場合と異なった応力集中の様相を呈し、特に軟弱な成層を介する互層地山では二つの直交する方向の弾性係数の差が大となり、地山の鉛直方向と互層の方向とがある角をなすとき著しい応力集中を生じトンネル崩壊の一因となすことがある。

徳島県神山村の大樽トンネルは石巻片岩が切羽面において $30^\circ$ の傾斜をなしていて岩目もその方向に走っている。トンネル掘削中にこの岩目の方向と直交する方向より偏圧をうけて崩壊を起している。そこで異方性体としての地山中のトンネル周辺の応力分布を求め、崩壊の原因を究明せんとする。この地山中のトンネル周縁上の接線方向直応力の分布については G. Sonntag<sup>66)</sup> が研究しているが、更にトンネル周辺直傍の応力分布を G. V. Savin<sup>67)</sup> の理論によつて求める。軟弱な成層を有する互層地山としては、この軟弱なる成層の弾性係数が著しく小なる場合として、その応力集中に対する影響について考察することとする。

第2. 49図に示すように地山が弾性係数と層の厚さが交互にかわる互層よりなつた場合を考える。各層の物質は等方均質性として、また各互層間の境界において摩擦抵抗が充分あつて滑動変位は生じないものとする。第Iの種類の層の厚さは $h_I$ で、弾性係数を $E_I$ とする。第IIの種類の層の厚さは $h_{II}$ で、弾性係数は $E_{II}$ であるとする。この互層の厚さがトンネル断面の大きさに比べて小なるとき擬似均質異方性体とみなして、この互層と平行な方向の



第2. 49図

合成された弾性係数を  $E_{xx}$ , これと直交する方向の合成された弾性係数  $E_{yy}$ , とすれば,

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{h_I E_I + h_{II} E_{II}}{h_I + h_{II}} \\ E_y &= \frac{(h_I + h_{II}) E_I E_{II}}{h_I E_{II} + h_{II} E_I} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.7.1)$$

となり,  $E_x/E_y \geq 1$  となる。この二つの直交する方向の弾性係数が  $E_x, E_y$  としたとき、均質異方性体とみなして応力分布を求めんとする。

## 第2節 異方性体の弾性理論の基礎問題

いま弾性対称軸と直交座標軸  $x, y$  とが一致する直交異方性体の  $x$  軸方向,  $y$  軸方向の弾性係数をそれぞれ  $E_x, E_y$  とする。また  $x$  軸方向の直応力を  $\sigma_x$ ,  $y$  軸方向の直応力を  $\sigma_y$ , せん断応力を  $\tau_{xy}$  とし,  $\psi(x, y)$  を応力函数とすれば,

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \dots \dots (2.7.2)$$

となる。応力とヒズミと適合条件式より  $\psi(x, y)$  の満足する基礎方程式は,

$$a_{22} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.7.3)$$

となる。ただし

$$a_{11} = \frac{1}{E_x}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_y}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_x}{E_x} = -\frac{\nu_y}{E_y}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{xy}},$$

であつて, ここに  $G_{xy}$  はせん断弾性係数である。ポアッサン比の影響は岩盤の弾性係数の影響よりも一層小さいから, 近似的には,

$$\frac{1}{G_{xy}} = \frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} \quad (2.7.4)^{60)}$$

とみなしても結果には大差はない。また  $\nu_x, (\nu_y)$  はそれぞれ  $x, (y)$  方向の圧縮による  $y, (x)$  方向の伸びを示すポアッサン比である。

(2.7.3) 式の解を求めるには, 次の特性方程式を利用する。

$$a_{11} s^4 + (2a_{12} + a_{66}) s^2 + a_{22} = 0 \quad (2.7.5)$$

において,

$$l = a_{11}, \quad m = 2a_{12} + a_{66}, \quad n = a_{22}.$$

として, (2.7.5) 式の根を  $s_1, s_2, s_3, s_4$  とすれば,

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= i \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - 4ln}}{2l}}, \quad s_2 = i \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - 4ln}}{2l}} \\ s_3 &= \bar{s}_1, \quad s_4 = \bar{s}_2, \end{aligned} \right\} (2.7.6)$$

ここに記号の上の  $\text{hor}$  は共轭をとることを示す。いま、

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - 4\ell n}}{2\ell}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - 4\ell n}}{2\ell}} \quad (2.7.7)$$

として、(2.7.6)式は次式となる。

$$s_1 = i\beta_1, \quad s_2 = i\beta_2, \quad s_3 = \bar{s}_1 = -i\beta_1, \quad s_4 = \bar{s}_2 = -i\beta_2 \quad (2.7.8)$$

(2.7.5)式の根が不等根のときには、(2.7.8)の解は、

$$U(x, y) = F_1(x + s_1 y) + F_2(x + s_2 y) + F_3(x + s_3 y) + F_4(x + s_4 y) \quad (2.7.9)$$

となる。

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= x + s_1 y = x_1 + i y_1 \\ Z_2 &= x + s_2 y = x_2 + i y_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.7.10)$$

として、(2.7.8)式より  $x_1 = x$ ,  $y_1 = \beta_1 y$ ,  $x_2 = x$ ,  $y_2 = \beta_2 y$  となる。  
(2.7.10)式を用いて、

$$\frac{dF_1}{dZ_1} = \varphi(Z_1), \quad \frac{dF_2}{dZ_2} = \psi(Z_2), \quad (2.7.11)$$

とおくこととする。

### 第3節 異方性体中の孔の周辺応力分布

トンネルが地山の地表面よりかなり深い地点にあるときは、無限体の中に円孔をあけたとき、無限遠において地山の深さに相当する地山圧力が作用している場合とみなして応力分布を求めることができる。いまトンネル円孔の境界に外力  $X_n$ ,  $Y_n$  がそれぞれ  $x$  軸方向,  $y$  軸方向に作用しているとする。円孔の半径を  $R$  として、この円孔の中心を  $x, y$  座標の原点とする。  $z = x + iy$  の平面が (2.7.10) 式の  $Z_1, Z_2$  の平面に *affine transform* によって変換されるとする。

$z, Z_1, Z_2$  の平面の円孔  $\angle, \angle^{(1)}, \angle^{(2)}$  の外側の領域  $S, S^{(1)}, S^{(2)}$  を、

$$Z = w(\zeta) = R \frac{1}{\zeta} \quad (2.7.12)$$

によつて、単位円の内部に等角写像することができ、 $\angle, \angle^{(1)}, \angle^{(2)}$  を  $z$  面での単位円  $\Gamma$  に一意的に等角写像できる。  $\zeta = \rho e^{i\theta}$  として、 $\rho, \theta$  を  $z$  面での極座標とすると、 $\rho = \text{一定}$  の曲線はトンネル円孔中心を囲む円曲線であり、 $\theta = \text{一定}$  はこの点から出る放射線となる。円孔の座標は、

$$x = R \cos \theta, \quad y = -R \sin \theta \quad (2.7.13)$$

であつて、(2.7.10)式、(2.7.12)式及び(2.7.13)式によつて次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{R(1+i\delta_1)}{2} \zeta + \frac{R(1-i\delta_1)}{2} \frac{1}{\zeta} \\ z_2 &= \frac{R(1+i\delta_2)}{2} \zeta + \frac{R(1-i\delta_2)}{2} \frac{1}{\zeta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7.14)$$

(2.7.14)式の変換によつて、それぞれ  $S^{(1)}$ ,  $S^{(2)}$  の領域を  $z$  面の単位円内の内部に等角写像することができる。(2.7.11)式の函数は領域  $S$  の円形の境界  $\angle$  上において、境界条件として次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \{ \varphi(z_1) + \psi(z_2) \} &= - \int_{\angle} Y_n d\delta + C_1 = f_1 \\ 2 \operatorname{Re} \{ \delta_1 \varphi(z_1) + \delta_2 \psi(z_2) \} &= \int_{\angle} X_n d\delta + C_2 = f_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7.15)$$

ただし  $\delta$  は  $\angle$  の境界に沿つての弧の長さである。 $\operatorname{Re}$  は実部をとることを示す。またこの場合の(2.7.11)式の函数は、

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z_1) &= A \log z_1 + B^* z_1 + \varphi_0(z_1) \\ \psi(z_2) &= B \log z_2 + (B'^* + iC'^*) z_2 + \psi_0(z_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7.16)$$

であつて、 $\varphi_0(z_1)$ ,  $\psi_0(z_2)$  は無限遠において正則となる函数である。また無限遠における応力をそれぞれ  $\sigma_x^{(\infty)}$ ,  $\sigma_y^{(\infty)}$ ,  $\tau_{xy}^{(\infty)}$  とすれば、

$$\left. \begin{aligned} B^* &= \frac{\sigma_x^{(\infty)} + \beta_2^2 \sigma_y^{(\infty)}}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \\ B'^* &= \frac{-\beta_1^2 \sigma_y^{(\infty)} - \sigma_x^{(\infty)}}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \\ C'^* &= \frac{(\beta_2^2 - \beta_1^2) \tau_{xy}^{(\infty)}}{2\beta_2(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7.17)$$

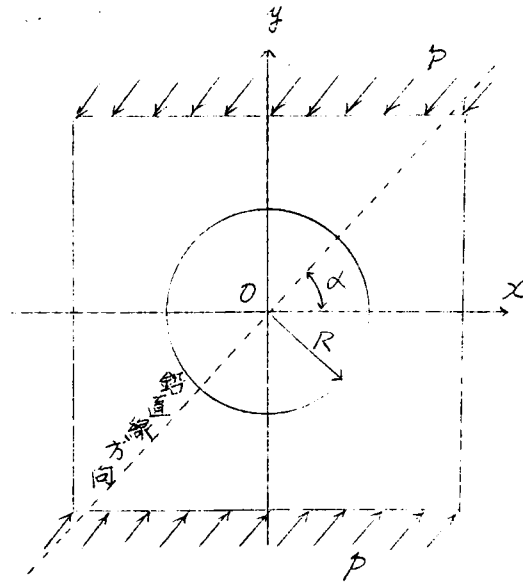
となる。しかしながら養殖円形トンネルにおいては円孔に外力は作用しないから  $X_n = 0$ ,  $Y_n = 0$  であるから  $f_1 = f_2 = 0$  及び  $A = B = 0$  となる。

いま、第2.50図に示すように無限遠において  $p$  なる等分布圧力が  $x$  軸に対して  $\alpha$  の角をなして作用する場合を考えてみる。このとき、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(\infty)} &= p \cos^2 \alpha \\ \sigma_y^{(\infty)} &= p \sin^2 \alpha \\ \tau_{xy}^{(\infty)} &= p \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7.18)$$

となる。

(2.7.18)式を(2.7.17)式に代入してえたものを、更に(2.7.16)式に代入してえられる  $\varphi(z_1)$ ,  $\psi(z_2)$  を(2.7.11)式に代入し、(2.7.9)式を利用して(2.7.2)式により応力を求めれば、



第2.50図

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= p \cos^2 \alpha + 2 \operatorname{Re} \{ \beta_1^2 \varphi_0'(Z_1) + \beta_2^2 \varphi_0'(Z_2) \} \\ \sigma_y &= p \sin^2 \alpha + 2 \operatorname{Re} \{ \varphi_0'(Z_1) + \varphi_0'(Z_2) \} \\ \tau_{xy} &= p \sin \alpha \cos \alpha - 2 \operatorname{Re} \{ \beta_1 \varphi_0'(Z_1) + \beta_2 \varphi_0'(Z_2) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.7.19)$$

となる。ここに  $\varphi_0(Z_1), \varphi_0(Z_2)$  は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(Z_1) &= - \frac{i p R^2 (1 - i \beta_1)}{4(\beta_1 - \beta_2)} \left\{ \frac{\beta_2 \sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha + i(2\beta_2 \sin \alpha + \sin 2\alpha)}{Z_1 + \sqrt{Z_1^2 - R^2(1 + \beta_1^2)}} \right\} \\ \varphi_0(Z_2) &= \frac{i p R^2 (1 - i \beta_2)}{4(\beta_1 - \beta_2)} \left\{ \frac{\beta_1 \sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha + i(\beta_1 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)}{Z_2 + \sqrt{Z_2^2 - R^2(1 + \beta_2^2)}} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.7.20)^{69)}$$

以上いままでの理論式は G. N. Sawin によつて導かれているものである。

(2.7.20)式の第1式において(2.7.14)式の第1式よりえられる、

$$\zeta = \frac{Z_1 - \sqrt{Z_1^2 - R^2(1 + \beta_1^2)}}{R(1 + i\beta_1)}$$

を用い、また(2.7.20)式の第2式において、(2.7.14)式の第2式よりえられる、

$$\zeta = \frac{Z_2 - \sqrt{Z_2^2 - R^2(1 + \beta_2^2)}}{R(1 + i\beta_2)}$$

を用い、また(2.7.18)式と  $\zeta = p e^{i\theta}$  なることとを利用して(2.7.19)式より、

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \sigma_\theta + \sigma_r = p \\ &+ \frac{p p^2}{(\beta_1 - \beta_2)} \left\{ \frac{(1 - \beta_1) \{ -(1 + \beta_1)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_1 \beta_2 + 1) \sin 2\alpha \sin 2\theta}}{\{ p^2(1 - \beta_1) \cos 2\theta - (1 + \beta_1) \}^2} \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\{-2(1+\beta_1)\cos^2\alpha + 2\beta_2(1+\beta_1)\sin^2\alpha\}\{p^2(1-\beta_1) - (1+\beta_1)\cos 2\theta\}}{p^4(1-\beta_1)^2\sin^2 2\theta} \\
& - \frac{(1-\beta_2)\{- (1+\beta_2)(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2+1)\sin 2\alpha\sin 2\theta\}}{\{p^2(1-\beta_2)\cos 2\theta - (1+\beta_2)\}^2} \\
& + \frac{\{-2(1+\beta_2)\cos^2\alpha + 2\beta_1(1+\beta_2)\sin^2\alpha\}\{p^2(1-\beta_2) - (1+\beta_2)\cos 2\theta\}}{p^4(1-\beta_2)^2\sin^2 2\theta} \} \\
& \dots \dots \dots (2.7.21)
\end{aligned}$$

ここに  $\sigma_\theta$  ; 極座標をとったときのトンネル円孔周辺の接線方向直応力,  $\sigma_r$  ; 極座標の動径方向の直応力,  $\tau_{r\theta}$  ; そのときのせん断応力, とする.

トンネル円周上においては  $p = 1$  となり,  $\sigma_r = 0$  となるから (2.7.21) 式より,

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta = p + \frac{p}{\beta_1 - \beta_2} & \left\{ \frac{(1-\beta_1)\{- (1+\beta_1)(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2+1)\sin 2\alpha\sin 2\theta\}}{\{ (1-\beta_1)\cos 2\theta - (1+\beta_1)\}^2} \right. \\
& + \frac{\{-2(1+\beta_1)\cos^2\alpha + 2\beta_2(1+\beta_1)\sin^2\alpha\}\{ (1-\beta_1) - (1+\beta_1)\cos 2\theta\}}{(1-\beta_1)^2\sin^2 2\theta} \\
& - \frac{(1-\beta_2)\{- (1+\beta_2)(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2+1)\sin 2\alpha\sin 2\theta\}}{\{ (1-\beta_2)\cos 2\theta - (1+\beta_2)\}^2} \\
& \left. + \frac{\{-2(1+\beta_2)\cos^2\alpha + 2\beta_1(1+\beta_2)\sin^2\alpha\}\{ (1-\beta_2) - (1+\beta_2)\cos 2\theta\}}{(1-\beta_2)^2\sin^2 2\theta} \right\} \\
& \dots \dots \dots (2.7.22)
\end{aligned}$$

$$\sigma_x - \sigma_y = p \cos 2\alpha$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{pp^2}{\beta_1 - \beta_2} \left[ (\beta_1^2 + 1) \frac{(2\cos^2\alpha - 2\beta_2\sin^2\alpha)\{p^2(1-\beta_1) - (1+\beta_1)\cos 2\theta\}}{\{p^2(1-\beta_1)\cos 2\theta - (1+\beta_1)\}^2} \right. \\
& + \frac{(1+\beta_1)(1+\beta_2)\sin 2\alpha\sin 2\theta}{p^4(1-\beta_1)^2\sin^2 2\theta} \\
& - (\beta_2^2 + 1) \frac{(2\cos^2\alpha - 2\beta_1\sin^2\alpha)\{p^2(1-\beta_2) - (1+\beta_2)\cos 2\theta\}}{\{p^2(1-\beta_2)\cos 2\theta - (1+\beta_2)\}^2} \\
& \left. + \frac{(1+\beta_1)(1+\beta_2)\sin 2\alpha\sin 2\theta}{p^4(1-\beta_2)^2\sin^2 2\theta} \right] \dots \dots \dots (2.7.23)
\end{aligned}$$

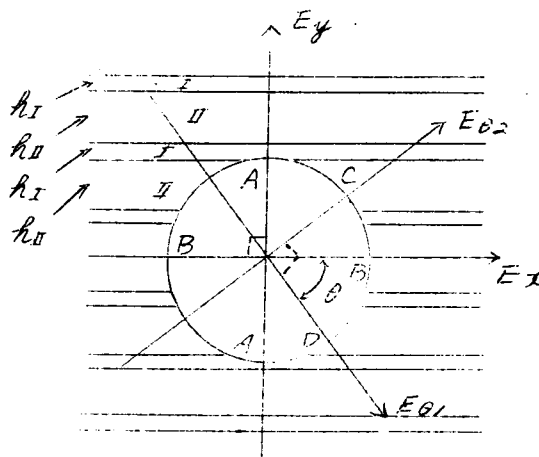
$$\tau_{xy} = p \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{pp^2}{\beta_1 - \beta_2} \left[ \beta_1 \frac{(2\cos^2\alpha - 2\beta_2\sin^2\alpha)(1+\beta_1)\sin 2\theta}{\{p^2(1-\beta_1)\cos 2\theta - (1+\beta_1)\}^2} \right. \\
& - \frac{\{p^2(1-\beta_1) - (1+\beta_2)\cos 2\theta\}(1+\beta_2)\sin 2\alpha}{p^4(1-\beta_2)^2\sin^2 2\theta} \\
& - \beta_2 \frac{(2\cos^2\alpha - 2\beta_1\sin^2\alpha)(1+\beta_2)\sin 2\theta}{\{p^2(1-\beta_2)\cos 2\theta - (1+\beta_2)\}^2} \\
& \left. - \frac{\{p^2(1-\beta_2) - (1+\beta_1)\cos 2\theta\}(1+\beta_1)\sin 2\alpha}{p^4(1-\beta_1)^2\sin^2 2\theta} \right] \dots \dots \dots (2.7.24)
\end{aligned}$$

(2.7.21) 式, (2.7.23) 式及び (2.7.24) 式を用いて応力成分は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \end{aligned} \right\} \dots (2.7.25)$$

しかしながら応力の計算には成層の弾性係数の合成を考慮しなければならない。



第2.51図

第2.51図において成層と平行方向  $E_x$  より  $\theta$  の角をなす方向の弾性係数を  $E_\theta$  とする。しかるは  $E_\theta$  の方向にその互層の  $\frac{h_I + h_{II}}{\sin \theta}$  の高さのものの合成されたヒズミ  $\varepsilon_\theta$  を生じて、この方向の弾性係数が  $E_\theta$  なることより、この方向の直応力は (2.7.25) 式の応力を用いればよい。成層に平行な方向の直応力は成層 I の中の地点では (2.7.25) 式の応力の値に  $E_I/E_x$  をかけるべきである。また成層 II の中の地点では (2.7.25) 式の応力の値に  $E_{II}/E_x$  をかけるべきである。すなわち第2.51図において A 点が第 I の種類の成層にあるときの  $\sigma_\theta$  を  $\sigma_\theta^{(I)}(A)$  とし、A 点が第 II の種類の成層にあるときの  $\sigma_\theta$  を  $\sigma_\theta^{(II)}(A)$  とすれば、

$$\sigma_\theta^{(I)}(A) = \sigma_\theta(A) \frac{E_I}{E_x}, \quad \sigma_\theta^{(II)}(A) = \sigma_\theta(A) \frac{E_{II}}{E_x} \dots (2.7.26)$$

となる。ただし  $\sigma_\theta(A)$  は (2.7.25) 式の  $\sigma_\theta$  の A 点における値である。

また第2.51図の B 点においては、B 点が第 I の種類の成層にあるときの  $\sigma_r$  を  $\sigma_r^{(I)}(B)$  とし、B 点が第 II の種類の成層にあるときの  $\sigma_r$  を  $\sigma_r^{(II)}(B)$  とすれば、

$$\sigma_r^{(I)}(B) = \sigma_r(B) \frac{E_I}{E_x}, \quad \sigma_r^{(II)}(B) = \sigma_r(B) \frac{E_{II}}{E_x} \dots (2.7.27)$$

となる。ただし  $\sigma_r(B)$  は (2.7.25) 式の  $\sigma_r$  の B 点における値である。

なお、第2.51図の  $E_y$  軸上の点の  $\sigma_\theta$  に関して (2.7.26) 式と同じ考えで計算すべきであり、 $E_x$  軸上の点の  $\sigma_r$  に関して (2.7.27) 式と同じ考えで計算すべきである。

#### 第4節 計算例

##### (I) $E_x/E_y$ の値の異なる場合

地山荷重は鉛直方向にだけ作用する場合その鉛直方向等分圧力を $\rho$ とする。地山は砂岩と頁岩との互層をなすものとし、この地山中に素堀の円形トンネルを掘削した場合を考える。砂岩を第Iの種類の成層の岩石とし、頁岩を第IIの種類の成層の岩石とする。

$R_I = 60 \text{ cm}$ ,  $E_I = 108,000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $R_{II} = 25 \text{ cm}$ ,  $E_{II} = 343,000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $G_{xy} = 55,000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu_y = 0.23$  とすれば, (2.7.1)式より  $E_x = 177,110 \text{ kg/cm}^2$ ,  $E_y = 135,260 \text{ kg/cm}^2$  となり,  $E_x/E_y = 1.31$  である。このとき  $\epsilon = 5.646 \times 10^{-6}$ ,  $m = 1.48 \times 10^{-5}$ ,  $n = 7.39 \times 10^{-6}$  となるから, (2.7.7)式より  $\beta_1 = 1.396$ ,  $\beta_2 = 0.871$  がえられる。これらの数値を用いて (2.7.22)式よりトンネル円周上の応力の $\sigma_\theta$ を求める。これは擬似均質異方性体の地山とみなしたときの応力であつて,  $\sigma_\theta$  の値を $\rho$ を単位で表わしたものを表-2.20に示し, また第2.53図に応力分布の様子を示す。この図において $\theta$ は $x$ 軸より時計方向に測るものとする。

表-2.20 トンネル円周上の $\sigma_\theta$ の値

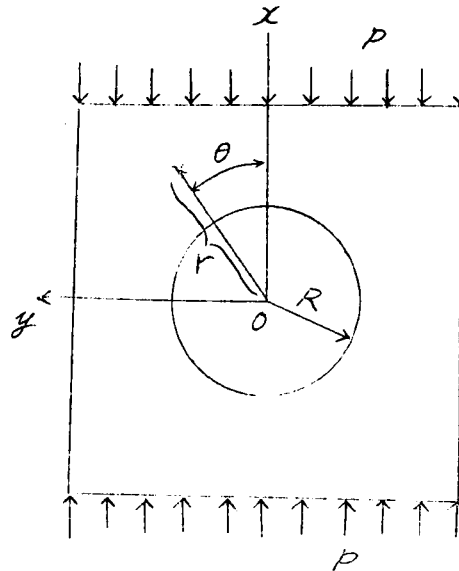
$\theta \backslash x$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	-0.822	+0.100	+1.943	+2.864
$30^\circ$	-0.068	+1.820	+2.879	+2.049
$60^\circ$	+1.846	+3.055	+2.196	+0.126
$90^\circ$	+3.257	+2.146	-0.096	-1.216
$120^\circ$	+1.846	-0.223	-1.087	+0.126
$150^\circ$	-0.068	-0.898	+0.161	+2.049
$180^\circ$	-0.822	+0.100	+1.943	+2.864

(単位;  $\rho$ , 正号は圧縮応力, 負号は引張応力を示す。)

つきに擬似均質異方性体の地山の場合と均質等方性体の地山の場合とを比較するために, 均質等方性体の地山中の素堀円形トンネル円周の応力分布を求める。

第2.52図に示すように $x$ 軸を鉛直方向にとり, 地山圧力として鉛直方向に $\rho$ なる圧力が作用するものとする。極座標 $r, \theta$ を図のようにとつたとき応力の式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\rho}{2} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\rho}{2} \left( 1 + \frac{3R^4}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\rho}{2} \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\rho}{2} \left( 1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\rho}{2} \left( 1 - \frac{3R^4}{r^4} + \frac{2R^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.7.28)$$



第2.52図

ただし  $R$  はトンネル円孔の半径である。(2.7.26)式によつてトンネル円孔周縁上の  $\sigma_\theta$  の値を第2.53図に点線を示して、擬似均質異方性体の地山の中のトンネル周縁上の  $\sigma_\theta$  と比較する。

表-2.20において  $\theta = 90^\circ$  のときの  $\sigma_\theta$  の値は(2.7.26)式によつて成層中の応力を計算すべきである。この計算結果を表-2.21に示す。

表-2.21  $\theta = 90^\circ$  のときの  $\sigma_\theta$  の値 (単位;  $p$ )

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sigma_\theta^{(I)}(A)$	+1.993	+1.809	-0.059	-0.742
$\sigma_\theta^{(II)}(A)$	+6.328	+4.157	-0.186	-2.255

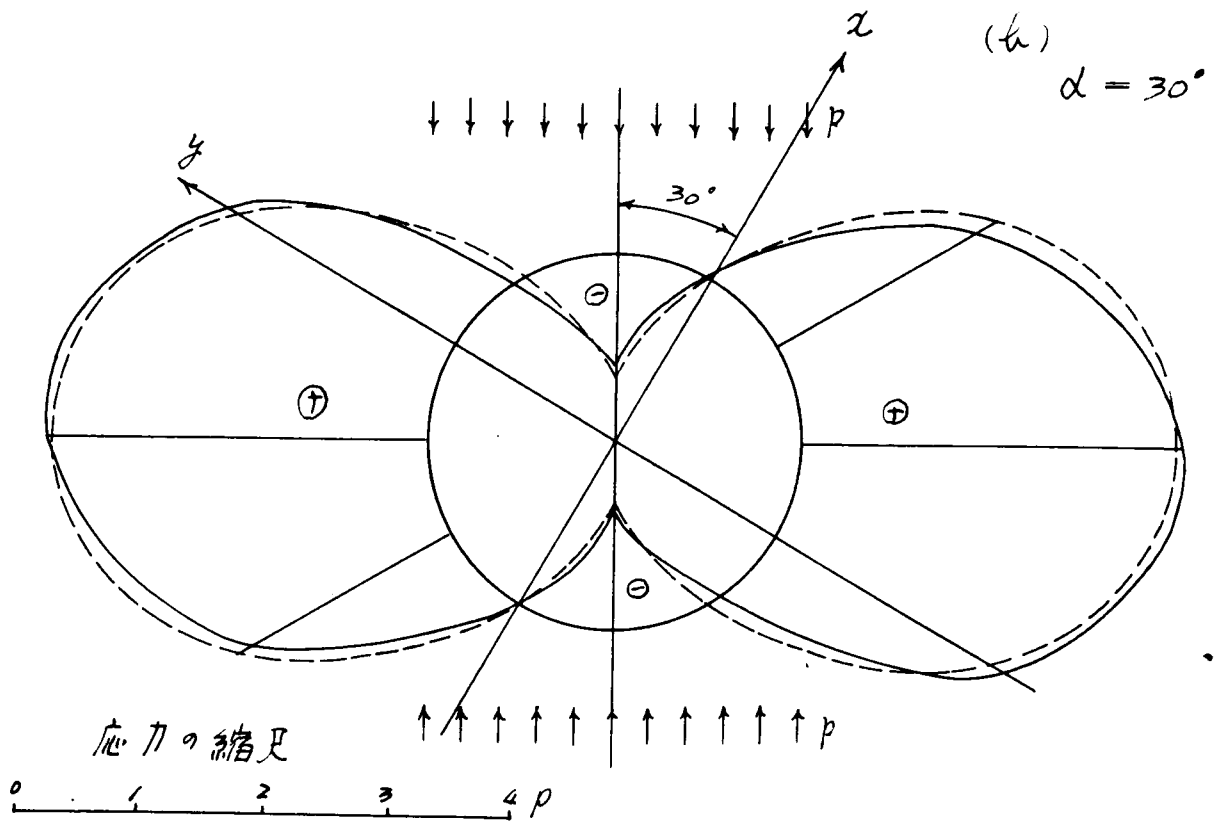
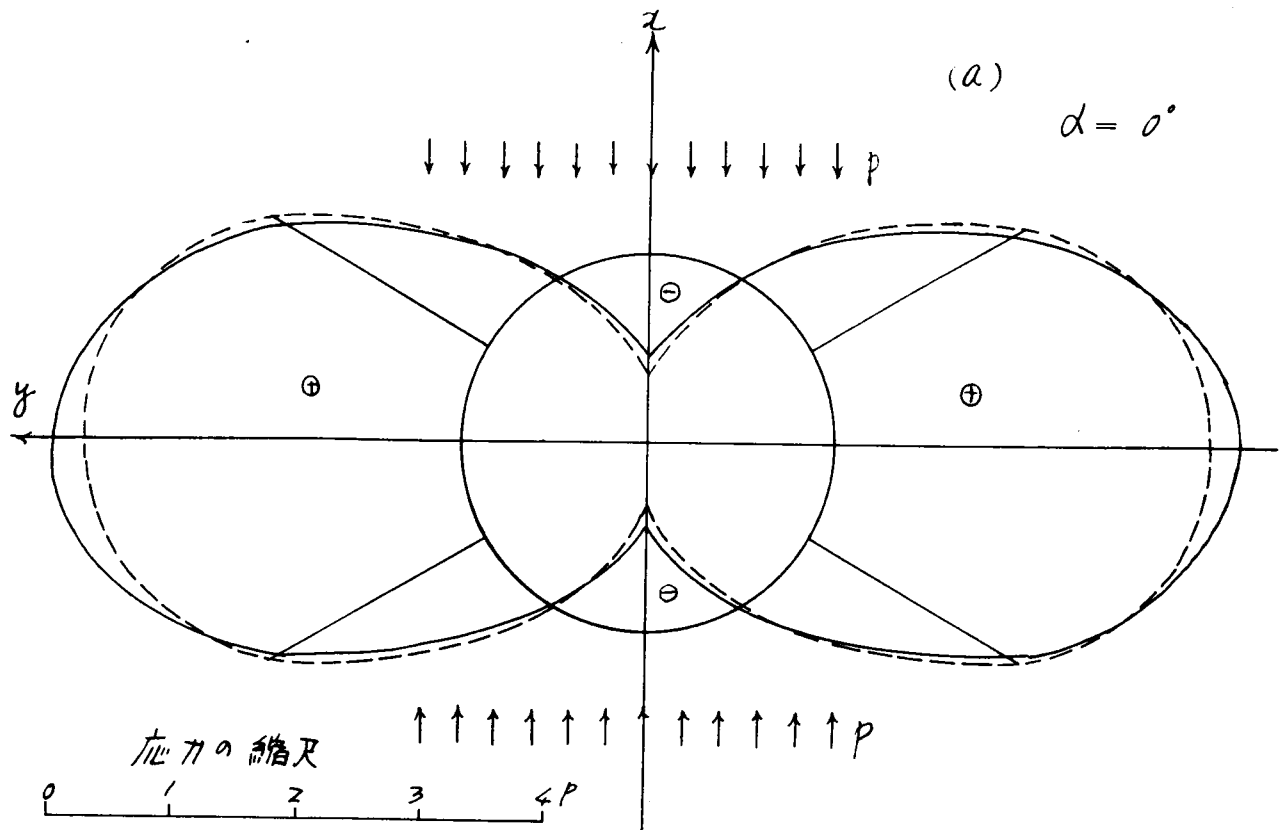
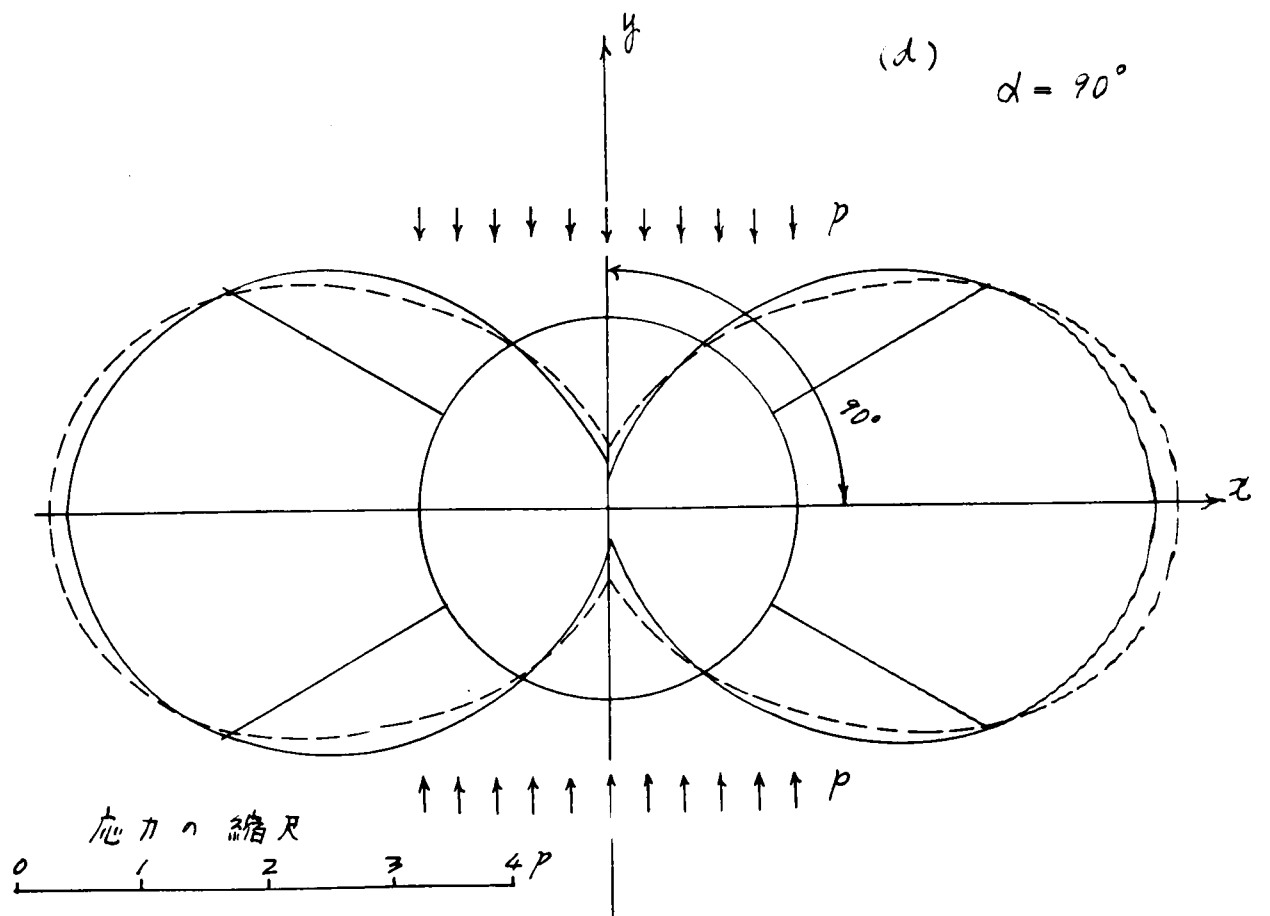
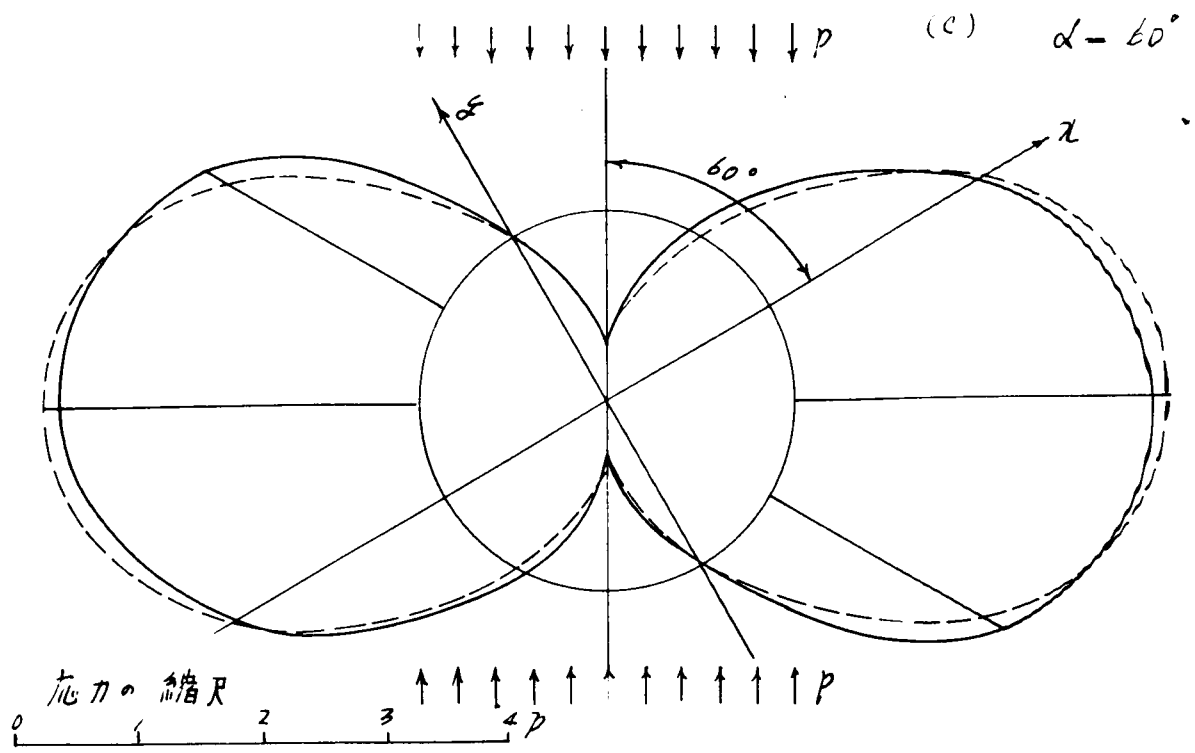


図 2, 53



第2.53図

(2)  $E_x/E_y$  の値の大なる場合

成層地山において二つの互層の中一層が軟弱でその弾性係数が非常に小なるときは、 $E_x$  の値が  $E_y$  に比較して非常に大となる。この場合の応力集中の異常性を調べることを、第3編第5章で述べる実験結果と比較するため  $E_x/E_y$  の比の大なる場合として、 $E_x = 170,000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $E_y = 6750 \text{ kg/cm}^2$ ,  $E_x/E_y = 25.2$ ,  $\nu_y = 0.0346$  をとることとすれば、(2.7.4) 式より  $G_{xy} = 6492 \text{ kg/cm}^2$  となる。地山荷重は鉛直方向だけ作用する場合、その鉛直方向等分荷圧力を  $P$  とする。このとき、

$$\rho = 5.882 \times 10^{-6}, \quad m = 1.438 \times 10^{-4}, \quad n = 1481 \times 10^{-4},$$

となり、(2.7.7) 式より  $\beta_1 = 4.833$ ,  $\beta_2 = 1.039$  となる。これらの数値を用いて (2.7.22) 式よりトンネル円周上の応力  $\sigma_\theta$  を求める。これは擬似均質異方性体の地山とみなしたときの応力であって、 $\sigma_\theta$  の値を  $P$  の単位で表わしたものが表-2.22 において示されており、また第2.54 図に応力分析の様子を示す。この図において  $\theta$  は  $x$  軸より時計方向に測るものとする。またこの図の点線で示された応力分析は (2.7.25) 式より求めた均質等方性体のトンネル周縁の  $\sigma_\theta$  の応力分析である。これによつて擬似均質異方性体の地山の場合と均質等方性体の地山の場合とにつき比較する。

つぎに (2.7.21) 式より (2.7.25) 式までの理論式によつて、この場合のトンネル円孔附近の周縁の応力分析を求めてみる。この計算結果を表-2.23 より表-2.24 に示す。またこれを図示したものが第2.55 図 (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h) 及び (i) である。

表-2.22 トンネル周縁上の  $\sigma_\theta$  の値

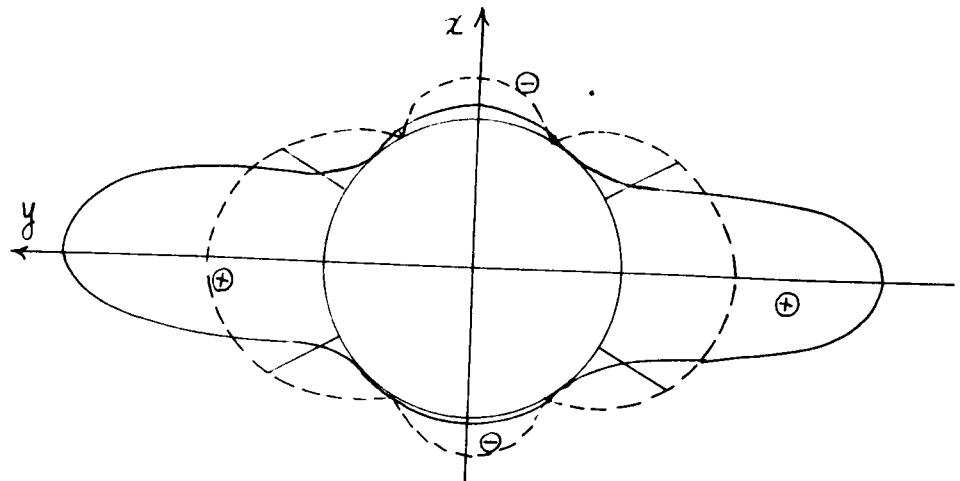
$\theta \backslash \alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	-0.211	0.392	1.576	2.192
$30^\circ$	-0.128	1.139	2.256	2.143
$60^\circ$	0.599	2.765	3.189	1.459
$90^\circ$	6.927	3.902	-2.038	-5.141
$120^\circ$	0.599	-1.136	-0.713	1.459
$150^\circ$	-0.128	-0.254	0.863	2.143
$180^\circ$	-0.211	0.392	1.576	2.192

(単位:  $P$  正号は圧縮応力, 負号は引張応力を示す.)

$$\alpha = 0^\circ$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓  $p$

(a)



応力の縮尺

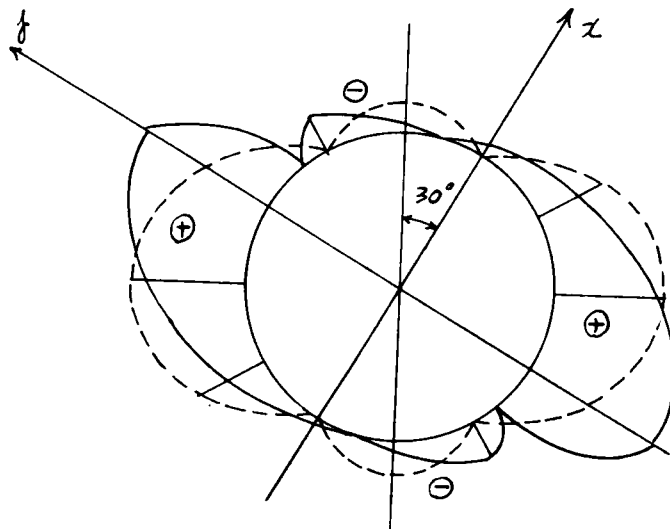
↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑  $p$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  $p$

$$\alpha = 30^\circ$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓  $p$

(b)



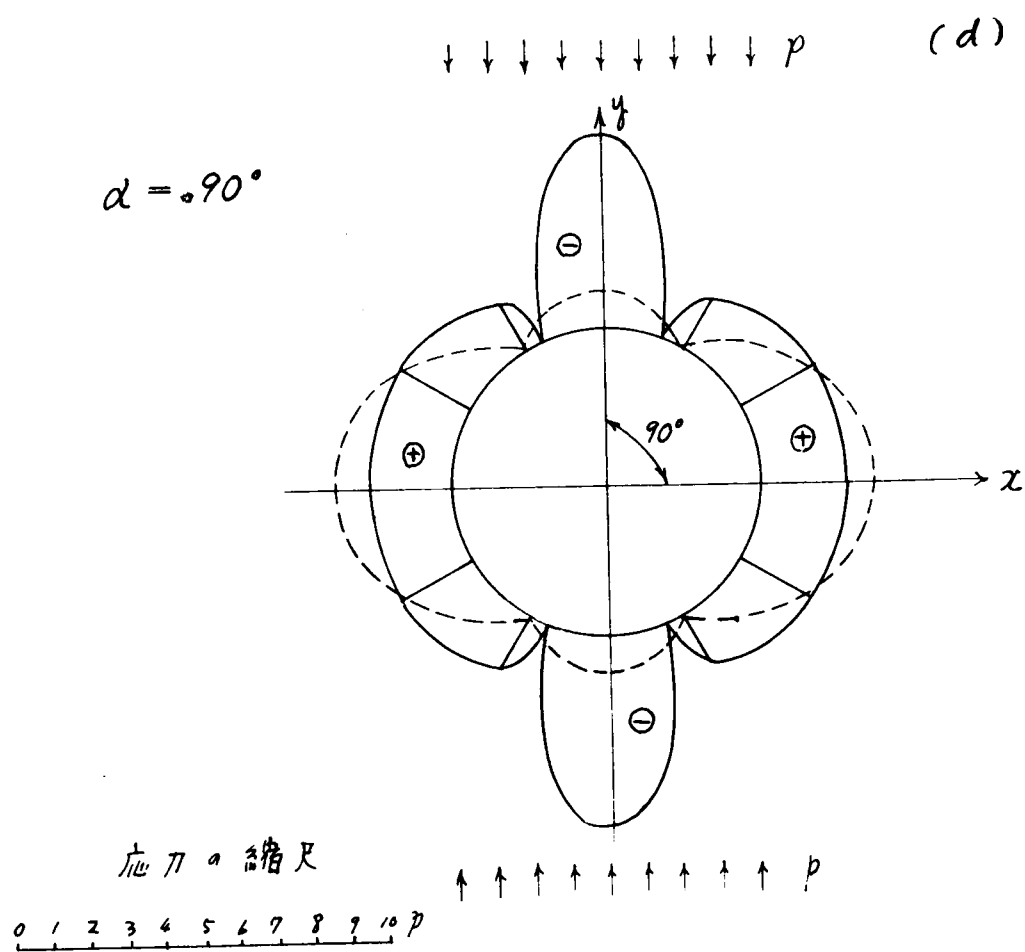
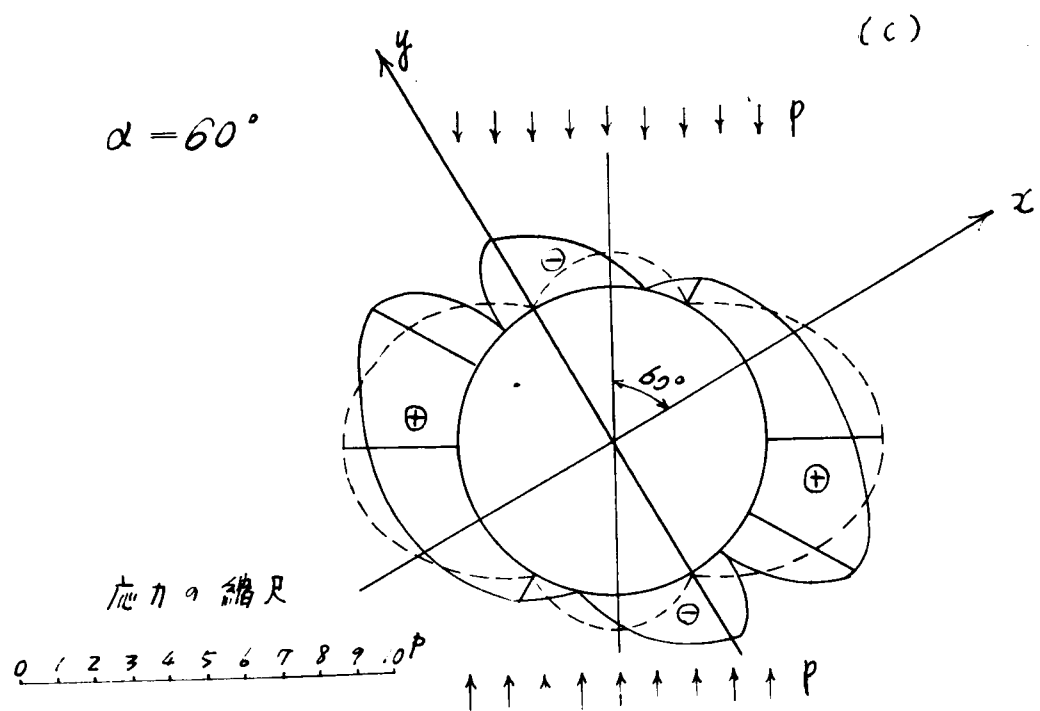
応力の縮尺

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑  $p$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  $p$

図2,54





才 2, 54 図

表-2.23 トンネル周辺直傍の  $\sigma_x + \sigma_y$  の値 (単位  $\rho$ )

$\alpha$	$\rho \backslash \theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$0^\circ$	1	-0.201	-0.110	0.580	6.877	0.580	-0.110	-0.201
	$1/1.5$	0.311	0.481	1.242	2.263	1.242	0.481	0.311
	$1/2.0$	0.568	0.716	1.197	1.603	1.197	0.716	0.568
	$1/2.5$	0.710	0.824	1.143	1.058	1.143	0.824	0.710
$45^\circ$	1	0.985	1.806	3.210	0.926	-1.227	0.197	0.985
	$1/1.5$	1.117	1.553	1.979	0.993	0.029	0.450	1.117
	$1/2.0$	0.999	1.062	1.505	0.998	0.496	0.639	0.999
	$1/2.5$	0.999	1.247	1.306	0.999	0.695	0.754	0.999
$90^\circ$	1	2.173	2.105	1.474	-5.032	1.474	2.105	2.173
	$1/1.5$	1.677	1.520	0.768	-0.273	0.768	1.520	1.677
	$1/2.0$	1.757	1.504	0.650	-0.071	0.650	1.504	1.757
	$1/2.5$	1.799	1.490	0.607	0.003	0.607	1.490	1.799

(正の符号は圧縮応力, 負の符号は引張応力を示す.)

表-2.24 トンネル周辺直傍の  $\sigma_x - \sigma_y$  の値 (単位  $\rho$ )

$\alpha$	$\rho \backslash \theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$0^\circ$	1	0.198	0.053	0.290	6.878	0.290	0.052	0.198
	$1/1.5$	0.481	0.552	1.148	2.141	1.148	0.552	0.481
	$1/2.0$	0.661	0.756	1.153	1.524	1.153	0.756	0.661
	$1/2.5$	0.768	0.850	1.114	1.306	1.114	0.850	0.768
$45^\circ$	1	-0.985	-0.901	1.620	0.925	-0.633	-0.100	-0.985
	$1/1.5$	-0.439	-0.190	0.702	0.434	-0.259	-0.248	-0.439
	$1/2.0$	-0.247	-0.053	0.346	0.246	-0.099	-0.194	-0.247
	$1/2.5$	-0.157	-0.017	0.204	0.157	-0.046	-0.140	-0.157

$\alpha$	$\rho \backslash \theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$90^\circ$	1	-2.312	-0.955	0.662	-5.030	0.662	-0.955	-2.312
	$1/5$	-1.358	-0.992	-0.705	-1.272	-0.705	-0.992	-1.358
	$1/20$	-1.276	-1.005	-0.832	-1.052	-0.832	-1.005	-1.276
	$1/25$	-1.254	-1.020	-0.878	-0.978	-0.878	-1.020	-1.254

(正の符号は圧縮応力、負の符号は引張応力を示す。)

表-2.25 トンネル周辺直傍の  $\sigma_\theta$  の値 (単位  $P$ )

$\alpha$	$\rho \backslash \theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$0^\circ$	1	0	-0.047	0.251	0	-0.251	0.047	0
	$1/5$	0	0.019	0.107	0	-0.107	-0.107	0
	$1/20$	0	0.021	0.051	0	-0.051	-0.021	0
	$1/25$	0	0.017	0.029	0	-0.029	-0.017	0
$45^\circ$	1	-0.001	0.748	1.317	0	0.502	-0.107	-0.001
	$1/5$	0.308	0.569	0.776	0.571	0.516	0.268	0.308
	$1/20$	0.401	0.534	0.643	0.564	0.492	0.369	0.401
	$1/25$	0.440	0.520	0.588	0.546	0.491	0.584	0.440
$90^\circ$	1	0	0.907	0.640	0	-0.640	-0.907	0
	$1/5$	0	0.368	0.284	0	-0.284	-0.368	0
	$1/20$	0	0.198	0.169	0	-0.169	-0.198	0
	$1/25$	0	0.120	0.108	0	-0.108	-0.120	0

(正の符号は相対する二面に作用するせん断応力の両方が時計方向に向かうものを示すものとする。)

表-2.26 トンネル周辺直傍の  $\sigma_r$  の値 (単位  $P$ )

$\alpha$	$\rho \backslash \theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$0^\circ$	1	-0.200	-0.110	0.580	0.878	0.580	-0.110	-0.200
	$1/5$	-0.086	0.121	1.001	2.203	1.001	0.121	-0.086
	$1/20$	-0.047	0.212	0.927	1.584	0.927	0.212	-0.047
	$1/25$	-0.030	0.215	0.875	1.332	0.875	0.215	-0.030

$\alpha$	$\rho \backslash \theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$45^\circ$	1	0.969	1.777	0.151	0.926	-0.976	0.217	0.969
	$\frac{1}{15}$	0.338	1.318	1.812	0.280	-0.497	0.055	0.997
	$\frac{1}{20}$	0.375	1.156	1.397	0.376	-0.203	0.1048	0.746
	$\frac{1}{25}$	0.459	1.078	1.213	0.420	-0.088	-0.094	0.658
$90^\circ$	1	2.243	2.077	1.457	-5.031	1.457	2.077	2.243
	$\frac{1}{15}$	1.518	1.327	0.453	-0.773	0.453	1.327	1.518
	$\frac{1}{20}$	1.517	1.175	0.263	-0.562	0.263	1.175	1.517
	$\frac{1}{25}$	1.526	1.104	0.178	-0.487	0.178	1.104	1.526

(正の符号は圧縮応力、負の符号は引張応力を示す。)

表-2.27 トンネル周辺直傍の $\sigma_r$ の値 (単位:  $\rho$ )

$\alpha$	$\rho \backslash \theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$0^\circ$	1	-0.002	0	0	0	0	0	-0.002
	$\frac{1}{15}$	0.396	0.381	0.241	0.061	0.241	0.381	0.396
	$\frac{1}{20}$	0.615	0.504	0.271	0.040	0.271	0.504	0.615
	$\frac{1}{25}$	0.740	0.609	0.289	0.026	0.289	0.609	0.740
$45^\circ$	1	0.017	0.029	0.059	0	0.660	-0.619	0.017
	$\frac{1}{15}$	0.338	0.236	0.166	0.280	0.527	0.395	0.118
	$\frac{1}{20}$	0.375	0.206	0.109	0.376	0.699	0.590	0.252
	$\frac{1}{25}$	0.459	0.170	0.093	0.420	0.782	0.848	0.342
$90^\circ$	1	-0.069	0.029	0.017	-0.001	0.017	0.029	-0.069
	$\frac{1}{15}$	0.160	0.193	0.315	0.499	0.315	0.193	0.160
	$\frac{1}{20}$	0.241	0.329	0.387	0.490	0.387	0.329	0.240
	$\frac{1}{25}$	0.272	0.386	0.400	0.491	0.430	0.386	0.272

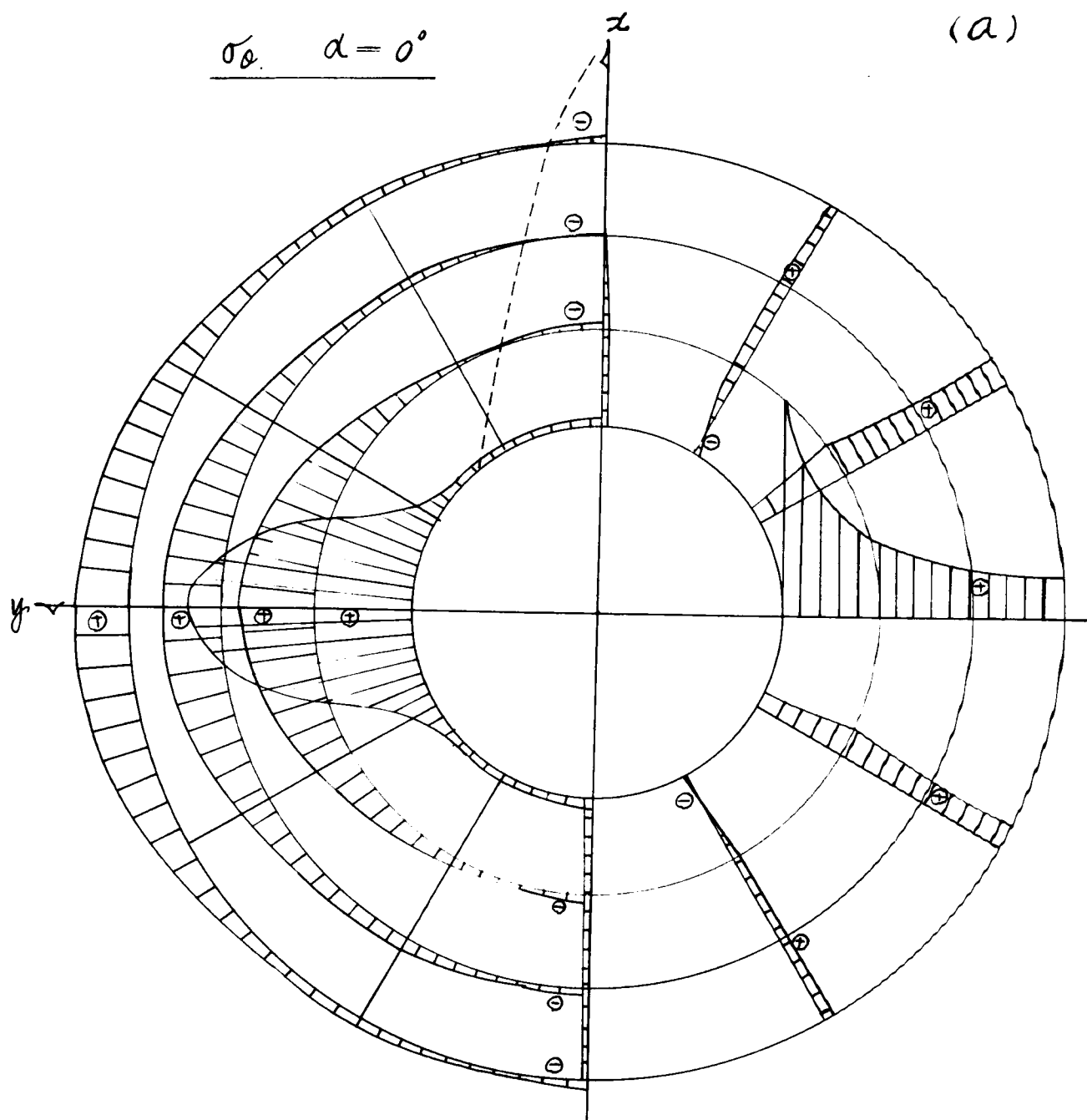
(正の符号は圧縮応力、負の符号は引張応力を示す。)

$\rho=1$  において理論的には  $\sigma_r=0$  となるが、この表では近似的に零となっている。

表-2.28 トンネル周辺近傍の  $r_{\theta}$  の値 (単位  $\rho$ )

$\alpha$	$\rho \backslash \theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$0^\circ$	1	0	0.001	0	0	0	0.001	0
	$\frac{1}{15}$	0	-0.249	-0.447	0	0.447	0.249	0
	$\frac{1}{20}$	0	-0.338	-0.475	0	0.475	0.338	0
	$\frac{1}{25}$	0	-0.377	-0.467	0	0.467	0.377	0
$45^\circ$	1	0.001	0.011	-0.043	0	0.026	0.011	0.001
	$\frac{1}{15}$	-0.308	-0.203	0.048	0.571	0.146	-0.241	-0.308
	$\frac{1}{20}$	-0.401	-0.244	0.172	0.564	0.203	-0.269	-0.401
	$\frac{1}{25}$	-0.440	-0.253	0.206	0.546	0.225	-0.353	-0.440
$90^\circ$	1	0	-0.040	0.033	0	-0.033	0.040	0
	$\frac{1}{15}$	0	0.246	0.448	0	-0.448	-0.246	0
	$\frac{1}{20}$	0	0.337	0.445	0	-0.445	-0.337	0
	$\frac{1}{25}$	0	0.382	0.434	0	-0.434	-0.382	0

( 正の符号は相対する二面に作用するせん断応力の偶力が「時計方向に向うものを示すものとする。  $\rho=1$  において理論的には  $r_{\theta}=0$  となるが、この表では近似的に零となっている。 )



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 P

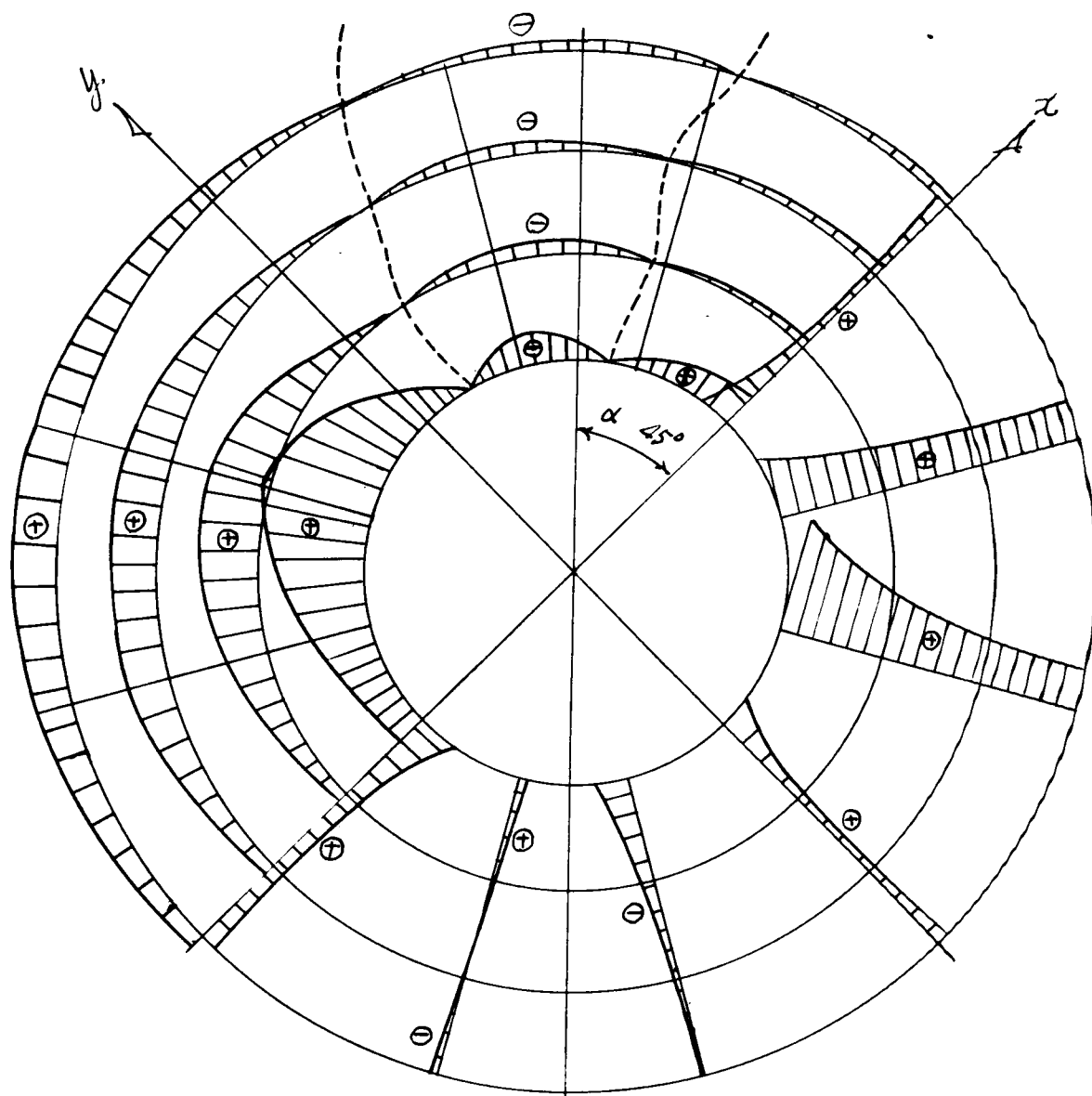
⊕ 圧縮応力

⊖ 引張応力

第2.55図

$\sigma_0 \quad \alpha = 45^\circ$

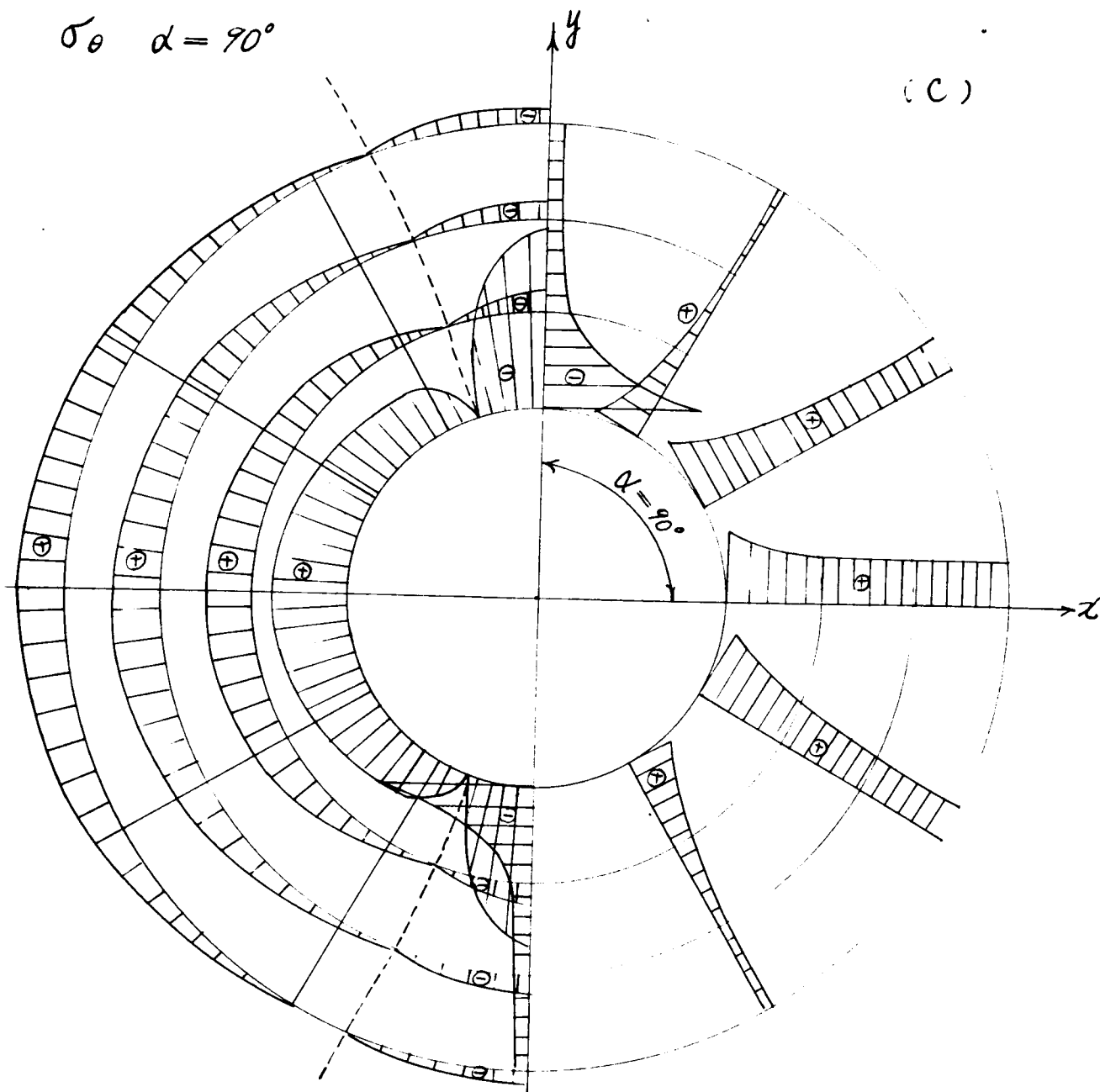
(b)



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 p

⊕ 圧縮応力  
⊖ 引張応力

才 2, 55 図

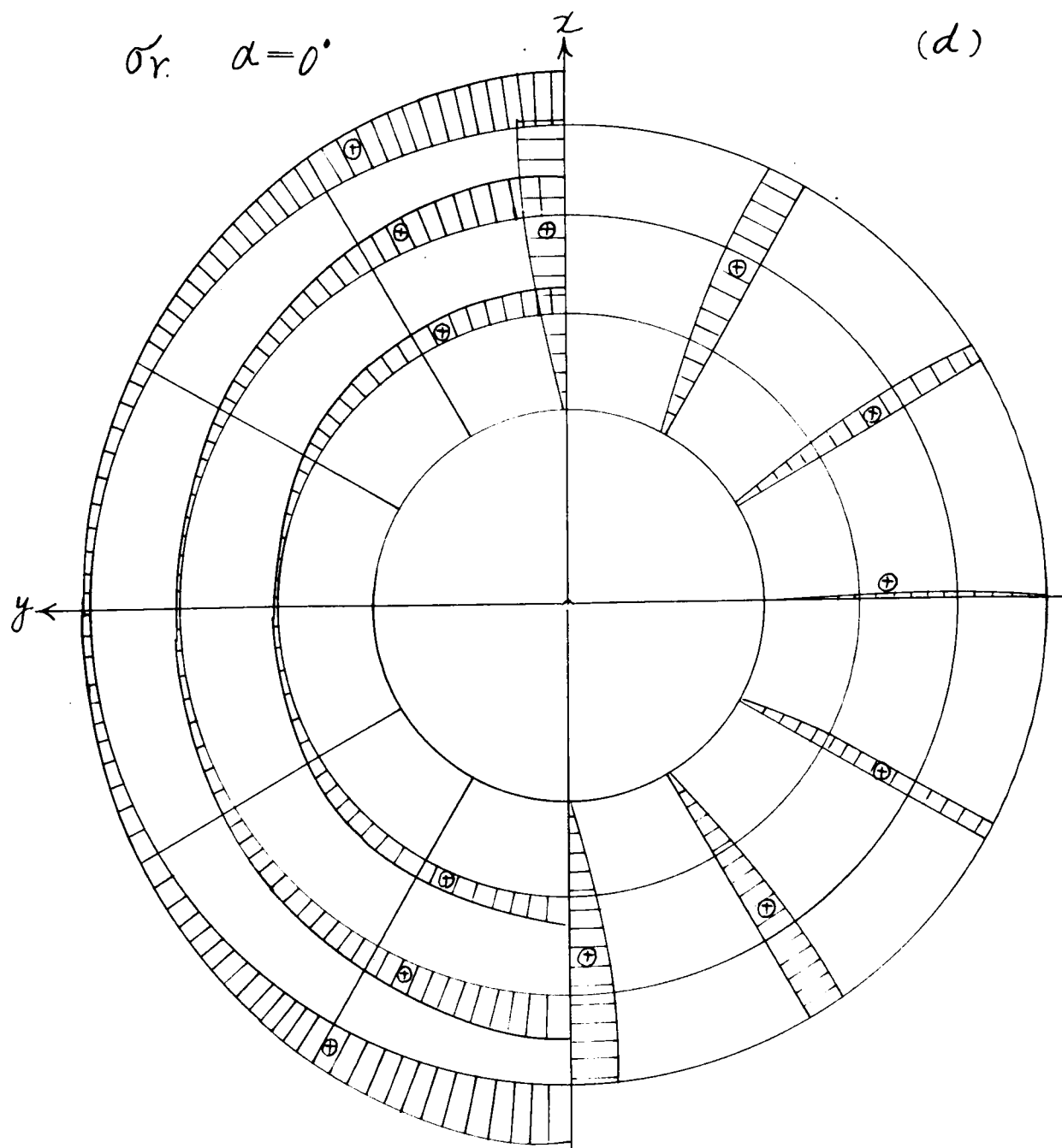


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  $p$

⊕ 壓縮应力  
⊖ 引張应力

第2,55図





0 1 2 3 4 5 p

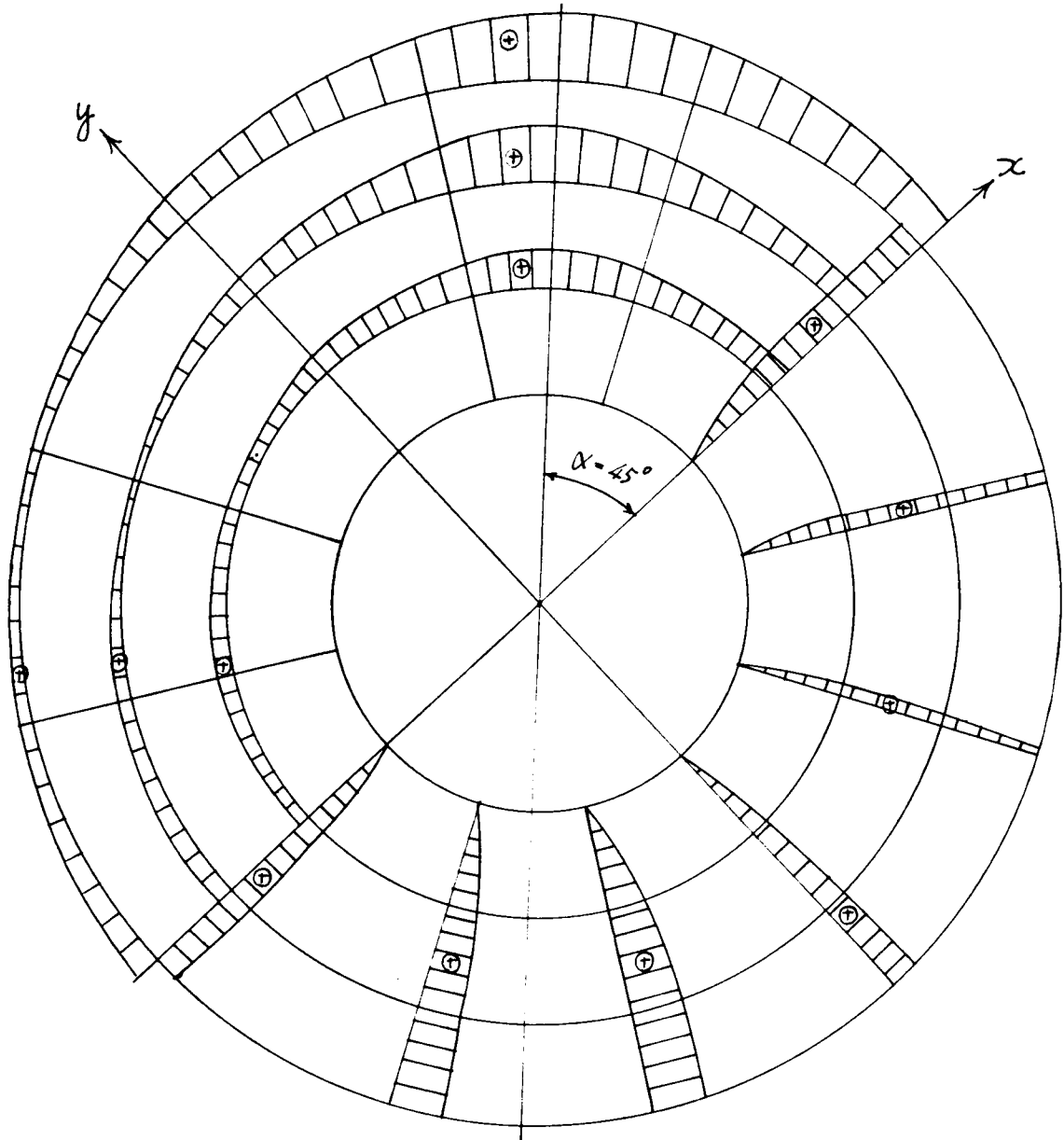
⊕ 圧縮応力

⊖ 圧縮応力

才2,55図

$\sigma_r \quad \alpha = 45^\circ$

(c)



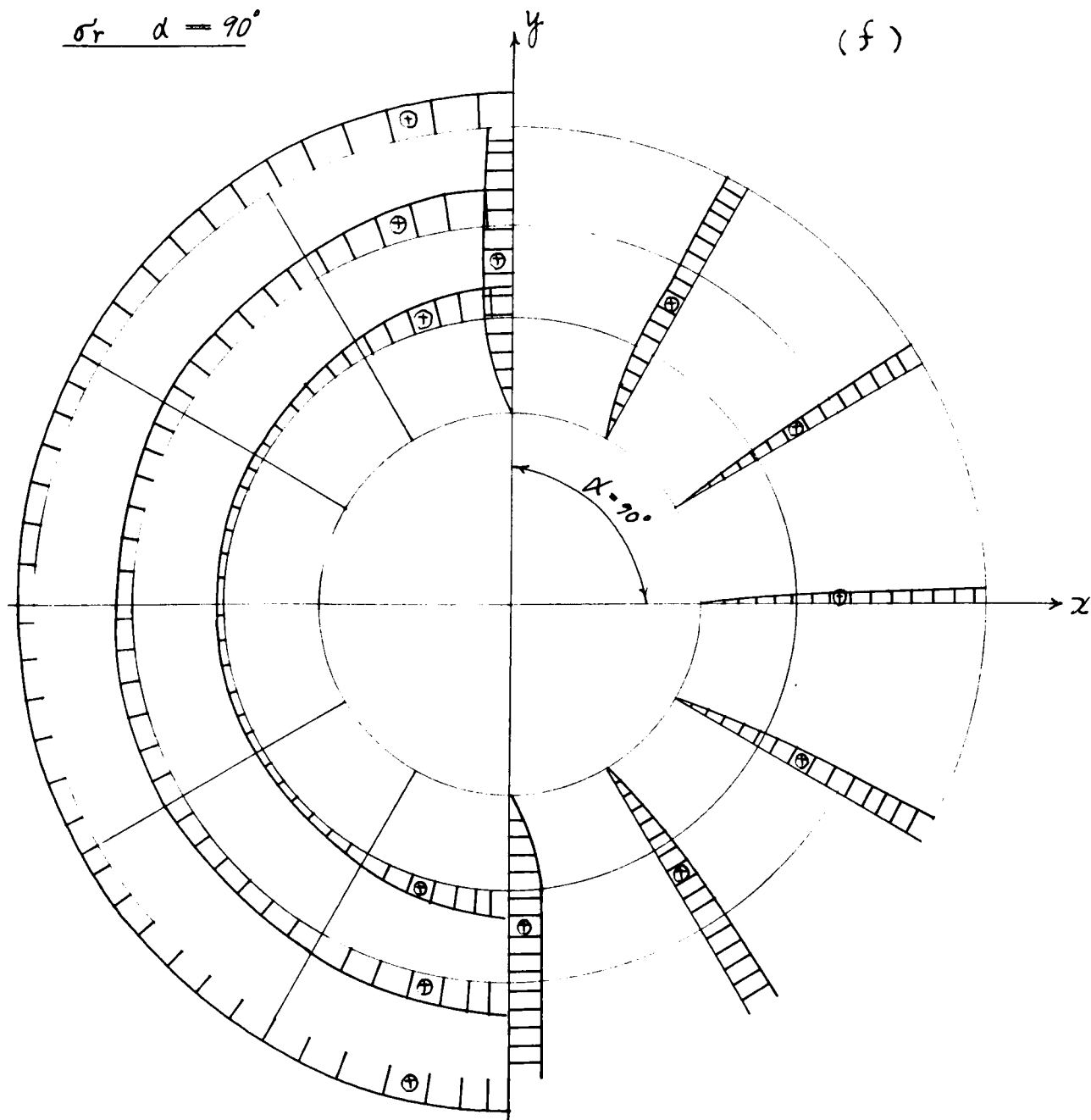
0 1 2 3 4 5 p

⊕ 圧縮応力  
⊖ 引張応力

※2,55図

$\sigma_r \quad \alpha = 90^\circ$

(f)

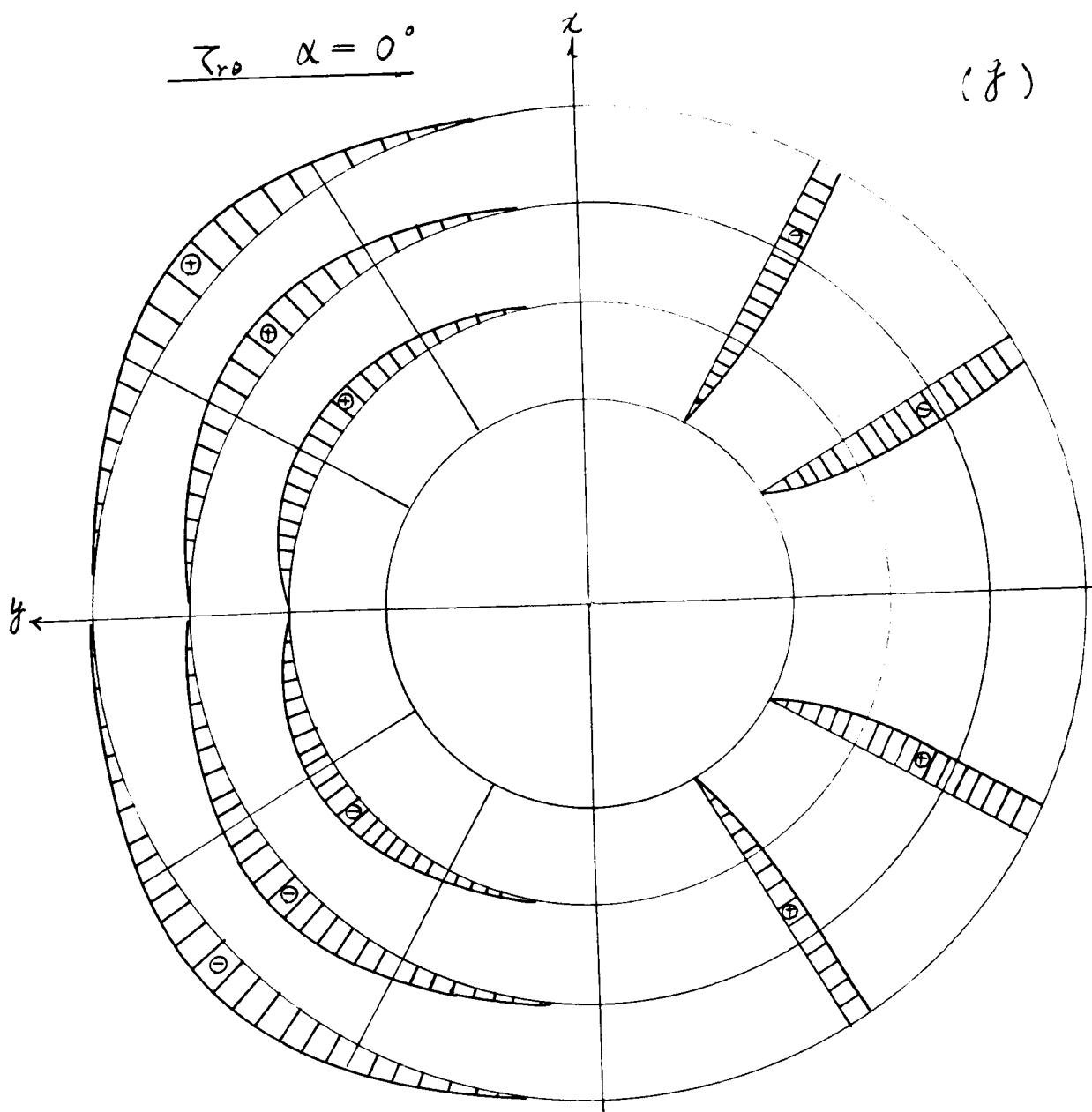


0 1 2 3 4 5 p

⊕ 圧縮応力

⊖ 引張応力

第2,55図



0 1 2 3 4 5P

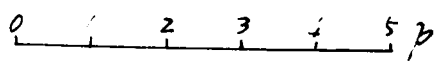
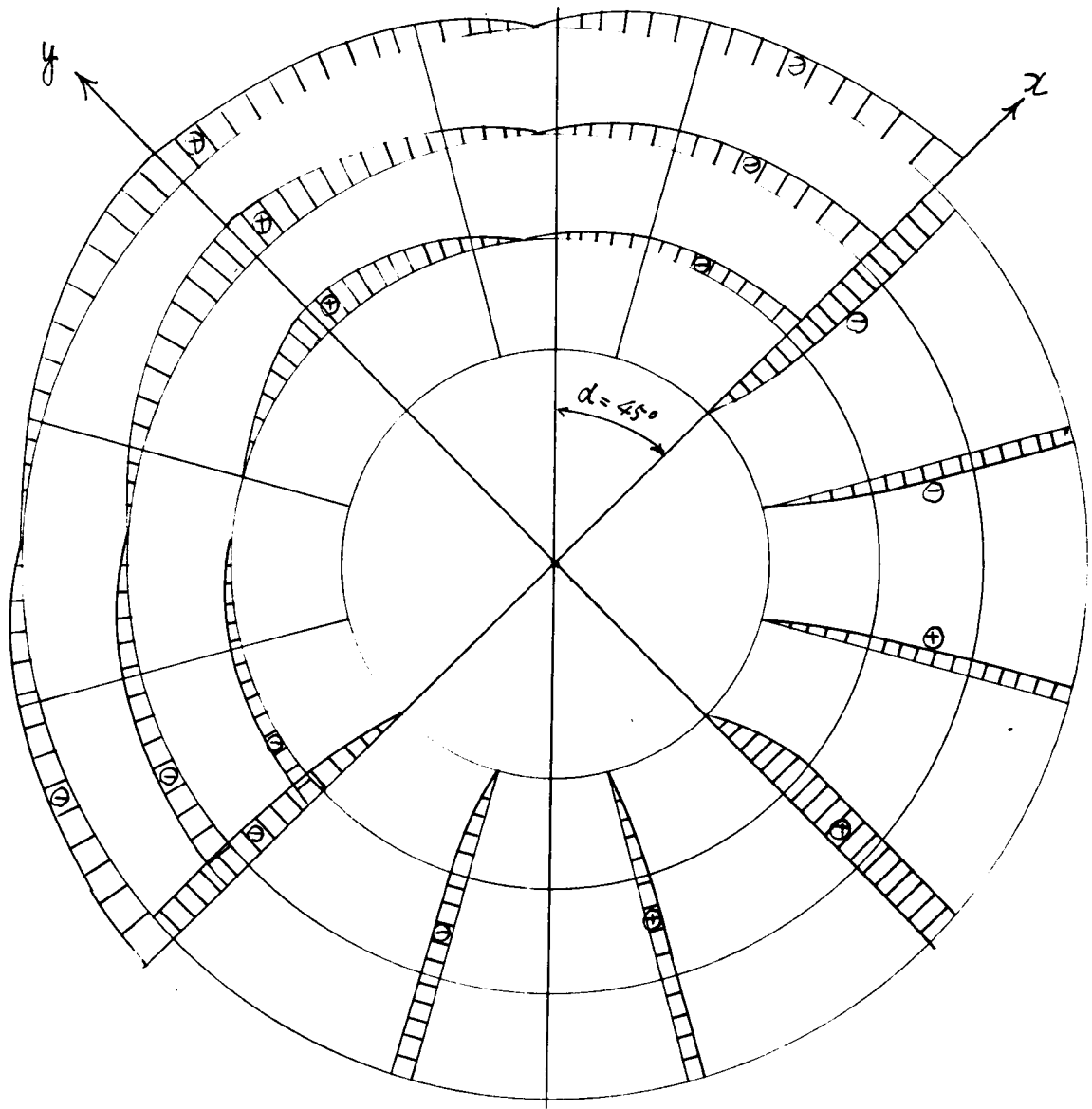
⊕ 圧縮応力

⊖ 引張応力

才2,55図

$\tau_{re} \quad \alpha = 45^\circ$

(h)



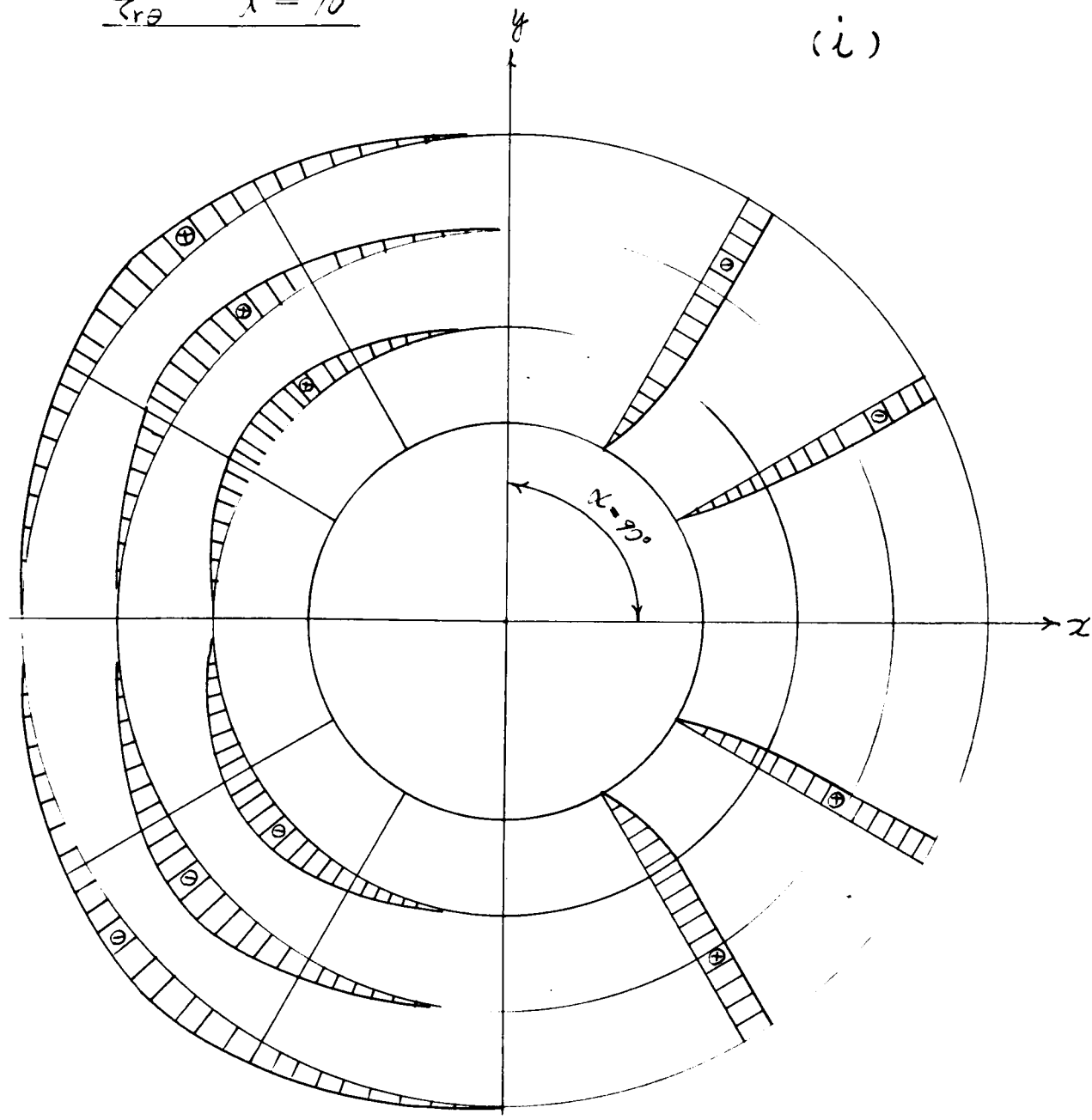
⑩ 壓縮应力

● 引張力

为2.55图

$\tau_{\theta} \quad \lambda = 90^\circ$

(i)



0 1 2 3 4 5 p

⊕ 圧縮応力  
⊖ 引張応力

第2, 55図

擬似異方性体としての地山中に掘削した円形トンネルの円孔縁上の $\sigma_\theta$ の応力分布についてみれば、 $E_x/E_y$  なる比が大となると応力集中の程度が大となる。すなわち第2.53図の  $E_x/E_y = 1.5/1$  の場合と第2.54図の  $E_x/E_y = 2.5/2$  の場合と比較すれば、第2.53図の場合では $\alpha$ の値が変化したときでも $\sigma_\theta$ の値は等方均質の地山の場合と比べて大した差異はなく、実用的には等方均質の地山の場合として計算してもよいが、第2.54図のように軟弱成層の影響によって  $E_x/E_y = 2.5/2$  となる位  $E_x/E_y$  なる比が大となると、 $\alpha=0$  の場合すなわち成層の方向が鉛直の場合ではトンネル側壁中央における圧縮応力は等方均質の地山のもの比べて著しく大となり、トンネル上下盤中央の引張応力は小となっている。 $\alpha=90^\circ$  の場合すなわち成層の方向が水平の場合ではトンネル側壁中央の圧縮応力は等方均質の地山の場合より小となるが、トンネル上下盤中央の引張応力は相当大となっている。 $\alpha=30^\circ$  及び  $60^\circ$  の場合すなわち成層方向が傾斜しているときは、最大圧縮応力、最大引張応力はそれぞれ等方均質の地山の場合の最大圧縮応力及び最大引張応力より幾分大となっているが、その最大圧縮応力及び最大引張応力の発生するトンネル円孔縁上の位置は $y$ 軸の方向に近づく。すなわち主弾性係数の最少値の弱点の方向に近づいていく特性がある。このことは G. Sonntag も述べている所である。つぎに  $E_x/E_y = 2.5/2$  の比の地山の場合、トンネル円孔周辺近傍の応力分布を第2.55図に示しているが、これによればつぎのことが云える。

(1)  $\sigma_\theta$  について：——

$\alpha=0$  の場合ではトンネル側壁中央の大なる圧縮応力は地山の中に入るに従い急激に減少するが、 $\alpha=90^\circ$  の $y$ 軸に沿った圧縮応力は  $\alpha=90^\circ$  以外のときより大なる値となっている。トンネル上下盤の引張応力は小であつて、トンネルの地山に入るに従つて減少し、 $\alpha=0$  以外の場合に比べて極めて小であり、また上下盤附近の地山中の引張応力の生ずる範囲も第2.55図 (a) の点線を示すように狭小である。 $\alpha=90^\circ$  の場合はトンネル上下盤中央の引張応力が極めて大なる値となる結果、地山の中に入るに従つて引張応力は急激に減少するとは云え、 $\alpha=90^\circ$  以外の場合と比べてかなり大きな引張応力となつていて、第2.55図 (c) の点線を示すように引張応力の生ずる範囲は地山の中に入るに従つて  $\alpha=90^\circ$  以外の場合に比べて拡大している。 $\alpha=45^\circ$  の場合ではトンネル周縁では $\sigma_\theta$ の最大値はトンネル側壁中央より $y$ 軸の方に近づいた位置に発生していて、地山の中に入つても $\sigma_\theta$ の最大値の発生する位置は $y$ 軸の方に近づいている。トンネル周縁上の $\sigma_\theta$ の圧縮応力の最大値は  $\alpha=0$  のときと  $\alpha=90^\circ$  のときの $\sigma_\theta$ の最大値の中間にある。引張応力の最大値も  $\alpha=0$  のときと  $\alpha=90^\circ$  のときの引張応力の最大値の中間にあり、引張応力の最大値の生ずる位置はトンネル周縁上では上下盤中央より $y$ 軸の方に近寄つていて、地山の中に入つてもこの傾向があり、引張応力の生ずる範囲は第2.55図 (b) に示すように大きくなつてゐる。

(2)  $\sigma_r$  について：——

$\sigma_r$  の応力分布の大概の傾向としては圧縮応力はトンネル上下盤中央の地山の中の所では大となつて、トンネル側壁中央の近傍の地山の中では減少している。 $\alpha=0^\circ$  のときは側壁中央近傍の地山の中の圧縮応力は最少の値となつてゐる。 $\alpha=45^\circ$  のときの上下盤中央附近の地山中の圧縮応力は最大となつていて、圧縮応力の最少値の生ずる位置は $y$ 軸

の方K近よっている。

(3).  $\tau_{r\theta}$ について: ———

$\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$  の場合は上下盤中央及び側壁中央の近傍の地山の中では  $\tau_{r\theta}$  の値は零となつていて、上下盤中央と側壁中央との間の地山の中では  $|\tau_{r\theta}|$  の最大値が発生する。 $\alpha = 45^\circ$  のときはこの分布が少し偏倚してきて、 $\tau_{r\theta} = 0$  のおこる位置が  $\theta$  軸の方に少し近づいている。 $|\tau_{r\theta}|$  の最大値は  $\alpha$  の何れの値のときでも近似した数値をとつていて大差はない。

いままでK述べた理論によつてこれまで不明であつた異方性体の地山中のトンネル円孔近傍の応力分布の様相が明かとなり、軟弱なる成層を含む地山では  $E_x/E_y$  の比が大となる結果、等方均質の地山のトンネルK比べて特異なる応力集中を生ずることが判つた。



# 第8章 巻立トンネル周辺の応力分布<sup>70)</sup>

### 第ノ節 直交座標系による応力と変位の式

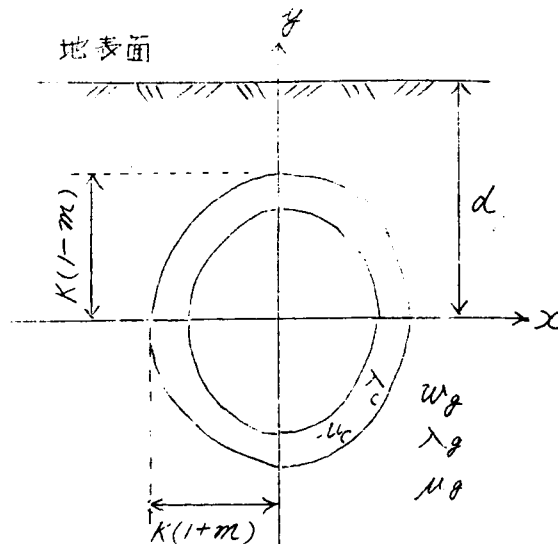
いままで述べてきた理論は殆んど衆知トンネルの周辺の変位分析及び変形挙動についての  
ものであつたが、巻立トンネルに作用する土圧によつて巻立内に発生する応力について本章  
で述べる。この種の問題に就いては土圧については、従来より *Bierbraumer, Terzaghi,*  
*Willmann*、小野詠元、眞井耕家、伊藤萬雄諸氏の土質工学の立場よりの研究があり、  
求められた土圧がトンネルの巻立に作用するときの多角形と連立図を用いて圧力線を描い  
て巻立内の応力を求めるのが普通の方法である。これらの理論の前提は地山の土のせん断抵  
抗が充分發揮されるまで変位が許されて始めて土圧が生ずるとしていたのである。しかしな  
がら縫地工法をとるような場合、地山の変位をある程度制限して巻立をする。このような場  
合の土圧は支保工、巻立の変位と大いに関係をもっているであつて、このことを考慮した  
理論は数学的取扱が困難なものである。そこで著者は近似的に最初に地山を弾性体とみなし  
て、これに巻立トンネルを作つた場合巻立の找料、寸法と地山の土被り、ポアッソン数に對  
応した変位を主とするとして、地山の圧力による巻立トンネルの応力分析を求めてみる。この  
種の研究として一定の厚さの同心円の巻立のある場合については、谷本勲之助博士<sup>21)</sup>によ  
つて解決されている。また巻立トンネルについて *Yu - Yuan Yu*<sup>22)</sup> によつて研究されて  
いるが、この解法において地山と巻立との境界において完全な結合があり、その変位を零と  
して解いている。これは實際問題としては不合理である。これによつて巻立内の応力分析は  
求められない。そこで著者はこの巻立トンネルの場合の応力分布及び巻立内に生ずる応力分  
布を求めるのに、2次元弾性問題の解法としての *Muschelishvili*<sup>23)</sup> の複素変換による  
が法を重力体の応力問題に適用し、巻立内壁においてせん断応力及び内壁周縁と直交方向の  
直応力が零となり、巻立と地山との境界においてそれぞれのせん断応力及びその境界周と直  
交方向の直応力が等しく、かつ変位が等しいという境界条件のもとにこの問題を解いた。

ところで地山を弾性体とみなしたのであるが、軟弱な地山のときはこの弾性論において伊藤豊雄博士<sup>29)</sup>によつて述べられているように地山がシルト、粘土のようなものときや近似的にポアッサン数を大略2にとつてよく、地山が砂のような場合はポアッサン数を大略2.5位にとればよい。本章においては地山の地表面は水平であるとして、かつこの巻立トンネル周辺の応力分布については土破りが相当大きくて、地表面の影響は無視しうるものと仮定する。この問題を弾性論的に取扱うのに直交座標系による応力及び変形の式の形を最初取扱うこととする。

## (1)、コンクリート巻立部の応力及び変位の式

コンクリート巻立部における自重は無視して考える。いま  $v_c$ ;  $A_{irz}$  の応力函数、 $\varepsilon_x \varepsilon_y$ ;  $x$  方向の直応力、 $\gamma_{xy}$ ;  $xy$  方向の直応力、 $\varepsilon_{\theta}$ ; セン断応力、として、コンクリート巻立部におけるものには添字  $c$  をつけるものとする。

又軸は水平方向， $\theta$ 軸は鉛直方向の軸を表わす。(第2.56図参照)，応力は次式となる。



第2.56図

$$\tau_{xxc} = \frac{\partial^2 U_c}{\partial y^2}, \quad \tau_{yyc} = \frac{\partial^2 U_c}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy c} = -\frac{\partial^2 U_c}{\partial x \partial y} \quad (2.8.1)$$

Muschelishvili<sup>75)</sup>によれば、応力函数  $U_c$  は複素変数  $Z = x + iy$  の2つの解析函数  $\varphi_c(Z)$  と  $\bar{\varphi}_c(\bar{Z})$  と  $K$  によって次のように表わされる。

$$2U_c = \bar{Z}\varphi_c(Z) + Z\bar{\varphi}_c(\bar{Z}) + \psi_{2c}(Z) + \bar{\psi}_{2c}(\bar{Z}) \quad (2.8.2)$$

ただし  $\psi_{2c}(Z) = \int \varphi_c(Z) dZ$  として、 $\bar{Z}$  は  $Z$  の共軛なものであり、 $\bar{\varphi}_c(\bar{Z})$ 、 $\bar{\psi}_{2c}(\bar{Z})$  はそれぞれ  $\varphi_c(Z)$ 、 $\psi_{2c}(Z)$  の共軛な解析函数である。

いま  $\tau_{xc}$ 、 $\tau_{yc}$  はそれぞれ境界における  $x$  方向、 $y$  方向の外力または応力とし、 $d\alpha$  は境界に沿った微小長とすれば、

$$\tau_{xc} = \tau_{xxc} \frac{dy}{d\alpha} - \tau_{xy c} \frac{dx}{d\alpha}, \quad \tau_{yc} = \tau_{xy c} \frac{dy}{d\alpha} - \tau_{yyc} \frac{dx}{d\alpha}$$

この2式に(2.8.1)式を代入すれば、

$$\tau_{xc} = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial U_c}{\partial y} \right), \quad \tau_{yc} = -\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial U_c}{\partial x} \right) \quad (2.8.3)$$

(2.8.3)式の第1式と(2.8.3)式の第2式に  $i$  を乗じたものを辺々相加えて、その結果の式に  $i d\alpha$  をさらに乗じて積分し(2.8.2)式を用いて次式がえられる。

$$\varphi_c(Z) + Z\bar{\varphi}_c(\bar{Z}) + \bar{\varphi}_c(\bar{Z}) = i \int (\tau_{xc} + i \tau_{yc}) d\alpha \quad (2.8.4)$$

巻立において自重を無視しているから、重力ポテンシャル  $U_c$  は零である。

$$U_c = 0 \quad (2.8.5)$$

しからは応力成分は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xxc} + \tau_{yyc} &= 2 \left\{ \varphi'_{1c}(z) + \bar{\varphi}'_{1c}(\bar{z}) \right\} \\ \tau_{yyc} - \tau_{xxc} + 2i\tau_{xyc} &= 2 \left\{ \bar{z} \varphi''_{1c}(z) + \psi'_{1c}(z) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.8.6)$$

ただし解析函数の one dash, two dash はそれぞれ1回微分, 2回微分をすることを示す。また  $u_c$ ; 変位の  $x$  成分,  $v_c$ ; 変位の  $y$  成分 とすれば,

$$2\mu_c(u_c + i v_c) = \kappa_c \varphi_{1c}(z) - z \bar{\varphi}'_{1c}(\bar{z}) - \bar{\psi}_{1c}(\bar{z}) \dots\dots\dots (2.8.7)$$

ただし  $\lambda_c, \mu_c$ ; Lamé 係数,  $\kappa_c = \frac{\lambda_c + 2\mu_c}{\lambda_c + \mu_c}$  とする。つきに  $\nabla_{1c} = 0$  なる故に, これと共軛なるものを  $\bar{\nabla}_{1c}$  とすれば  $\bar{\nabla}_{1c} = 0$  となる故に

$$\nabla_{1c}(z) = \frac{1}{2} \int (\bar{\nabla}_{1c} + i \bar{\nabla}_{1c}) dz = 0 \dots\dots\dots (2.8.8)$$

## (2) 地山部の応力及び変位の式

地山部においては重力が作用していて, 重力は  $y$  の負の方向にむいているから  $X_g$ ; 物体力の  $x$  成分,  $Y_g$ ; 物体力の  $y$  成分,  $w_g$ ; 地山の単位体積当りの重量, とすれば,

$$X_g = 0, \quad Y_g = -w_g$$

$V_{1g}$ ; 物体力に対する重力ポテンシャル とすれば

$$X_g = -\frac{\partial V_{1g}}{\partial x}, \quad Y_g = -\frac{\partial V_{1g}}{\partial y} \quad \therefore V_{1g}(x, y) = w_g y$$

いま (1) における諸記号の添字  $c$  の代りに  $g$  を用いて地山部のものを表わすとすれば

$$\tau_{xxg} - V_{1g} = \frac{\partial^2 U_g}{\partial y^2}, \quad \tau_{y yg} - V_{1g} = \frac{\partial^2 U_g}{\partial x^2}, \quad \tau_{x yg} = -\frac{\partial^2 U_g}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (2.8.1')$$

$$2U_g = \bar{z} \varphi_{2g}(z) + z \bar{\varphi}_{2g}(\bar{z}) + \psi_{2g}(z) + \bar{\psi}_{2g}(\bar{z}) \dots\dots\dots (2.8.2')$$

ただし  $\psi_{2g}(z) = \int \psi_{1g}(z) dz$  とする。

$$\tau_{xg} = \tau_{xxg} \frac{dy}{ds} - \tau_{x yg} \frac{dx}{ds}, \quad \tau_{yg} = \tau_{y yg} \frac{dy}{ds} - \tau_{y xg} \frac{dx}{ds},$$

この2式に (2.8.1') を代入すれば,

$$\tau_{xg} - V_{1g} \frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial U_g}{\partial y} \right), \quad \tau_{yg} + V_{1g} \frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial U_g}{\partial x} \right) \dots\dots\dots (2.8.3')$$

(1) において (2.8.4) 式を求めたと同様の方法により次式が成立する,

$$\varphi_{1g}(z) + z \bar{\varphi}'_{1g}(\bar{z}) + \bar{\psi}_{1g}(\bar{z}) = i \int (\tau_{xg} + i \tau_{yg}) ds - \int V_{1g}(z) dz \dots\dots\dots (2.8.4')$$

$V_{1g}$  なる函数を複素数の形で書き表わせば,

$$V_{1g} = w_g y = -\frac{1}{2} i w_g (z - \bar{z}) \dots\dots\dots (2.8.5')$$

これを物体力のない境界条件と対照すれば，物体力はあたかも外<sup>力</sup>のように考えることができる。Biot が示したようにこの外力は  $\nabla_g$  に等しい水圧に等値でき，(2.8.3)式により  $\nabla_g$  の成分はそれぞれ  $-\nabla_g \frac{d\psi}{dz}$ ， $\nabla_g \frac{d\chi}{dz}$  である。しからば応力成分は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xxg} + \tau_{yyg} &= 2\{\psi'_{,g}(z) + \bar{\psi}'_{,g}(\bar{z})\} + 2\nabla_{,g}(z) \\ \tau_{yyg} - \tau_{xxg} + 2i\tau_{xyg} &= 2\{\bar{z}\psi''_{,g}(z) + \psi'_{,g}(z)\} \end{aligned} \right\} \dots (2.8.6')$$

また変位成分は次式となる。

$$2\mu_g(u_g + i v_g) = \kappa_g \psi_{,g}(z) - z \bar{\psi}'_{,g}(\bar{z}) - \bar{\psi}_{,g}(\bar{z}) + 2(\kappa_g - 1)\delta'_{,g}(z) \dots (2.8.7')$$

$\nabla_{,g} = \omega_g y$  の共軛なものを  $\bar{\nabla}_{,g}$  とすれば  $\bar{\nabla}_{,g} = -\omega_g x$  となり，

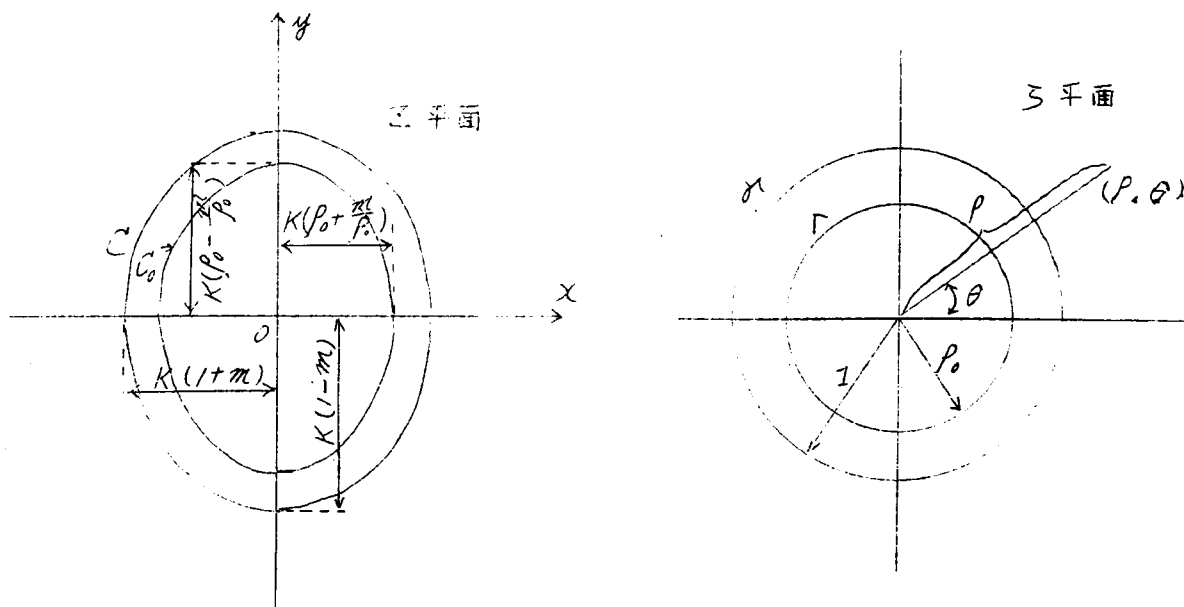
$$\delta'_{,g}(z) = \frac{1}{4} \int (\nabla_{,g} + i \bar{\nabla}_{,g}) dz = -\frac{1}{8} i \omega_g z^2 \dots (2.8.8')$$

が成立する。

## 第2節 曲線座標系による応力及び変位の式

写像の問題について考えるに，等角写像論で明らかとなる平面の領域  $S$  の境界  $C$  を，

$$z = w(\zeta) \dots (2.8.9)$$



第 2.5 図

の関係で  $z$  面での単位円内に一意的に等角写像することができる。(第2.57図参照)。

$z = \rho e^{i\theta}$  として  $\rho, \theta$  を  $z$  面での極座標とすると,  $\rho = \text{一定}$  及び  $\theta = \text{一定}$  は  $z$  面である曲線となる。この曲線は  $\rho = \text{一定}$  に対しては  $z_0 = w(0)$  なる点を曲む内曲線であり,  $\theta = \text{一定}$  に対してはこの点から出て周辺  $C$  に達する放射状の曲線である。この2種の曲線は互いに直交しているが, これを  $z$  面での座標を採用する。  $\theta = \text{一定}$  に対する曲線を  $\rho$ -線,  $\rho = \text{一定}$  に対する線を  $\theta$ -線と名づけ, そのおのおのの接線方向を  $\rho$ -軸,  $\theta$ -軸ということとする。

(1) コンクリート巻立部の応力及び変位。

$$\varphi_c(z) = \varphi_{ic}(w(z)) = \varphi_{ic}(z), \quad \psi_c(z) = \psi_{ic}(w(z)) = \psi_{ic}(z)$$

$$\bar{\varphi}_c(z) = \frac{\varphi'_c(z)}{w'(z)}, \quad \bar{\psi}_c(z) = \frac{\psi'_c(z)}{w'(z)}$$

として応力成分を  $z$  の函数として表わせば次式となる。ただし  $\tau_{\rho\rho c}$ ;  $\rho$ -軸方向の直応力,  $\tau_{\theta\theta c}$ ;  $\theta$ -軸方向の直応力,  $\tau_{\rho\theta c}$ ; 曲線座標系におけるせん断応力, とする。

$$\tau_{\rho\rho c} + \tau_{\theta\theta c} = 2\{\bar{\varphi}_c(z) + \bar{\varphi}_c(\bar{z})\} \quad (2.8.10)$$

$$\tau_{\theta\theta c} - \tau_{\rho\rho c} + 2i\tau_{\rho\theta c} = \frac{2z^2}{\rho^2 \bar{w}'(\bar{z})} \{\bar{w}(z)\bar{\varphi}'_c(z) + w'(z)\bar{\psi}_c(z)\} \quad (2.8.11)$$

又,  $\theta$  方向の変位成分  $u_c, v_c$  はそれぞれ次式のごとくなる。

$$2\mu_c(u_c + iv_c) = \kappa_c \varphi_c(z) - \frac{w(z)}{\bar{w}'(\bar{z})} \bar{\varphi}'_c(\bar{z}) - \bar{\psi}_c(\bar{z}) \quad (2.8.12)$$

いま第2.57図に示すごとく  $z$  平面の周辺  $C$  を地山と巻立との境界として, これが  $z$  平面の単位円内に写像され, また  $z$  平面の周辺  $C_0$  を巻立の内壁として, これが  $z$  平面の半径  $\rho_0$  なる円内に写像されるとすれば, 第1種境界値問題として, 境界  $C$  及び  $C_0$  上の応力に関しては (2.8.4) 式より,

(i)  $\rho$  円上において  $\rho = 1$  となるから, このときの  $z$  を  $\sigma$  として  $\sigma = e^{i\theta}$  となる。

$$\varphi_c(\sigma) + \frac{w(\sigma)}{\bar{w}'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}'_c(\bar{\sigma}) + \bar{\psi}_c(\bar{\sigma}) = f_{1c} + if_{2c} \quad (2.8.13)$$

ただし,

$$f_{1c} + if_{2c} = i \int (\tau_{xc} + i\tau_{yc}) d\sigma \quad (2.8.14)$$

(ii)  $\Gamma$  円上において  $\rho = \rho_0$  となるから, このときの  $z$  を  $\sigma_0$  として  $\sigma_0 = \rho_0 e^{i\theta}$  となる。  $\rho_0 < 1$  であつて,

$$\varphi_c(\sigma_0) + \frac{w(\sigma_0)}{\bar{w}'(\bar{\sigma}_0)} \bar{\varphi}'_c(\bar{\sigma}_0) + \bar{\psi}_c(\bar{\sigma}_0) = f_{1c_0} + if_{2c_0} \quad (2.8.13')$$

ただし

$$f_{1c_0} + if_{2c_0} = i \int (\tau_{xc_0} + i\tau_{yc_0}) d\sigma \quad (2.8.14')$$

第2種境界値問題として境界  $C$  上の変位に関しては (2.8.7) 式より  $\rho$  円上において,

$$\kappa_c \varphi_c(\sigma) - \frac{w(\sigma)}{\bar{w}'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}'_c(\bar{\sigma}) - \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) = 2\mu_c(g_{1c} + i g_{2c}) \quad (2.8.15)$$

ただし,

$$2\mu_c(g_{1c} + i g_{2c}) = 2\mu_c(u_c + i v_c) \quad (2.8.16)$$

## (2). 地山部の応力及び変位

$$\varphi_g(z) = \varphi_g(w(z)) = \varphi_g(z), \quad \psi_g = \psi_g(w(z)) = \psi_g(z),$$

$$\bar{\varphi}_g = \frac{\varphi'_g(z)}{w'(z)}, \quad \bar{\psi}_g(z) = \frac{\psi'_g(z)}{w'(z)}, \quad \bar{v}_g(z) = \bar{v}_g(w(z)) = \bar{v}_g(z),$$

として, また (1) における諸記号の添字  $c$  の代りに  $g$  を用いて地山部のものを表わすとする。

$$\tau_{ppg} + \tau_{\theta\theta g} = 2\{\bar{\varphi}_g(z) + \bar{\varphi}_g(\bar{z})\} + 2\bar{v}_g(z) \quad (2.8.10')$$

$$\tau_{\theta\theta g} - \tau_{ppg} + 2i\tau_{p\theta g} = \frac{2z^2}{\rho^2 \bar{w}'(\bar{z})} \{\bar{w}(\bar{z}) \bar{\varphi}'_g(z) + w'(z) \bar{\psi}_g(z)\} \quad (2.8.11')$$

また  $\gamma_g(z) = \gamma_g(w(z)) = \gamma_g(z)$  として

$$2\mu_g(u_g + i v_g) = \kappa_g \varphi_g(z) - \frac{w(z)}{\bar{w}'(\bar{z})} \bar{\varphi}'_g(\bar{z}) - \bar{\varphi}_g(\bar{z}) + 2(\kappa_g - 1)\gamma_g(z) \quad (2.8.12')$$

第1種境界値問題として境界  $C$  上の応力に関しては (2.8.4') 式より  $\delta$  円上において,

$$\varphi_g(\sigma) + \frac{w(\sigma)}{\bar{w}'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}'_g(\bar{\sigma}) + \bar{\varphi}_g(\bar{\sigma}) = f_{1g} + i f_{2g} \quad (2.8.13')$$

ただし,

$$f_{1g} + i f_{2g} = i \int (\tau_{x\theta} + i \tau_{y\theta}) d\sigma - \int \bar{v}_g(z) dz \quad (2.8.14')$$

第2種境界値問題としては境界  $C$  上の変位に関しては (2.8.7') 式より  $\delta$  円上において,

$$\kappa_g \varphi_g(\sigma) - \frac{w(\sigma)}{\bar{w}'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}'_g(\bar{\sigma}) - \bar{\varphi}_g(\bar{\sigma}) = 2\mu_g(g_{1g} + i g_{2g}) \quad (2.8.15')$$

ただし

$$2\mu_g(g_{1g} + i g_{2g}) = 2\mu_g(u_g + i v_g) - 2(\kappa_g - 1)\gamma_g \quad (2.8.16')$$

第2.57図に示すごとく  $z$  平面の橢円を  $z$  平面の円に写像するには (2.8.9) 式の形として次式を採用すればよい。

$$z = w(\zeta) = K\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \quad (2.8.17)$$

しからば  $C$  なる橢円が  $z$  平面の単位円  $\delta$  に写像される故に,

$$z = w(\sigma) = K\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right) \quad (2.8.18)$$

ただし  $|m| < 1$  とする。(2.8.17) 式において  $m=0$  のときは  $z$  平面の内なる平面の円に写像される。(2.8.5') 式より  $z$  円上においては、

$$V_g(\sigma) = V_g(z) = -\frac{1}{2} i \omega_g K(1-m) \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \quad (2.8.19)$$

(2.8.8') 式より  $z$  円上においては、

$$\delta_g(\sigma) = \delta_g(z) = -\frac{1}{2} i \omega_g K^2 \left( \sigma + \frac{m}{\sigma} \right)^2 \quad (2.8.20)$$

(2.8.14') 式の右辺第2項の計算は  $z$  円上において次の如くなる。

$$-\int V_g(z) dz = \frac{1}{2} i \omega_g K^2 (1-m) \left( \frac{\sigma^2}{2} - (1+m) \log \sigma - \frac{m}{2\sigma^2} \right) \quad (2.8.21)$$

### 第3節 解析関数の形

#### (1) コンクリート巻立部における解析関数

巻立部の弾性体の占める領域は第2.57図において  $C$  なる周辺の内側で  $C_0$  なる周辺の外側となっているから、この領域の解析関数は次式となる。

$$\varphi_c(z) = A \log z + \varphi_{c_1}^0(z) + \varphi_{c_2}^0(z)$$

$$\psi_c(z) = B \log z + \psi_{c_1}^0(z) + \psi_{c_2}^0(z)$$

$$\varphi_{c_1}^0(z) = \frac{\alpha_{1c_1} + i\beta_{1c_1}}{z} + \frac{\alpha_{2c_1} + i\beta_{2c_1}}{z^2} + \dots$$

$$\varphi_{c_2}^0(z) = (\alpha_{1c_2} + i\beta_{1c_2})z + (\alpha_{2c_2} + i\beta_{2c_2})z^2 + \dots$$

$$\psi_{c_1}^0(z) = \alpha'_{1c_1} + i\beta'_{1c_1} + \frac{\alpha'_{2c_1} + i\beta'_{2c_1}}{z} + \frac{\alpha'_{3c_1} + i\beta'_{3c_1}}{z^2} + \dots$$

$$\psi_{c_2}^0(z) = (\alpha'_{1c_2} + i\beta'_{1c_2})z + (\alpha'_{2c_2} + i\beta'_{2c_2})z^2 + \dots$$

(2.8.22)

ただし  $A, B$  は複素数の常数であり、 $\alpha_{nc}, \beta_{nc}; \alpha_{nc_2}, \beta_{nc_2}; \alpha'_{nc}, \beta'_{nc}; \alpha'_{nc_2}, \beta'_{nc_2}$  は実数の常数である。

#### (2) 地山部における解析関数

地山は第2.57図において  $C$  なる周辺の外部に無限に拡がっていて、 $z = \infty$  なる無限遠で一定の応力をうけているから、この領域の解析関数は単位円の外部  $|z| \geq 1$  に写像されている。この地山部の解析関数は次式となる。

$$\varphi_g(z) = B_g K z - \frac{X_g + iY_g}{2\pi(\kappa_g + 1)} \log z + \varphi_g^0(z) \quad (2.8.23)$$

$$\psi_g(z) = (B'_g + iC'_g) K z + \frac{\kappa_g(X_g - iY_g)}{2\pi(\kappa_g + 1)} \log z + \psi_g^0(z)$$

ただし  $B_g, B'_g, C'_g$  は常数であり、(2.8.22') 式の右辺第一項は初期応力により決定されるべきものであり、 $X_g, Y_g$  は第2.57図の  $C$  周辺上に作用する外力の合力で、この

場合コンクリート巻立の自重を無視できるときは、右辺第二項はトンネルを穿つために起るC内の土の排除による非平衡力によって決定されるべきものである。 $\varphi_g^0(z), \psi_g^0(z)$ は(2.8.25)式に示すごとき補正解析函数である。

トンネルの中心におけるトンネル掘削前の初期応力として、その鉛直方向の最大主応力を $\sigma_1$ 、水平方向の最小主応力を $\sigma_2$ とすれば、 $d$ ；水平地表面よりトンネル中心までの深さ、として、(2.8.5')式より、

$$\tau_{1g} = (w_g y)_{y=d} = w_g d$$

この $x$ 方向、 $y$ 方向の成分はそれぞれ $-\tau_{1g} \frac{dy}{dx} = 0, \tau_{1g} \frac{dx}{dy} = -w_g d$ であつて、第2式が成り立つのは $d$ の符号は境界を正の方向に進むとき、法線の正方向は右側にありよきからである。 $m_g$ ；地山における *poisson* 数とすれば  $z = \infty$  において、

$$\sigma_1 = -w_g d, \quad \sigma_2 = -\frac{w_g d}{m_g - 1},$$

となる。 $\alpha$ ； $\sigma_1$  の方向と  $Ox$  軸との間の角とすれば、 $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$B_g = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4} = -\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)}$$

$$B_g' = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = -\frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1}$$

$$C_g = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = 0$$

$$X_g + iY_g = -i \{ f_{1g} + i f_{2g} \}_A^A$$

ただしこの括弧は周回Cまたは単位円Kに沿つて時針回りの方向に一巡したときの増加を示している。巻立部の自重は無視しているときには、(2.8.14)式を上式に代入して物体力は(2.8.21)式の量だけ  $f_{1g} + i f_{2g}$  K contribute するから、

$$X_g + iY_g = -i \left\{ - \int \tau_{1g}(\sigma) w'(\sigma) d\sigma \right\}_A^A = i \pi w_g K^2 (1 - m^2)$$

(2.8.24)

こゝに  $\pi K^2 (1 - m^2)$  はCなる楕円で囲まれた面積である。

(2.8.24)式は結局トンネル掘削による土の重量減少によるものである。深さ $d$ が大なるときKは周回Cの外側の全領域において $\varphi^0(z), \psi^0(z)$ は正則な函数であつて131の十分大きい値で次の形で表わされる。

$$\varphi_g^0(z) = \frac{\alpha_{1g} + i\beta_{1g}}{z} + \frac{\alpha_{2g} + i\beta_{2g}}{z^2} + \dots$$

$$\psi_g^0(z) = \alpha'_{1g} + i\beta'_{1g} + \frac{\alpha'_{2g} + i\beta'_{2g}}{z} + \frac{\alpha'_{3g} + i\beta'_{3g}}{z^2} + \dots$$

(2.8.25)

ただし  $\alpha_{ng}, \beta_{ng}; \alpha'_{ng}, \beta'_{ng}$  は実数の常数である。(2.8.23)式及び(2.8.24)式を(2.8.22')式に代入して、



$$\left. \begin{aligned} \varphi_g(z) &= -\frac{\omega_g d m_g}{4(m_g-1)} Kz - \frac{i\omega_g K^2(1-m^2)}{2(\pi_g+1)} \log z + \varphi_g^0(z) \\ \psi_g(z) &= -\frac{\omega_g d}{2} \frac{m_g-2}{m_g-1} Kz - \frac{i\pi_g \omega_g K^2(1-m^2)}{2(\pi_g+1)} \log z + \psi_g^0(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.8.26)$$

(2.8.26)式を(2.8.15')式に代入して(2.8.16')式を利用する。円周上においての  $u_g, v_g$  をそれぞれ  $u_{gr}, v_{gr}$  とすれば、

$$\begin{aligned} u_{gr} + i v_{gr} &= -\frac{\omega_g d m_g}{8\mu_g(m_g-1)} K\pi_g \sigma + \frac{\pi_g}{2\mu_g} \varphi_g^0(\sigma) - \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2} \times \\ &\quad \left[ -\frac{\omega_g d m_g}{8\mu_g(m_g-1)} K + \frac{i\omega_g K^2}{4\mu_g(\pi_g+1)} (1-m^2)\sigma + \frac{1}{2\mu_g} \bar{\varphi}_g'(\bar{\sigma}) \right] \\ &\quad + \frac{\omega_g d}{4\mu_g} \frac{m_g-2}{m_g-1} K \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{2\mu_g} \bar{\varphi}_g^0(\bar{\sigma}) - \frac{i\omega_g K^2}{8\mu_g} (\pi_g-1) \left( \sigma^2 + 2m + \frac{m^2}{\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (2.8.27)$$

(2.8.27)式の共軛な形を作ると、

$$\begin{aligned} u_{gr} - i v_{gr} &= -\frac{\omega_g d m_g}{8\mu_g(m_g-1)} K\pi_g \frac{1}{\sigma} + \frac{\pi_g}{2\mu_g} \bar{\varphi}_g^0(\bar{\sigma}) - \sigma \frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m} \times \\ &\quad \left[ -\frac{\omega_g d m_g}{8\mu_g(m_g-1)} K - \frac{i\omega_g K^2}{4\mu_g(\pi_g+1)} (1-m^2) \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2\mu_g} \varphi_g'(\sigma) \right] \\ &\quad + \frac{\omega_g d}{4\mu_g} \frac{m_g-2}{m_g-1} K \sigma - \frac{1}{2\mu_g} \varphi_g^0(\sigma) + \frac{i\omega_g K^2}{8\mu_g} (\pi_g-1) \left( \frac{1}{\sigma^2} + 2m + m^2 \sigma^2 \right) \end{aligned} \quad (2.8.28)$$

また(2.8.26)式を(2.8.13')式に代入して(2.8.14')式を利用する。円周上における  $\tau_{xg}, \tau_{yg}$  を  $\tau_{xgr}, \tau_{ygr}$  とすれば、

$$\begin{aligned} i \int (\tau_{xgr} + i \tau_{ygr}) d\sigma &= -\frac{\omega_g d m_g}{4(m_g-1)} K\sigma + \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2} \left[ -\frac{\omega_g d m_g}{4(m_g-1)} K \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\omega_g K^2}{2(\pi_g+1)} (1-m^2)\sigma + \bar{\varphi}_g'(\bar{\sigma}) \right] - \frac{\omega_g d}{2} \frac{m_g-2}{m_g-1} K \frac{1}{\sigma} + \bar{\varphi}_g^0(\bar{\sigma}) - \frac{1}{4} i\omega_g K^2 (1-m) \times \\ &\quad \left[ \sigma^2 - \frac{m}{\sigma^2} \right] \end{aligned} \quad (2.8.29)$$

(2.8.29)式の共軛な形を作ると、

$$\begin{aligned} -i \int (\tau_{xgr} - i \tau_{ygr}) d\sigma &= -\frac{\omega_g d m_g}{4(m_g-1)} K \frac{1}{\sigma} + \bar{\varphi}_g^0(\bar{\sigma}) + \sigma \frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m} \times \\ &\quad \left[ -\frac{\omega_g d m_g}{4(m_g-1)} K - \frac{i\omega_g K^2}{2(\pi_g+1)} (1-m^2) \frac{1}{\sigma} + \varphi_g'(\sigma) \right] - \frac{\omega_g d}{2} \frac{m_g-2}{m_g-1} K \sigma \\ &\quad + \varphi_g^0(\sigma) + \frac{i\omega_g K^2(1-m)}{4} \left[ \frac{1}{\sigma^2} - m\sigma^2 \right] \end{aligned} \quad (2.8.30)$$

#### 第4節 境界条件

巻立部及び地山部のそれぞれの応力及び変位に構内孔附近の境の条件を入れて、解析函数に含まれる常数を決定する。巻立部と地山部との接界面において相互のすれがなないとして境界条件は次のようになる。

##### (1) 円周上における第2種境界値問題

巻立部における単位円周上の変位  $u_c, v_c$  をそれぞれ  $u_{cn}, v_{cn}$  とすれば  $u_{cn} = u_{gn}, v_{cn} = v_{gn}$  となるから (2.8.15) 式及び (2.8.16) 式より、

$$\left. \begin{aligned} \pi_c \varphi_c(\sigma) - \frac{w(\sigma)}{\bar{w}'(\sigma)} \bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}) - \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) &= 2\mu_c (u_{gn} + i v_{gn}) \\ \pi_c \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) - \frac{\bar{w}(\bar{\sigma})}{w'(\sigma)} \varphi_c'(\sigma) - \varphi_c(\sigma) &= 2\mu_c (u_{gn} - i v_{gn}) \end{aligned} \right\} \quad (2.8.31)$$

この式の共軛形をとって

##### (2) 円周上における第1種境界値問題

巻立部における単位円周上の応力  $\tau_{xc}, \tau_{yc}$  をそれぞれ  $\tau_{xcn}, \tau_{ycn}$  とすれば、 $\tau_{xcn} = \tau_{xgn}, \tau_{ycn} = \tau_{ygn}$  であるから (2.8.13) 式及び (2.8.14) 式より

$$\left. \begin{aligned} \varphi_c(\sigma) + \frac{w(\sigma)}{\bar{w}'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}) + \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) &= i \int (\tau_{xgn} + i \tau_{ygn}) d\sigma \\ \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) + \frac{\bar{w}(\bar{\sigma})}{w'(\sigma)} \varphi_c'(\sigma) + \varphi_c(\sigma) &= -i \int (\tau_{xgn} - i \tau_{ygn}) d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (2.8.32)$$

この式の共軛形をとって

##### (3) 円周上における第1種境界値問題

(2.8.13') 式及び (2.8.14') 式において  $x$  方向、 $y$  方向の応力はそれぞれ零となる。

$$\tau_{xc0} = 0, \quad \tau_{yc0} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_c(\sigma_0) + \frac{w(\sigma_0)}{\bar{w}'(\bar{\sigma}_0)} \bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}_0) + \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}_0) &= 0 \\ \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}_0) + \frac{\bar{w}(\bar{\sigma}_0)}{w'(\sigma_0)} \varphi_c'(\sigma_0) + \varphi_c(\sigma_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8.33)$$

この式の共軛形をとって、

以上の境界条件の外に  $\theta$  軸に関して  $\tau_{\rho\rho c}, \tau_{\theta\theta c}$  が対称的に分布しているから次の式が成立する。

$$(\tau_{\rho\rho c} + \tau_{\theta\theta c})_{\theta=\theta_0} = (\tau_{\rho\rho c} + \tau_{\theta\theta c})_{\theta=\pi-\theta_0} \quad (2.8.34)$$

(2.8.31) 式の第1式に (2.8.27) 式を代入して、

$$\begin{aligned} \pi_c \varphi_c(\sigma) - \frac{w(\sigma)}{\bar{w}'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}) - \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) &= -\frac{\mu_c W_g d m_g}{4 \mu_g (m_g - 1)} K \pi_g \sigma \\ + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g} \varphi_g^0(\sigma) - \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2 + m}{1 - m \sigma^2} \left\{ -\frac{\mu_c W_g d m_g}{4 \mu_g (m_g - 1)} K + \frac{i \mu_c W_g K^2}{2 \mu_g (\pi_g + 1)} \right\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1-m^2)\sigma + \frac{\mu_c}{\mu_g} \bar{\varphi}_g^{\circ}(\bar{\sigma}) \Big] + \frac{\mu_c \omega_g d}{2\mu_g} \frac{m_g-2}{m_g-1} \frac{K}{\sigma} - \frac{\mu_c}{\mu_g} \bar{\varphi}_g^{\circ}(\bar{\sigma}) \\ & - \frac{i\mu_c \omega_g K^2}{4\mu_g} (\kappa_g-1) \left( \sigma^2 + 2m + \frac{m^2}{\sigma^2} \right) \dots \dots \dots (2.8.35) \end{aligned}$$

(2.8.31) 式の第2式K(2.8.28)式を代入して

$$\begin{aligned} & \kappa_c \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) - \frac{\bar{w}(\bar{\sigma})}{w'(\sigma)} \varphi_c'(\sigma) - \varphi_c(\sigma) = - \frac{\mu_c \omega_g d m_g}{4\mu_g (m_g-1)} K \kappa_g \frac{1}{\sigma} \\ & + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g} \bar{\varphi}_g^{\circ}(\bar{\sigma}) - \sigma \frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m} \left[ - \frac{\mu_c \omega_g d m_g}{4\mu_g (m_g-1)} K - \frac{i\mu_c \omega_g K^2}{2\mu_g (\kappa_g+1)} (1-m^2) \frac{1}{\sigma} \right. \\ & \left. + \frac{\mu_c}{\mu_g} \varphi_g^{\circ}(\sigma) \right] + \frac{\mu_c \omega_g d}{2\mu_g} \frac{m_g-2}{m_g-1} K \sigma - \frac{\mu_c}{\mu_g} \varphi_g^{\circ}(\sigma) + \frac{i\mu_c \omega_g K^2}{4\mu_g} \times \\ & (\kappa_g-1) \left( \frac{1}{\sigma^2} + 2m + m^2 \sigma^2 \right) \dots \dots \dots (2.8.36) \end{aligned}$$

(2.8.32) 式の第1式K(2.8.29)式を代入して、

$$\begin{aligned} & \varphi_c(\sigma) + \frac{w(\sigma)}{w'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}) + \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) = - \frac{\omega_g d m_g}{4(m_g-1)} K \sigma + \varphi_g^{\circ}(\sigma) \\ & + \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2} \left[ - \frac{\omega_g d m_g}{4(m_g-1)} K + \frac{i\omega_g K^2}{2(\kappa_g+1)} (1-m^2) \sigma + \bar{\varphi}_g^{\circ}(\bar{\sigma}) \right] \\ & - \frac{\omega_g d}{2} \frac{m_g-2}{m_g-1} K \frac{1}{\sigma} + \bar{\varphi}_g^{\circ}(\bar{\sigma}) - \frac{1}{2} i\omega_g K^2 (1-m) \left[ \frac{\sigma^2}{2} - \frac{m}{2\sigma^2} \right] \\ & \dots \dots \dots (2.8.37) \end{aligned}$$

(2.8.32) 式の第2式K(2.8.30)式を代入して

$$\begin{aligned} & \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) + \frac{\bar{w}(\bar{\sigma})}{w'(\sigma)} \varphi_c'(\sigma) + \varphi_c(\sigma) = - \frac{\omega_g d m_g}{4(m_g-1)} K \frac{1}{\sigma} + \bar{\varphi}_g^{\circ}(\bar{\sigma}) \\ & + \sigma \frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m} \left[ - \frac{\omega_g d m_g}{4(m_g-1)} K - \frac{i\omega_g K^2}{2(\kappa_g+1)} (1-m^2) \frac{1}{\sigma} \right. \\ & \left. + \varphi_g^{\circ}(\sigma) \right] - \frac{\omega_g d (m_g-2)}{2(m_g-1)} K \sigma + \varphi_g^{\circ}(\sigma) + \frac{1}{2} i\omega_g K^2 (1-m) \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^2} - \right. \\ & \left. - \frac{m}{2} \sigma^2 \right] \dots \dots \dots (2.8.38) \end{aligned}$$

(2.8.35) + (2.8.37) より

$$\begin{aligned} & (\kappa_c+1) \varphi_c(\sigma) = - \frac{\omega_g d m_g}{4(m_g-1)} K \left( 1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g} \right) \sigma + \left( 1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g} \right) \varphi_g^{\circ}(\sigma) \\ & + \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2} \left[ - \frac{\omega_g d m_g}{4(m_g-1)} K + \frac{i\omega_g K^2}{2(\kappa_g+1)} (1-m^2) \sigma + \bar{\varphi}_g^{\circ}(\bar{\sigma}) \right] \times \\ & \left( 1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) - \frac{\omega_g d}{2} \frac{m_g-2}{m_g-1} K \left( 1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \frac{1}{\sigma} + \left( 1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \bar{\varphi}_g^{\circ}(\bar{\sigma}) \\ & - \frac{i\mu_c \omega_g K^2}{4\mu_g} (\kappa_g-1) \left( \sigma^2 + 2m + \frac{m^2}{\sigma^2} \right) - \frac{1}{2} i\omega_g K^2 (1-m) \left[ \frac{\sigma^2}{2} - \frac{m}{2\sigma^2} \right] \\ & \dots \dots \dots (2.8.39) \end{aligned}$$

(2.8.36) + (2.8.38) より,

$$\begin{aligned}
 (\pi_c + 1) \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) = & -\frac{W_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_g} \pi_g\right) \frac{1}{\sigma} + \left(1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g}\right) \bar{\varphi}_g^0(\bar{\sigma}) \\
 & + \sigma \frac{1 + m\sigma^2}{\sigma^2 - m} \left\{ -\frac{W_g d m_g}{4(m_g - 1)} K - \frac{i W_g K^2}{2(\pi_g + 1)} (1 - m^2) \frac{1}{\sigma} + \varphi_g^0(\sigma) \right\} \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \\
 & - \frac{W_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \sigma + \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \varphi_g^0(\sigma) + \frac{i \mu_c W_g K^2}{4 \mu_g} (\pi_g - 1) \times \\
 & \left( \frac{1}{\sigma^2} + 2m + m^2 \sigma^2 \right) + \frac{1}{2} i W_g K^2 (1 - m) \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^2} - \frac{m}{2} \sigma^2 \right) \dots \dots (2.8.40)
 \end{aligned}$$

第5節 解析函数の中の未定の常数を決定すること.

(1) (2.7.34) 式の適用

(2.7.10) 式より

$$(\tau_{ppc} + \tau_{ooc})_{\theta=\theta_0} = 2 \{ \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta}) + \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta}) \}_{\theta=\theta_0}$$

$$\begin{aligned}
 (\tau_{ppc} + \tau_{ooc})_{\theta=\pi-\theta_0} &= 2 \{ \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta}) + \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta}) \}_{\theta=\pi-\theta_0} \\
 &= 2 \{ \bar{\Phi}_c(-\bar{\zeta}) + \bar{\Phi}_c(-\bar{\zeta}) \}_{\theta=\theta_0}
 \end{aligned}$$

$\bar{\zeta} = \frac{\rho^2}{\zeta}$ ,  $\bar{\zeta}_{\theta=\pi-\theta_0} = -\bar{\zeta}_{\theta=\theta_0}$ ,  $\bar{\zeta}_{\theta=\pi-\theta_0} = -\bar{\zeta}_{\theta=\theta_0}$  なることに注目して次式が得られる.

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta})_{\theta=\theta_0} = & \left[ \frac{1}{K(1-\frac{m}{\zeta^2})} \left\{ A \frac{1}{\bar{\zeta}} - \frac{\alpha_{1c} + i\beta_{1c}}{\bar{\zeta}^2} - 2 \frac{\alpha_{2c} + i\beta_{2c}}{\bar{\zeta}^3} \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\alpha_{1c_2} + i\beta_{1c_2}) + 2(\alpha_{2c_2} + i\beta_{2c_2}) \bar{\zeta}^2 + \dots \dots \right\} \right]_{\theta=\theta_0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta})_{\theta=\theta_0} = & \left[ \frac{1}{K(1-\frac{m}{\bar{\zeta}^2})} \left\{ A \frac{1}{\bar{\zeta}} - \frac{\alpha_{1c} - i\beta_{1c}}{\bar{\zeta}^2} - 2 \frac{\alpha_{2c} - i\beta_{2c}}{\bar{\zeta}^3} \right. \right. \\
 & - \dots \dots + (\alpha_{1c_2} - i\beta_{1c_2}) + 2(\alpha_{2c_2} - i\beta_{2c_2}) \bar{\zeta} + 3(\alpha_{3c_2} - i\beta_{3c_2}) \bar{\zeta}^2 \\
 & \left. \left. + \dots \dots \right\} \right]_{\theta=\theta_0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta})_{\theta=\pi-\theta_0} = & \left[ \frac{1}{K(1-\frac{m}{\bar{\zeta}^2})} \left\{ -\frac{A}{\bar{\zeta}} - \frac{\alpha_{1c} + i\beta_{1c}}{\bar{\zeta}^2} + 2 \frac{\alpha_{2c} + i\beta_{2c}}{\bar{\zeta}^3} \right. \right. \\
 & - \dots \dots + (\alpha_{1c_2} + i\beta_{1c_2}) - 2(\alpha_{2c_2} + i\beta_{2c_2}) \bar{\zeta} + 3(\alpha_{3c_2} + i\beta_{3c_2}) \bar{\zeta}^2 \\
 & \left. \left. - \dots \dots \right\} \right]_{\theta=\theta_0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta})_{\theta=\pi-\theta_0} = & \left[ \frac{1}{K(1-\frac{m}{\bar{\zeta}^2})} \left\{ -\frac{A}{\bar{\zeta}} - \frac{\alpha_{1c} - i\beta_{1c}}{\bar{\zeta}^2} + 2 \frac{\alpha_{2c} - i\beta_{2c}}{\bar{\zeta}^3} \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\alpha_{1c_2} - i\beta_{1c_2}) - 2(\alpha_{2c_2} - i\beta_{2c_2}) \bar{\zeta} + 3(\alpha_{3c_2} - i\beta_{3c_2}) \bar{\zeta}^2 - \dots \dots \right\} \right]_{\theta=\theta_0}
 \end{aligned}$$

(2.8.34)式より

$$\{\bar{\psi}_c(z) + \bar{\psi}_c(\bar{z})\}_{\theta=\theta_0} = \{\bar{\psi}_c(z) + \bar{\psi}_c(\bar{z})\}_{\theta=\pi-\theta_0}.$$

係数間の比較により,

$$\left. \begin{aligned} A=0, \beta_{10}=0, \alpha_{20}=0, \beta_{30}=0, \alpha_{40}=0, \dots \dots \dots \\ \beta_{10_2}=0, \alpha_{20_2}=0, \beta_{30_2}=0, \alpha_{40_2}=0, \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (2.8.41)$$

ゆえに(2.8.22)式より,

$$\left. \begin{aligned} \psi_c'(z) &= \frac{\alpha_{10_1}}{z} + \frac{i\beta_{20_1}}{z^2} + \frac{\alpha_{30_1}}{z^3} + \frac{i\beta_{40_1}}{z^4} + \dots \dots \dots \\ \psi_{c_2}(z) &= \alpha_{10_2}z + i\beta_{20_2}z^2 + \alpha_{30_2}z^3 + i\beta_{40_2}z^4 + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (2.8.42)$$

(2.8.35)式または(2.8.36)式の係数間の比較をなして, これらの式の右辺には  $\log z$  を含む項がないから(2.8.22)式の  $\psi_c(z)$  の解析関数において  $B=0$  とする.

次に(2.8.27)式を参照して(2.8.35')式より,

$$\begin{aligned} u_g + i v_g &= -\frac{w_g d m_g}{8\mu_g(m_g-1)} K \pi_g z + \frac{\pi_g}{2\mu_g} \psi_g'(z) - \frac{1}{z} \frac{z^2+m}{1-mz^2} \times \\ &\quad \left[ -\frac{w_g d m_g}{8\mu_g(m_g-1)} K + \frac{i w_g K^2}{4\mu_g(\pi_g+1)} (1-m^2) z + \frac{1}{2\mu_g} \bar{\psi}_g'(\bar{z}) \right] \\ &\quad + \frac{w_g d}{4\mu_g} \frac{m_g-2}{m_g-1} K \frac{1}{z} - \frac{1}{2\mu_g} \bar{\psi}_g'(z) - \frac{i w_g K^2}{8\mu_g} (\pi_g-1) (z^2+2m+\frac{m^2}{z^2}) \end{aligned}$$

この式の共軛な形をとって

$$\begin{aligned} u_g - i v_g &= -\frac{w_g d m_g}{8\mu_g(m_g-1)} K \pi_g \frac{p^2}{z} + \frac{\pi_g}{2\mu_g} \bar{\psi}_g'(z) - \left(\frac{z}{p^2}\right) \frac{p^4+mz^2}{z^2-mp^4} \times \\ &\quad \left[ -\frac{w_g d m_g}{8\mu_g(m_g-1)} K - \frac{i w_g K^2}{4\mu_g(\pi_g+1)} (1-m^2) \frac{p^2}{z} + \frac{1}{2\mu_g} \psi_g'(z) \right] \\ &\quad + \frac{w_g d}{4\mu_g} \frac{m_g-2}{m_g-1} K \frac{z}{p^2} - \frac{1}{2\mu_g} \psi_g'(z) + \frac{i w_g K^2}{8\mu_g} (\pi_g-1) \times \\ &\quad \left( \frac{p^4}{z^2} + 2m + \frac{m^2 z^2}{p^4} \right) \end{aligned}$$

$|z|=\infty$  K おいて  $u_g=0, v_g=0$  となるべきであるから上式より

$$\psi_g'(z) = \frac{\alpha_{1g} + i\beta_{1g}}{z} + \frac{\alpha_{2g} + i\beta_{2g}}{z^2} \dots \dots \dots (2.8.43)$$

となる. この  $\psi_g'(z)$  を  $u_g + i v_g$  の式 K 代入して,  $|z|=\infty$  K おいて  $u_g=0, v_g=0$  となることより次式が得られる.

$$\psi_g'(z) = \alpha_{1g}' + i\beta_{1g}' + \frac{\alpha_{2g} + i\beta_{2g}}{z} + \frac{\alpha_{2g}' + i\beta_{2g}'}{z^2} \dots \dots \dots (2.8.44)$$

(2) (2.8.39)式の右辺に  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma=3} \frac{d\zeta}{\zeta-z}$  を乗じて単位円  $\Gamma$  の周りに沿い積分する. すなわち Cauchy の積分を行う. この方法は Muskhelishvili<sup>26)</sup> の方法による.  $z$  を  $\Gamma$  の外側の点として,

$$\begin{aligned}
(\pi_c + 1) \left\{ -\frac{\alpha_{1c}}{3} - \frac{i\beta_{2c}}{3^2} - \frac{\alpha_{3c}}{3^3} - \frac{i\beta_{4c}}{3^4} - \dots \right\} &= -\left(1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g}\right) \times \\
&\times \left\{ \frac{\alpha_{1g} + i\beta_{1g}}{3} + \frac{\alpha_{2g} + i\beta_{2g}}{3^2} \right\} + \left\{ \frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) m + \frac{w_g d}{2} \times \right. \\
&\times \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \left. \right\} \frac{1}{3} + i \left\{ \frac{\mu_c w_g K^2 (\pi_g - 1) m^2}{4\mu_g} - \frac{1}{2} w_g K^2 (1 - m) \times \right. \\
&\times \left. \frac{m}{2} \right\} \frac{1}{3^2}
\end{aligned}$$

両辺の係数同士の比較を実部、虚部に分けて行えば、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \text{ の実部の係数; } -(\pi_c + 1) \alpha_{1c} &= -\left(1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g}\right) \alpha_{1g} + \left\{ \frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \times \right. \\
&\times \left. \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) m + \frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \right\} \dots \dots (i)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} \text{ の虚部の係数; } \beta_{1g} = 0$$

$$\frac{1}{3^2} \text{ の実部の係数; } \alpha_{2g} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3^2} \text{ の虚部の係数; } -(\pi_c + 1) \beta_{2c} &= -\left(1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g}\right) \beta_{2g} + \left\{ \frac{\mu_c w_g K^2}{4\mu_g} (\pi_g - 1) m^2 \right. \\
&\times \left. - \frac{1}{2} w_g K^2 (1 - m) \frac{m}{2} \right\} \dots \dots (ii)
\end{aligned}$$

$$\alpha_{3c} = 0, \beta_{4c} = 0, \alpha_{5c} = 0, \beta_{6c} = 0, \dots \dots$$

(2.8.45)

(3) (2.8.39) 式の両辺に  $K \frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - 3}$  を乗じて単位円内の周りに沿って積分する。3を  
 円の内部の点として、

$$\begin{aligned}
(\pi_c + 1) &\left[ \alpha_{1c} 3 + i\beta_{2c} 3^2 + \alpha_{3c} 3^3 + i\beta_{4c} 3^4 + \dots \right] \\
&= -\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g}\right) 3 - \frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \left\{ \frac{1}{3} \frac{3^2 + m}{1 - m 3^2} - \frac{m}{3} \right\} \\
&+ \frac{i w_g K^2}{2(\pi_g + 1)} (1 - m^2) \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \frac{3^2 + m}{1 - m 3^2} + \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \frac{1}{3} \frac{3^2 + m}{1 - m 3^2} \bar{\varphi}_g' \left(\frac{1}{3}\right) \\
&+ \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \bar{\varphi}_g' \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{i \mu_c w_g K^2}{4\mu_g} (\pi_g - 1) (3^2 + 2m) - \frac{1}{4} i w_g K^2 (1 - m) 3^2 \\
&\dots \dots (2.8.46)
\end{aligned}$$

上式を通分して係数同士の比較をする。このとき (2.8.43) 式, (2.8.44) 式及び (2.8.45) 式とより、

$$\begin{aligned}
\varphi_g^o(3) &= \frac{\alpha_{1g}}{3} + i \frac{\beta_{2g}}{3^2} \\
\varphi_g^o(3) &= \alpha_{1g} + i\beta_{1g} + \frac{\alpha_{1g} + i\beta_{1g}}{3} + \frac{\alpha_{2g} + i\beta_{2g}}{3^2} \dots \dots (2.8.47)
\end{aligned}$$

なることを考慮して

$$\varphi_{c_2}^{\circ}(z) = \alpha_{1c_2} z + i\beta_{2c_2} z^2$$

となり, また (2.8.45) 式より

$$\varphi_{c_1}^{\circ}(z) = \frac{\alpha_{1c_1}}{z} + \frac{i\beta_{2c_1}}{z^2}$$

となる.

(4). (2.8.22) 式の第1式より:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\alpha_{1c_1}}{\sigma_0} + \frac{i\beta_{2c_1}}{\sigma_0^2} \right) + (\alpha_{1c_2}\sigma_0 + i\beta_{2c_2}\sigma_0^2) + \frac{1}{\sigma_0} \frac{\sigma_0^2 + m}{1 - \frac{m}{\rho_0^2}\sigma_0^2} \times \\ & \left\{ \left( -\frac{\alpha_{1c_1}\sigma_0^2}{\rho_0^2} + \frac{2i\beta_{2c_1}\sigma_0^2}{\rho_0^2} \right) + (\alpha_{1c_2} - 2i\beta_{2c_2}\frac{\rho_0^2}{\sigma_0^2}) \right\} + \{ (\alpha'_{1c_1} - i\beta'_{1c_1}) \\ & + (\alpha'_{1c_1} - i\beta'_{1c_1}) \frac{\sigma_0}{\rho_0^2} + (\alpha'_{2c_1} - i\beta'_{2c_1}) \frac{\sigma_0^2}{\rho_0^2} + \dots \} + \{ (\alpha'_{1c_2} - i\beta'_{1c_2}) \frac{\rho_0^2}{\sigma_0} \\ & + (\alpha'_{2c_2} - i\beta'_{2c_2}) \frac{\rho_0^4}{\sigma_0^2} + \dots \} = 0 \end{aligned}$$

上式の両辺に  $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma_0}{\sigma_0 - z}$  を乗じて円周の周りに積分する.  $z$  を  $\Gamma$  の外部の点として

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\alpha_{1c_1}}{z} - \frac{i\beta_{2c_1}}{z^2} \right) - \alpha_{1c_2} \frac{m}{z} + 2i\beta_{2c_2} \rho_0^2 \frac{m}{z^2} + \left\{ -(\alpha'_{1c_2} - i\beta'_{1c_2}) \frac{\rho_0^2}{z} \right. \\ & \left. - (\alpha'_{2c_2} - i\beta'_{2c_2}) \frac{\rho_0^4}{z^2} - \dots \right\} = 0 \end{aligned}$$

上式において実部と虚部とにわけて係数同士の比較をして,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{z} \text{ の実部の係数; } \alpha_{1c_1} + \alpha_{1c_2} m + \alpha'_{1c_2} \rho_0^2 = 0 \dots\dots\dots (i) \\ & \frac{1}{z} \text{ の虚部の係数; } \beta'_{1c_2} = 0 \\ & \frac{1}{z^2} \text{ の実部の係数; } \alpha'_{2c_2} = 0 \\ & \frac{1}{z^2} \text{ の虚部の係数; } -\beta_{2c_1} + 2\beta_{2c_2} \rho_0^2 m + \beta'_{2c_2} \rho_0^4 = 0 \dots\dots\dots (ii) \\ & \alpha'_{1c_2} = \alpha'_{4c_2} = \alpha'_{5c_2} = \dots\dots\dots = 0 \\ & \beta'_{1c_2} = \beta'_{4c_2} = \beta'_{5c_2} = \dots\dots\dots = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.8.49)$$

ゆえに次式がえられる.

$$\varphi_{c_2}^{\circ}(z) = \alpha'_{1c_2} z + i\beta'_{2c_2} z^2 \dots\dots\dots (2.8.50)$$

(2.8.47) 式及び  $\varphi_c(z) = \varphi_{c_1}^{\circ}(z) + \varphi_{c_2}^{\circ}(z)$  及び  $\varphi_c(z) = \varphi_{c_1}^{\circ}(z) + \varphi_{c_2}^{\circ}(z)$  を (2.8.25) 式に代入して係数同士の比較をすれば,

$$\varphi_c^{\circ}(z) = \alpha'_{0c} + i\beta'_{0c} + \frac{\alpha'_{1c} + i\beta'_{1c}}{z} + \frac{\alpha'_{2c} + i\beta'_{2c}}{z^2} \dots\dots\dots (2.8.51)$$

となる。

(5). (2.8.52) 式の第2式より

$$\begin{aligned} & (\alpha'_{1c} \frac{\sigma_0}{\rho_0^2} - i\beta_{2c} \frac{\sigma_0^2}{\rho_0^4} + \alpha'_{1c} \frac{\rho_0^2}{\sigma_0} - i\beta_{2c} \frac{\rho_0^4}{\sigma_0^2}) + \sigma_0 \frac{\rho_0^2 + \frac{m}{\rho_0^2} \sigma_0^2}{\sigma_0^2 - m} (-\frac{\alpha'_{1c}}{\sigma_0^2} \\ & - \frac{2i\beta_{2c}}{\sigma_0^2} + \alpha'_{1c_2} + 2i\beta_{2c_2} \sigma_0) + (\alpha'_{0c} + i\beta'_{0c} + \frac{\alpha'_{1c} + i\beta'_{1c}}{\sigma_0} \\ & + \frac{\alpha'_{2c} + i\beta'_{2c}}{\sigma_0^2}) + (\alpha'_{1c_2} \sigma_0 + i\beta'_{2c_2} \sigma_0^2) = 0 \end{aligned}$$

上式の両辺に  $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma_0}{\sigma_0 - \zeta}$  を乗じて  $\Gamma$  の周りに沿って積分する。  $\zeta$  は  $\Gamma$  の外部の点として、

$$\begin{aligned} & -\alpha'_{1c_2} \rho_0^2 \zeta + \alpha'_{1c_2} \rho_0^2 m \frac{1}{\zeta} + i\beta_{2c_2} \rho_0^4 - i\beta_{2c_2} \frac{m \rho_0^4}{\zeta^2} + \rho_0^2 \alpha'_{1c} \frac{1}{\zeta} \\ & + \frac{m}{\rho_0^2} \alpha'_{1c} \zeta + 2i\beta_{2c} \rho_0^2 \frac{1}{\zeta^2} + 2i\beta_{2c} \frac{m}{\rho_0^2} - (\rho_0^2 + \frac{m^2}{\rho_0^2}) \alpha'_{1c_2} \zeta \\ & - i(\rho_0^2 + \frac{m^2}{\rho_0^2}) \cdot 2m\beta_{2c_2} - (\alpha'_{1c} + i\beta'_{1c}) \zeta - (\alpha'_{2c} + i\beta'_{2c}) \\ & + m(\alpha'_{1c} + i\beta'_{1c}) \frac{1}{\zeta} + m(\alpha'_{2c} + i\beta'_{2c}) \frac{1}{\zeta^2} = 0 \end{aligned}$$

上式において実部と虚部とにわけて係数同士の比較をして、

$$\zeta \text{ の実部の係数 ; } -(2\rho_0^2 + \frac{m^2}{\rho_0^2}) \alpha'_{1c_2} + \frac{m}{\rho_0^2} \alpha'_{1c} - \alpha'_{1c} = 0 \quad (i)$$

$$\zeta \text{ の虚部の係数 ; } \beta'_{1c} = 0 \quad (ii)$$

$$\text{絶対項の実部の係数 ; } \alpha'_{2c} = 0 \quad (iii)$$

$$\text{絶対項の虚部の係数 ; } \left\{ \rho_0^4 - 2(\rho_0^2 + \frac{m^2}{\rho_0^2}) m \right\} \beta_{2c_2} + 2\frac{m}{\rho_0^2} \beta_{2c} - \beta'_{2c} = 0 \quad (iv)$$

$$\frac{1}{\zeta} \text{ の実部の係数 ; } \rho_0^2 m \alpha'_{1c_2} + \rho_0^2 \alpha'_{1c} + m \alpha'_{1c} = 0 \quad (v)$$

$$\frac{1}{\zeta} \text{ の虚部の係数 ; } \beta'_{1c} = 0$$

$$\frac{1}{\zeta^2} \text{ の実部の係数 ; } \alpha'_{2c} = 0$$

$$\frac{1}{\zeta^2} \text{ の虚部の係数 ; } -m\rho_0^4 \beta_{2c_2} + 2\rho_0^2 \beta_{2c} + m\beta'_{2c} = 0 \quad (vi)$$

$$(i) \times m + (v) \text{ より } \alpha'_{1c} = m \alpha'_{1c_2} \quad (vii)$$

$$(iv) \times m + (vi) \text{ より } \beta_{2c} = m^2 \beta_{2c_2} \quad (viii)$$

(2.8.52)



ゆえに,

$$y_c^0(z) = (\alpha'_{0c} + i\beta'_{0c}) + \frac{\alpha'_{1c}}{z} + \frac{i\beta'_{2c}}{z^2} \quad (2.8.52)$$

となる。

(6) 上に求めた解析関数を(2.8.46)式に代入して,

$$\begin{aligned} & (\pi_c + 1) \alpha'_{1c} z - m(\pi_c + 1) \alpha'_{1c} z^3 + (\pi_c + 1) i \beta'_{2c} z^2 - m(\pi_c + 1) i \beta'_{2c} z^4 \\ &= -\frac{\omega_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g}\right) z + \frac{\omega_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g}\right) m z^3 \\ &- \frac{\omega_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) (1 + m^2) z + \frac{i \omega_g K^2}{2(\pi_g + 1)} (1 - m^2) \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) z^2 \\ &+ \frac{i \omega_g K^2}{2(\pi_g + 1)} (1 - m^2) \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) m + \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) (-\alpha'_{1g} z^3 - \alpha'_{1g} m z \\ &+ 2 i \beta'_{2g} z^4 + 2 i \beta'_{2g} m z^2) + \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \{(\alpha'_{0g} - i \beta'_{0g}) + (\alpha'_{1g} - i \beta'_{1g}) z \\ &+ \{(\alpha'_{2g} - i \beta'_{2g}) - m(\alpha'_{0g} - i \beta'_{0g})\} z^2 - m(\alpha'_{1g} - i \beta'_{1g}) z^3 \\ &- m(\alpha'_{2g} - i \beta'_{2g}) z^4\} - \frac{i \mu_c \omega_g K^2}{4 \mu_g} (\pi_g - 1) \{(1 - 2m^2) z^2 - m z^4 + 2m\} \\ &- \frac{i \omega_g K^2}{4} (1 - m) z^2 + \frac{i \omega_g K^2}{4} (1 - m) m z^4 \end{aligned}$$

上式において実部と虚部とに分けて係数同士の比較をなして次式がえられる。

$$z^4 \text{ の実部の係数; } \alpha'_{2g} = 0 \quad (i)$$

$$\begin{aligned} z^4 \text{ の虚部の係数; } & -m(\pi_c + 1) \beta'_{2c} = 2 \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \beta'_{2g} + m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \beta'_{2g} \\ & + \frac{\mu_c \omega_g K^2}{4 \mu_g} (\pi_g - 1) m + \frac{\omega_g K^2 (1 - m) m}{4} \quad (ii) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 \text{ の実部の係数; } & -m(\pi_c + 1) \alpha'_{1c} = \frac{\omega_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g}\right) m \\ & - \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \alpha'_{1g} - m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \alpha'_{1g} \quad (iii) \end{aligned}$$

$$z^3 \text{ の虚部の係数; } \beta'_{1g} = 0$$

$$z^2 \text{ の実部の係数; } \alpha'_{2g} = m \alpha'_{0g}$$

$$\begin{aligned} z^2 \text{ の虚部の係数; } & (\pi_c + 1) \beta'_{2c} = \frac{\omega_g K^2}{2(\pi_g + 1)} (1 - m^2) \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \\ & + 2m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \beta'_{2g} - \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \beta'_{2g} + m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \beta'_{1g} \\ & - \frac{\mu_c \omega_g K^2}{4 \mu_g} (\pi_g - 1) (1 - 2m^2) - \frac{\omega_g K^2}{4} (1 - m) \quad (iv) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3 の実部の係数;} & (\pi_c + 1) \alpha_{1c2} = - \frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left( 1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g} \right) \\ & - \frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left( 1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) (1 + m^2) - m \left( 1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \alpha_{1g} \\ & + \left( 1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \alpha'_{1g} \quad \dots \dots \dots (VII) \end{aligned}$$

$$\text{3 の虚部の係数;} \quad \beta'_{1g} = 0 \quad \dots \dots \dots (VIII)$$

$$(VII) + (VIII) \times m \text{ より} \quad \alpha_{1g} = - \frac{m w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \quad \dots \dots \dots (IX)$$

$$\text{絶対項の実部の係数;} \quad \alpha'_{0g} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{絶対項の虚部の係数;} \quad \beta'_{0g} = & \frac{\frac{w_g K^2}{2(\pi_g + 1)} (1 - m^2) m \left( 1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) - \frac{\mu_c w_g K^2}{2\mu_g} (\pi_g - 1) m}{1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}} \\ & \dots \dots \dots (X) \end{aligned}$$

$$- (III) \times m + (VII) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} (\pi_c + 1) \alpha_{1c2} = & - \frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left( 1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g} \right) - \frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \times \\ & \left( 1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) + \left( 1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \alpha'_{1g} \quad \dots \dots \dots (XI) \end{aligned}$$

(2, 8, 54)

(7) (2, 7, 45) 式の (i) 式より

$$\alpha_{1c1} = \frac{\left( 1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g} \right) \alpha_{1g} - \left\{ \frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left( 1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) m + \frac{w_g d (\pi_g - 2)}{2(m_g - 1)} K \left( 1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \right\}}{(\pi_c + 1)}$$

(2, 8, 55)

ただし  $\alpha_{1g}$  は (2, 8, 54) 式の (IX) 式を用いる。(2, 8, 52) 式の (VII) 式より

$$\alpha_{1c2} = \frac{\alpha_{1c1}}{m} \quad \dots \dots \dots (2, 8, 56)$$

(2, 8, 52) 式の (i) 式より

$$\alpha'_{1c1} = - \frac{2\rho_0^2}{m} \alpha_{1c1} \quad \dots \dots \dots (2, 8, 57)$$

(2, 8, 49) 式の (i) 式より

$$\alpha'_{1c2} = - \frac{2\alpha_{1c1}}{\rho_0^2} \quad \dots \dots \dots (2, 8, 58)$$

ただし (2, 8, 56) 式より (2, 8, 58) 式までの  $\alpha_{1c1}$  は (2, 8, 55) 式を用いる。  
(2, 8, 54) 式の (VII) より,

$$\alpha'_{1g} = \frac{\frac{\omega_g d m_g}{4(\pi_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g}\right) m - \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \alpha_{1g} + (\pi_c + 1) \alpha_{1c}}{m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right)} \quad (2. \text{p. } 59)$$

ただし  $\alpha_{1g}$  は (2. p. 54) 式の (ix) 式を用い,  $\alpha_{1c}$  は (2. p. 55) 式を用いる. (2. p. 54) 式において (vi) + (vi')  $\times m$  より.

$$\beta_{2g} = - \left[ \frac{\frac{\omega_g K^2}{2(\pi_g + 1)} (1 - m^2) m + m^2 \beta'_{0g}}{2(1 + m^2)} + \frac{\frac{\mu_c \omega_g K^2}{4\mu_g} (\pi_g - 1) m^2}{\left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right)(1 + m^2)} \right] \quad (2. \text{p. } 60)$$

ただし  $\beta'_{0g}$  としては (2. p. 54) 式の (x) 式を用いる. (2. p. 45) 式の (vi) 式より.

$$\beta_{2c} = \frac{\left(1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g}\right) \beta_{2g} - \left\{ \frac{\mu_c \omega_g K^2}{4\mu_g} (\pi_g - 1) m^2 - \frac{1}{4} \omega_g K^2 (1 - m) m \right\}}{\pi_c + 1} \quad (2. \text{p. } 61)$$

ただし  $\beta_{2g}$  は (2. p. 60) 式を用いる. (2. p. 52) 式の (vii) 式より

$$\beta_{2c2} = \frac{\beta_{2c1}}{m^2} \quad (2. \text{p. } 62)$$

(2. p. 49) 式の (iii) 式より

$$\beta'_{2c2} = \frac{1}{\rho_0^2} (\beta_{2c1} - 2\rho_0^2 m \beta_{2c2}) \quad (2. \text{p. } 63)$$

ただし (2. p. 62) 式及び (2. p. 63) 式の  $\beta_{2c1}$  は (2. p. 61) 式を用い, (2. p. 63) 式の  $\beta_{2c2}$  は (2. p. 62) 式を用いる. (2. p. 52) 式の (vii) 式より.

$$\beta'_{2c1} = \rho_0^2 (\rho_0^2 - 2m) \beta_{2c2} \quad (2. \text{p. } 64)$$

ただし  $\beta_{2c2}$  は (2. p. 62) 式を用いる. (2. p. 54) 式の (vi) 式より

$$\beta'_{2g} = - \frac{1}{m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right)} \left\{ m(\pi_c + 1) \beta_{2c2} + 2 \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \beta_{2g} + \frac{\mu_c \omega_g K^2}{4\mu_g} (\pi_g + 1) m + \frac{\omega_g K^2}{4} (1 - m) m \right\} \quad (2. \text{p. } 65)$$

ただし  $\beta_{2c2}$  は (2. p. 62) 式を用い,  $\beta_{2g}$  は (2. p. 60) 式を用いる.

(d) 所要の解析函数の形

(2. p. 47) 式の第1式, (2. p. 48) 式, (2. p. 53) 式, (2. p. 50) 式及び (2. p. 54) 式より.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_g^{\circ}(z) &= \frac{\alpha_{1g}}{z} + \frac{i\beta_{2g}}{z^2}, & \psi_g^{\circ}(z) &= i\beta'_{0g} + \frac{\alpha'_{1g}}{z} + \frac{i\beta'_{2g}}{z^2}, \\ \varphi_c(z) &= \varphi_c^{\circ}(z) + \varphi_{c2}^{\circ}(z); & \varphi_{c2}^{\circ}(z) &= \frac{\alpha_{1c}}{z} + \frac{i\beta_{2c}}{z^2} \\ \text{及び } \varphi_{c2}^{\circ}(z) &= \alpha_{1c2} z + i\beta_{2c2} z^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\psi_c(z) = \psi_c^*(z) + \psi_c^o(z); \quad \psi_c^o(z) = \alpha'_{0c} + i\beta'_{0c} + \frac{\alpha'_{1c}}{z} + \frac{i\beta'_{2c}}{z^2}$$

$$\text{又} \quad \psi_c^o(z) = \alpha'_{1c}z + i\beta'_{2c}z^2$$

(2.8.66)

ただし  $\beta'_{0c}$ ,  $\alpha'_{0c}$ ,  $\beta'_{0c}$  は応力分布に contribute しないから省いてもよい。  
 (2.8.66) 式と (2.8.26) 式とが所求の解析函数の形である。(2.8.66) 式及び  
 (2.8.26) 式を (2.8.10) 式, (2.8.11) 式及び (2.8.10') 式, (2.8.11') 式  
 に代入すれば応力を求めることができる。

## 第6節 巻立円形トンネルの場合の解析函数中の常数の決定

いま谷本勉之助氏の方法と比較するために、巻立円形トンネルの応力分布を Muskhelishvili の方法により解いてみる。円形トンネルの場合では (2.8.17) 式の写像函数に  
 おいて  $m=0$  とする。

(2.8.33) 式の第1式より Cauchy の積分を  $\Gamma$  円に沿って行い  $z$  を  $\Gamma$  の外の点とし  
 て

$$-\frac{\alpha'_{1c}}{z} - \frac{i\beta'_{2c}}{z^2} + \left\{ -(\alpha'_{1c} - i\beta'_{1c}) \frac{p_0^2}{z} - (\alpha'_{2c} - i\beta'_{2c}) \frac{p_0^4}{z^2} - \dots \right\} = 0$$

上式において実部と虚部とにわけて係数間の比較をなして、

$$\frac{1}{z} \text{ の実部の係数; } \alpha'_{1c} = -\frac{\alpha'_{1c}}{p_0^2} \quad (i)$$

$$\frac{1}{z} \text{ の虚部の係数; } \beta'_{1c} = 0 \quad (ii)$$

(2.8.67)

$$\frac{1}{z^2} \text{ の実部の係数; } \alpha'_{2c} = 0 \quad (iii)$$

$$\frac{1}{z^2} \text{ の虚部の係数; } \beta'_{2c} = \frac{\beta'_{2c}}{p_0^4} \quad (iv)$$

(2.8.33) 式の第2式に Cauchy の積分を  $\Gamma$  円に沿って行い  $z$  を  $\Gamma$  の外の点とすると

$$\left( -\alpha'_{1c} \frac{p_0^2}{z} + i\beta'_{2c} \frac{p_0^4}{z^2} \right) + p_0^2 \alpha'_{1c} \frac{1}{z} + 2i p_0^2 \beta'_{2c} \frac{1}{z^2} - p_0^2 \alpha'_{1c} \frac{1}{z} \\ - \frac{\alpha'_{1c} + i\beta'_{1c}}{z} - \frac{\alpha'_{2c} + i\beta'_{2c}}{z^2} = 0$$

上式において実部と虚部とにわけて係数間の比較をなして、

$$\frac{1}{z} \text{ の実部の係数; } \alpha'_{1c} = -\frac{\alpha'_{1c}}{2p_0^2} \quad (i)$$

$$\frac{1}{z} \text{ の虚部の係数; } \beta'_{1c} = 0 \quad (ii)$$

$$\frac{1}{z^2} \text{ の実部の係数; } \alpha'_{2c} = 0 \quad (iii)$$

$$\frac{1}{z^2} \text{ の虚部の係数; } \beta'_{2c} = p_0^4 \beta'_{2c} \quad (iv)$$

(2.8.68)

$$\frac{1}{z^0} \text{ の実部の係数; } \alpha'_{1c} = 0 \quad (V)$$

$$(2. \text{p. } 67) \text{ 式の (i) 式より } \alpha'_{1c} = 0 \quad (Vi)$$

$$\frac{1}{z^4} \text{ の虚部の係数; } \beta_{2c} = 0 \quad (VII)$$

$$(2. \text{p. } 67) \text{ 式の (iv) 式より } \beta'_{2c} = 0 \quad (VII)$$

となる。(2. p. 46) 式より.

$$\begin{aligned} (\pi_c + 1) (\alpha_{1c} z + i \beta_{2c} z^2) &= -\frac{w_g d m_g}{4(\pi_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g}\right) z - \frac{w_g d m_g}{4(\pi_g - 1)} K \times \\ &\left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) z + \frac{i w_g K^2}{2(\pi_g + 1)} \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) z^2 + \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) (-\alpha_{1g} z^3 + 2i \beta_{2g} z^4) \\ &+ \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \{(\alpha'_{0g} - i \beta'_{0g}) + (\alpha'_{1g} - i \beta'_{1g}) z + (\alpha'_{2g} - i \beta'_{2g}) z^2\} - \frac{i \mu_c w_g K^2}{4 \mu_g} \times \\ &(\pi_g - 1) z^2 - \frac{1}{4} i w_g K^2 z^2 \end{aligned}$$

上式において実部と虚部とにわけて係数同士の比較をなして

$$z^4 \text{ の虚部の係数; } \beta_{2g} = 0 \quad (i)$$

$$z^3 \text{ の実部の係数; } \alpha_{1g} = 0 \quad (ii)$$

$$z^2 \text{ の実部の係数; } \alpha'_{2g} = 0 \quad (iii)$$

$z^2$  の虚部の係数;

$$\begin{aligned} (\pi_c + 1) \beta_{2c} &= \frac{w_g K^2}{2(\pi_g + 1)} \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) - \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \beta'_{2g} \\ &- \frac{\mu_c w_g K^2}{4 \mu_g} (\pi_g - 1) - \frac{w_g K^2}{4} \quad (iv) \end{aligned}$$

$z$  の実部の係数;

$$\begin{aligned} (\pi_c + 1) \alpha_{1c} &= -\frac{w_g d m_g}{4(\pi_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \pi_g}{\mu_g}\right) - \frac{w_g d m_g}{4(\pi_g - 1)} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \\ &+ \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \alpha'_{1g} \quad (v) \end{aligned}$$

$$z \text{ の虚部の係数; } \beta'_{1g} = 0 \quad (vi)$$

$$\text{絶対項の実部の係数; } \alpha'_{0g} = 0 \quad (vii)$$

$$\text{絶対項の虚部の係数; } \beta'_{0g} = 0 \quad (viii)$$

(2. p. 69)

(2. p. 57) 式より  $\rho'_c(z) = 0$ ,  $z = K\sigma$ ,  $w' = K$ ,  $\bar{w}' = K$  なることを考慮して,

$$\begin{aligned}
& (\alpha_{1c_2}\sigma + i\beta_{2c_2}\sigma^2) + \sigma(\alpha_{1c_2} - 2i\beta_{2c_2}\frac{1}{\sigma}) + \{(\alpha'_{0c}, -i\beta'_{0c},) \\
& + \alpha'_{1c}\sigma - i\beta'_{2c}\sigma^2\} = -\frac{W_g d m_g}{4(m_g-1)} K \sigma + \sigma \left\{ -\frac{W_g d m_g}{4(m_g-1)} K + \frac{iW_g K^2}{2(\pi_g+1)} \sigma \right\} \\
& - \frac{W_g d}{2} \frac{m_g-1}{m_g-1} K \frac{1}{\sigma} + (-i\beta'_{0g} + \alpha'_{1g}\sigma - i\beta'_{2g}\sigma^2) - \frac{1}{4} iW_g K^2 \sigma^2 \\
& \dots \dots \dots (2.8.70)
\end{aligned}$$

(2.8.70) 式を \$\sigma\$ 内の周りに沿い Cauchy の積分をなす。 \$\sigma\$ を \$\sigma\$ の内部の点として、

$$\begin{aligned}
& \alpha_{1c_2}z + i\beta_{2c_2}z^2 + \alpha'_{1c}z - 2i\beta'_{2c}z + \alpha'_{0c}, -i\beta'_{0c}, + \alpha'_{1c}z - i\beta'_{2c}z^2 \\
& = -\frac{W_g d m_g}{4(m_g-1)} K z - \frac{W_g d m_g}{4(m_g-1)} K z + \frac{iW_g K^2}{2(\pi_g+1)} z^2 - i\beta'_{0g} + \alpha'_{1g}z - i\beta'_{2g}z^2 \\
& - \frac{1}{4} iW_g K^2 z^2
\end{aligned}$$

上式において実部と虚部とにわけて係数同士の比較をなして、

$$z^2 \text{ の虚部の係数; } \beta_{2c_2} - \beta'_{2c}, = \frac{W_g K^2}{2(\pi_g+1)} - \beta'_{2g} - \frac{W_g K^2}{4} \dots \dots \dots (i)$$

上式の \$\beta'\_{2g}\$ を (2.8.69) 式の (iv) 式に代入して、

$$(\pi_c + \frac{\mu_c}{\mu_g}) \beta_{2c_2} = -\frac{W_g K}{4} \frac{\mu_c}{\mu_g} \pi_g - (1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}) \beta'_{2c}, \dots \dots \dots (vi)$$

$$z \text{ の実部の係数; } 2\alpha_{1c_2} + \alpha'_{1c}, = -\frac{W_g d m_g}{2(m_g-1)} K + \alpha'_{1g} \dots \dots \dots (vii)$$

上式の \$\alpha'\_{1g}\$ を (2.8.69) 式の (v) 式に代入して

$$\begin{aligned}
\left\{ (\pi_c + 1) - 2\left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \right\} \alpha_{1c_2} &= -\frac{W_g d m_g}{4(m_g-1)} K \frac{\mu_c}{\mu_g} (1 + \pi_g) + \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \alpha'_{1c}, \\
& \dots \dots \dots (viii)
\end{aligned}$$

$$\text{絶対項の実部の係数; } \alpha'_{0c}, = 0 \dots \dots \dots (ix)$$

$$\text{絶対項の虚部の係数; } -2\beta_{2c_2} - \beta'_{0c}, = -\beta'_{0g} \dots \dots \dots (x)$$

(2.8.71)

(2.8.68) 式の (i) 式の \$\alpha'\_{1c}\$ を (2.8.71) 式の (ix) 式に代入して

$$\begin{aligned}
\alpha_{1c_2} &= \frac{-\frac{W_g d m_g}{4(m_g-1)} K \frac{\mu_c}{\mu_g} (1 + \pi_g)}{\left\{ (\pi_c + 1) - 2\left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \right\} + 2\rho_0^2 \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right)} \dots \dots \dots (2.8.72)
\end{aligned}$$

(2.8.68) 式の (i) 式より

$$\alpha'_{1c}, = -2\rho_0^2 \alpha_{1c_2} \dots \dots \dots (2.8.73)$$

ただし \$\alpha\_{1c\_2}\$ は (2.8.72) 式を用いる。(2.8.71) 式の (x) 式に (2.8.68) 式の (vi) 式を代入して、

$$\beta_{2c_2} = \frac{-\frac{w_g K^2}{4} \frac{\mu_c}{\mu_g} \pi_g}{(\pi_c + \frac{\mu_c}{\mu_g}) + (1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}) \rho_0^4} \quad (2.8.74)$$

(2.8.74) 式を (2.8.68) 式の (v) 式に代入して

$$\beta_{2c_1} = \frac{-\frac{w_g K^2}{4} \frac{\mu_c}{\mu_g} \pi_g \rho_0^4}{(\pi_c + \frac{\mu_c}{\mu_g}) + (1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}) \rho_0^4} \quad (2.8.75)$$

よつて巻立部の解析函数  $\varphi_c(z)$  は次のようになる。

$$\varphi_c(z) = \alpha_{1c_2} z + 2\beta_{2c_2} z^2 \quad (2.8.76)$$

### 第7節 計算例

今まで円形トンネルについて考察したが、巻立円形トンネルの場合を取扱ふこととする。計算に必要な数値としては次に述べるものを用いるものとする。

コンクリート巻立部の Lamé 係数  $\lambda_c = 5 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\mu_c = 10 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$

地山を土としてその Lamé 係数  $\lambda_g = \infty$ ,  $\mu_g = 20 \text{ kg/cm}^2$

地山の単位容積当り重量  $w_g = 0.0016 \text{ kg/cm}^3$

地表面よりトンネル中心までの深さ  $d = 20 \text{ m}$ ,  $K = 5.4 \text{ m}$ ,

巻立の内面の円径の半径を  $5 \text{ m}$  とする。

すなわち  $K\rho_0 = 5 \text{ m}$  であつて,  $\rho_0 = 0.925$ , 巻立厚さは  $40 \text{ cm}$  となる。

地山のポアソン係数  $m_g$  は

$$m_g = \frac{2(\lambda_g + \mu_g)}{\lambda_g} = 2$$

となり、地山の土に作用する圧力は水圧状態となつてゐることを示す。また

$$\pi_c = \frac{\lambda_c + \mu_c}{\lambda_c + \mu_c} = 2.0, \quad \pi_g = \frac{\lambda_g + \mu_g}{\lambda_g + \mu_g} = 1,$$

となる。写像函数は  $z = w(\zeta) = K\zeta$  であつて

$$\Phi_c(\zeta) = \frac{\alpha_{1c_2} + 2i\beta_{2c_2} \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}{K}$$

巻立内の点の応力は

$$\tau_{rrc} + \tau_{\theta\theta c} = 4\text{Re}\{\Phi_c(\zeta)\} = 4\left\{\frac{\alpha_{1c_2} - 2\beta_{2c_2} \rho \sin\theta}{K}\right\} \quad (2.8.77)$$

ただし  $\text{Re}$  は実部をとることを示す。巻立内面上では  $\rho = \rho_0$ ,  $(\tau_{rrc})_r = 0$  であるから、巻立内面上における接線方向直応力  $(\tau_{\theta\theta c})_r$  は次式となる。

$$(\tau_{\theta\theta c})_r = 4\left\{\frac{\alpha_{1c_2} - 2\beta_{2c_2} \rho_0 \sin\theta}{K}\right\} \quad (2.8.78)$$

$$4 \frac{\alpha_{102}}{K} = 4 \left\{ \frac{-\frac{W_2 d m_g}{4(m_g-1)} \frac{\mu_c}{\mu_g} (1 + \pi_g)}{(\pi_c + 1) - 2\left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) + 2\rho_0^2 \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right)} \right\}$$

$$= 4 \left\{ \frac{-\frac{0.0016 \times 20000}{4(2-1)} \times \frac{100000}{20} \times (1+1)}{(2.33+1) - 2\left(1 - \frac{100000}{20}\right) + 2 \times (0.925)^2 \left(1 - \frac{100000}{20}\right)} \right\}$$

$$= -42.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$8\rho_0 \frac{\beta_{2c2}}{K} = 8\rho_0 \left\{ \frac{-\frac{W_2 K}{4} \frac{\mu_c}{\mu_g} \pi_g}{(\pi_c + \frac{\mu_c}{\mu_g}) + (1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}) \rho_0^4} \right\}$$

$$= 8 \times 0.925 \left\{ \frac{-\frac{0.0016 \times 540}{4} \times \frac{100000}{20} \times 1}{\left(1 + \frac{100000}{20}\right) + \left(1 - \frac{100000}{20}\right) \times (0.925)^4} \right\}$$

$$= -5.96 \text{ kg/cm}^2$$

この数値を(2.8.28)式に代入して

$$(\tau_{\theta\theta c})_T = -42.50 + 5.96 \sin \theta \quad (\text{kg/cm}^2)$$

上式Kよって $(\tau_{\theta\theta c})_T$ を計算したものが表-2.29である。この表に谷本勉之助氏<sup>21)</sup>の理論式によつて求めたものをおかかて比較することとする。これを第2.58図の右半分に表示し、この図において実線のは著者の理論によるものであり、点線のは谷本勉之助氏の理論によるものである。

表-2.29 本計算例において巻立厚40 cm のときの $(\tau_{\theta\theta c})_T$ の値

単位: kg/cm<sup>2</sup>

$\theta$	著者の理論による $(\tau_{\theta\theta c})_T$	谷本勉之助氏の理論による $(\tau_{\theta\theta c})_T$
90°	-36.54	-38.80
60°	-37.34	-38.58
30°	-39.52	-41.78
0°	-42.50	-44.77
-30°	-45.48	-47.76
-60°	-47.66	-49.94
-90°	-48.45	-50.74

応力の値の負号は圧縮応力を示す。



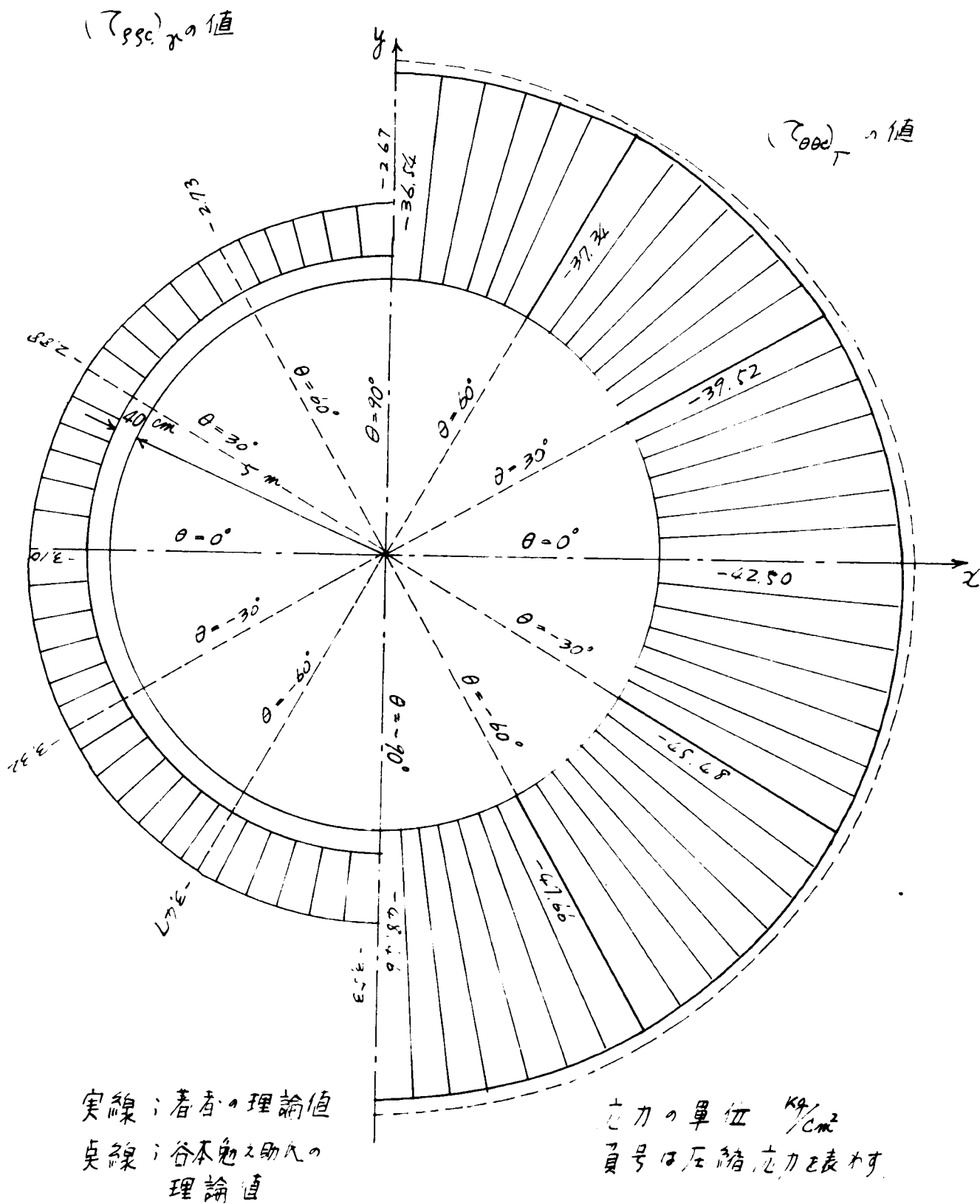


図 5.8

つきにコンクリート巻立厚さを変化した場合の  $(\tau_{\theta\theta c})_r$  の応力の値を計算したものを表-2.30 に示す。

表-2.30 コンクリート巻立厚さの変化に伴う  $(\tau_{\theta\theta c})_r$  の変化

単位  $\text{kg/cm}^2$

巻立厚さ (cm)	K (cm)	$P_0$	$(\tau_{\theta\theta c})_r$	$\{(\tau_{\theta\theta c})_r\}_{\theta=-90^\circ}$	$\{(\tau_{\theta\theta c})_r\}_{\theta=0^\circ}$	$\{(\tau_{\theta\theta c})_r\}_{\theta=90^\circ}$
30	530	0.945	$-60.2 + 7.96 \sin \theta$	-60.2	-60.2	-52.2
40	540	0.925	$-42.5 + 5.96 \sin \theta$	-42.5	-42.5	-36.5
50	550	0.910	$-37.1 + 5.09 \sin \theta$	-42.2	-37.1	-32.0
60	560	0.894	$-32.3 + 4.48 \sin \theta$	-36.8	-32.3	-27.8
70	570	0.878	$-28.1 + 3.96 \sin \theta$	-32.1	-28.1	-24.1
80	580	0.863	$-25.1 + 2.76 \sin \theta$	-27.9	-25.1	-22.3

負号は圧縮応力を示す。

巻立厚さと  $\{(\tau_{\theta\theta c})_r\}_{\theta=-90^\circ}$ ,  $\{(\tau_{\theta\theta c})_r\}_{\theta=0^\circ}$ ,  $\{(\tau_{\theta\theta c})_r\}_{\theta=90^\circ}$  との関係を図示したものが 第2.59 図である。

ただし、

$\{(\tau_{\theta\theta c})_r\}_{\theta=-90^\circ}$  ; トンネルのインバートアーチ中央点の応力,

$\{(\tau_{\theta\theta c})_r\}_{\theta=0^\circ}$  ; トンネルの側壁中央の点の応力,

$\{(\tau_{\theta\theta c})_r\}_{\theta=90^\circ}$  ; トンネルのアーチ中央点の応力, を表わす。

つきにコンクリート巻立外表面に作用する半径方向の圧力  $(\tau_{ppc})_r = (\tau_{ppc})_n$  を求めるには次の計算による。(2.8.77) 式において円周上では  $\rho=1$  となるから、

$$(\tau_{ppc} + \tau_{\theta\theta c})_n = 4 \left[ \frac{\alpha'_{1c} - 2\beta'_{2c} \sin \theta}{K} \right] \quad (2.8.79)$$

$\psi'(\zeta) \varphi'_c(\zeta) = \psi'_c(\zeta) = -\frac{\alpha'_{1c}}{\zeta^2} - i \frac{2\beta'_{2c}}{\zeta^3}$  を用いて, (2.8.11) 式において  $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$  として

$$(\tau_{\theta\theta c} - \tau_{ppc} + 2i\tau_{p\theta c})_n = \frac{2}{K} \left[ 2i\beta'_{2c} (\cos \theta + i \sin \theta) - \alpha'_{1c} - 2i\beta'_{2c} (\cos \theta - i \sin \theta) \right] \quad (2.8.80)$$

となる。

(2.8.80) 式において両辺の実部をとりだして

$$(\tau_{\theta\theta c} - \tau_{ppc})_n = \frac{2}{K} \left[ -2\beta'_{2c} \sin \theta - \alpha'_{1c} - 2\beta'_{2c} \sin \theta \right] \quad (2.8.81)$$

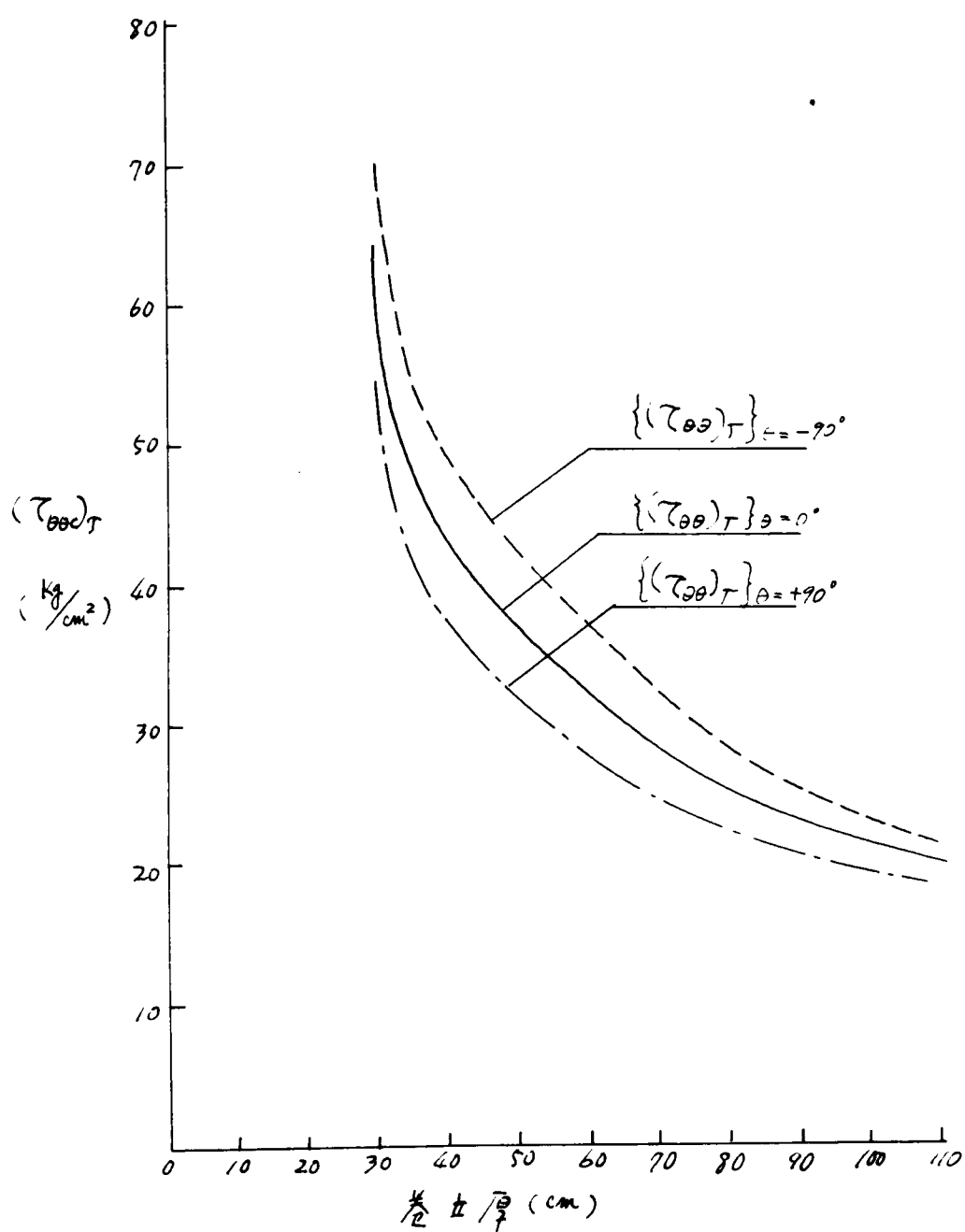


图 2,59

$$\{(2.8.79) - (2.8.81)\} \times \frac{1}{2} \text{より}$$

$$(\tau_{ppc})_r = \frac{2\alpha_{1c2} + \alpha'_{1c} + 2(\beta'_{2c1} - \beta_{2c2}) \sin \theta}{K} \dots\dots\dots (2.8.82)$$

$$\{(2.8.79) + (2.8.81)\} \times \frac{1}{2} \text{より}$$

$$(\tau_{\theta\theta c})_r = \frac{2\alpha_{1c2} - \alpha'_{1c} - 2(\beta_{2c2} + \beta'_{2c1}) \sin \theta}{K} \dots\dots\dots (2.8.83)$$

となる。

本計算例において巻立厚さ  $40\text{mm}$   $K=5.4\text{m}$  の場合  $\frac{\alpha_{1c2}}{K} = -10.6\text{kg/cm}^2$ ,  
 $\frac{\beta_{2c2}}{K} = -0.806\text{kg/cm}^2$ , となつてゐるから,

$$\frac{\alpha'_{1c}}{K} = -\frac{2\rho_0^2 \alpha_{1c2}}{K} = -2 \times (0.925)^2 \times (-10.6) = 18.13\text{kg/cm}^2$$

$$\frac{\beta'_{2c1}}{K} = \rho_0^4 \frac{\beta_{2c2}}{K} = (0.925)^4 \times (-0.806) = -0.590\text{kg/cm}^2$$

となり, これを(2.8.82)式に代入して,

$$(\tau_{ppc})_r = -3.10 + 0.432 \sin \theta$$

となる。この式によつて巻立円形トンネルの巻立外表面に作用する半径方向の圧力

$(\tau_{ppc})_r = (\tau_{ppg})_r$  の値を表-2.31に示す。参考のため谷本勉之助氏<sup>21)</sup>の理論式によつた値をこの表に附記して比較をする。

表-2.31 巻立厚  $40\text{mm}$  の場合の  $(\tau_{ppc})_r$  の値

単位  $\text{kg/cm}^2$

$\theta$	著者の理論による $(\tau_{ppc})_r$	谷本勉之助氏の理論による $(\tau_{ppc})_r$
$90^\circ$	- 2.67	- 2.672
$60^\circ$	- 2.73	- 2.742
$30^\circ$	- 2.88	- 2.932
0	- 3.10	- 3.192
$-30^\circ$	- 3.32	- 3.452
$-60^\circ$	- 3.47	- 3.642
$-90^\circ$	- 3.53	- 3.712

負は圧縮を示す。

また  $(\tau_{ppc})_r$  の分布の様子を第2.58図の上半分に示す。この図において負号は圧縮応力であることを示す。

## 第8節 結 語

今までに述べた理論は円形巻立トンネル周辺の応力を求めるのに、コンクリート巻立の自重は無視しているから近似解法であるが、表一、二、三及び表一、二、三に示されているようにコンクリート巻立の自重を考慮した谷本勉之助氏の厳密解法と比較すれば、前者の理論による応力はわずかに約5%位かなる値がえられている。実用的には十分利用価値があり、谷本勉之助氏の厳密解は *Airy* の応力函数の形をきめ、その係数を求めるのに複雑な行列式を解く困難があるが、前者の理論によつて求められた解析函数の係数の数値計算は極めて簡単に迅速に求められる故に、現場において地質に応じて地山の *Lamé* 係数が判定されれば、迅速に巻立厚を決定できる利点がある。また前者の理論は *Muschelishvili* の方法によつて解析函数を求める故に、トンネルの形としては写像函数を

$$Z = w(\zeta) = \rho \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} + \frac{n}{\zeta^3} \right)$$

とすることにより *ovaloid* の形の巻立トンネルの場合にも適用できることとなる。

前節の計算例では軟弱な地山のトンネル周辺応力分布を取扱っており、地山のポアッソン係数としては2の値をとっており、このときは自然地山中の土の微小体に作用する圧力は鉛直方向及び水平方向のものも等しく土冠り圧となっている。このとき円形巻立トンネルの形を採用すれば、巻立内面上に作用する接線方向直応力は全部圧縮応力となり、このような地山圧力をうけるトンネルの形としては有利な形である。この場合巻立厚さを40mmとすれば、 $(\sigma_{\theta\theta})_r$  の値はインバートアーチの中央点で最大圧縮応力となり、その値は  $48.46 \text{ kg/cm}^2$  で大略コンクリートの許容応力となっている故に巻立コンクリートの巻立厚さは40mmで十分となる。

$(\sigma_{\theta\theta})_r$  の値は、インバートアーチの中央より側壁を経てアーチ頂点に至るに従つて減少するような応力分布状態となる。また巻立の外面上に作用する半径方向の直応力はインバートアーチ中央で最大値  $55.5 \text{ kg/cm}^2$  となり、側壁を経てアーチ頂点に至るに従い減少し、アーチ頂点において最小値  $2.67 \text{ kg/cm}^2$  となっている。この最大値と最小値までの平均値は  $29.5 \text{ kg/cm}^2$  であつて、この値は地表面よりトンネル中心までの深さの地点の鉛直圧力  $0.0016 \times 2000 = 3.2 \text{ kg/cm}^2$  と若んど等しくなっている。

つきに前節の計算例によつてトンネルの巻立厚さを変化させたときの影響について考察すれば、巻立厚さ40mmのとき  $\{(\sigma_{\theta\theta})_r\}_{\theta=-90^\circ} = -48.5 \text{ kg/cm}^2$  となっているが、巻立厚さを2倍にして80mmとした場合は  $\{(\sigma_{\theta\theta})_r\}_{\theta=-90^\circ} = -27.9 \text{ kg/cm}^2$  となつていて圧縮応力は巻立厚40mmの場合の1/2より少し大なる値となっている。

第2、3、4図に示されるように巻立厚が50mm以下になると  $(\sigma_{\theta\theta})_r$  の値は急激に増大する。また巻立厚を増大したと逆比例して  $(\sigma_{\theta\theta})_r$  が減少するのではなく、巻立圧が大となればなる程  $(\sigma_{\theta\theta})_r$  の減少率は少くなる。また谷本勉之助氏の研究でも判るよう  $\sigma_{\theta\theta}$  の値はトンネル巻立内面上で最大で、外面上に拘うに従つて減少する故に、 $(\sigma_{\theta\theta})_r$  の値が巻立材料のコンクリートの許容応力より少くなるように設計してゆけばよいこととなる。

以上は地山とコンクリートのような剛性のある巻立とが結合して共同作用をして地山圧力をうけるとき生ずる状態に付属した土圧及びトンネル周辺応力を求めたのであるが、実際のトンネルに作用する土圧は先行方法及びその他支保工の可塑性が関連してくるので、これに関しては第4編に述べることにする。

# 第3編 軟弱な地山中のトンネルの模型実験

## 第1章 簡単な粘弾性体とみなされる地山中の素形円形トンネルの変形

### 挙動に関する模型実験<sup>78)</sup>

#### 第1節 実験装置及び実験方法

簡単な粘弾性体としての地山中の素形円形トンネルの変形挙動の理論は第2編第2章について述べたが、この変形挙動を実験的に研究して理論を検証するため、つぎのような模型実験をなした。60×70×10 cmの内容積をもつ木箱を作り、変形挙動を写真撮影するために前面の60×70 cmを硬質ガラス(板厚10 mm)をあてた。後面の木板は濾紙をとりつけられるようねじ止めとする。土をつめるには木箱を横にし、つぎに述べる土の含水比34.8%にして三層に分けてつめる。

軟ねりモルタル試験供試体作成用夾棒を用いて一ヶ所5回突きかためる。なお60×70 cmの両側面には圧密時の排水をよくするため濾紙をあてた。土をつめてガラス板をあて写真—3/に示すような鋼材の枠を周囲にあて、前後よりボルト締めとして鉛直に立てる。圧密荷重及びその後のトンネル地山荷重のかけ方は写真—3/に示すようにlevel比1/3の下懸吊式である。

使用した土は第1編第1章の実験に使用したものと同一のもので徳島市大工町土で、その物理的性質は真比重2.69、L.L. 61.8%、P.L. 40.8%、P.I. 21.0%であつて、粒度分析の結果粘土分9.5%、シルト分60%、砂分20.5%のsilty loamであり、その粒徑加積曲線は第4図に示す。

つめた土をさらに均質に締めかためると同時に粘弾性体の性質をもつように圧密させる。圧密荷重の29/1 kg/cm<sup>2</sup>を載荷したときdial gage(1/100 mm読み)で測定した圧密沈下時間曲線は第3/1図に示す。これによれば一次圧密の特徴であるS字型反曲線があらわれ、第3/1図のA点とC点の両接線の交点Eが一次圧密の完了点で載荷後1750分(29.2時間)にたつている。それ以後二次圧密に移行し、載荷後2650分(44.2時間)にたつて除荷した。圧密試験中排水は60×70 cmの両側面の濾紙を通り、周囲の木部の継目より多量流出し十分排水できるようにしており、土の圧密される厚さは10 cmとなつていたこととなる。後のトンネル模型実験のときは排水がほとんどなかったことより十分一次圧密を完了し、クリープ状態になつてゐると思われる。

圧密試験完了後濾紙を除去し、60×70 cmの前面の土の表面に2 cm間隔で縦横に直線を引き、中央に半径8 cmのトンネル円孔を掘削する。なお圧密して作った地山材料のヒズミ制御式及び荷重制御式三軸圧縮試験、クリープ試験用試料(直径3.5 cm、高さ9 cm)をとるため、地山表面にあたる面より10 cmの幅と厚さの土を乱さないよう切り取つて成型した。この地山材料の土の単位容積重量 $\gamma = 0.019 \text{ kg/cm}^3$ である。このトンネル模型を鉛直に立て地山表面に0.19/1 kg/cm<sup>2</sup>の等分布荷重を載荷し、載荷と同時に変形を始め経過時間ごとに写真撮影をし、これをスライドで拡大して各時刻ごとのトンネル円孔縁の変形量を測定した。なお地山の等分布荷重により地山表面の変形が自然状態と同じになるように第3.2図のような4片の載荷板を利用する載荷装置を設置した。クリープ試験は第1編第1章に述べた方法により測定して粘弾性の諸係数を求めた。



写真～3.1

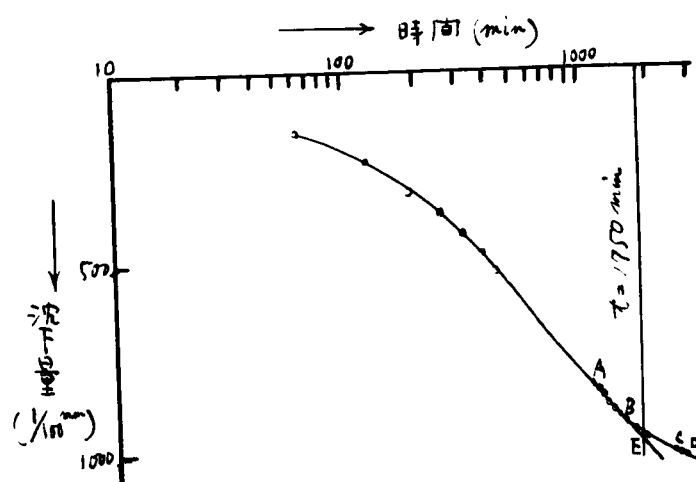


図3.1

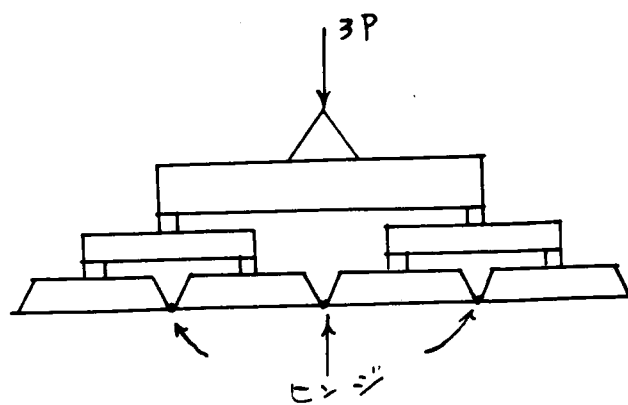


図3.2

## 第2節 実験結果及びその考察

実験に使用した地山材料の土の粘弾性の諸係数及びその他の値は第1編第3章第3節に述べたものであつて、ポアッサン比  $\nu = 0.5$ 、ポアッサン数  $\mu = 2$ 、せん断弾性係数  $G = 2.688 \text{ kg/cm}^2$ 、従つて弾性係数  $E = 2(1 + \nu)G = 8.064 \text{ kg/cm}^2$  となる。粘性係数  $\eta_s = 37.93 \text{ kg sec/cm}^2$ 、土の単位容積重量  $W = 0.0019 \text{ kg/cm}^3$  である。トンネル模型実験の地山地表面の過載荷重は  $0.191 \text{ kg/cm}^2$  で、トンネル中心が地表面よりの深さは  $20.0 \text{ cm}$  であるから、換算土がぶり厚さ  $H = 128.7 \text{ cm}$  となる。トンネル円孔の半径は  $r = R = 8 \text{ cm}$  であるから、第1編第2章で述べた簡単な粘弾性体とみなされる地山中の素直円形トンネルの変形量の理論式(2.2.19)式及び(2.2.18)式にこれらの数値を代入して、トンネルの半径方向の変形量はトンネル周縁において

$$u_r = (-0.364 - 0.0237 \sin \theta) \{ 1 - \exp(-0.071t) \} \quad (\text{単位 cm})$$

となり、この式によつて求めた計算値を表3.1に示す。

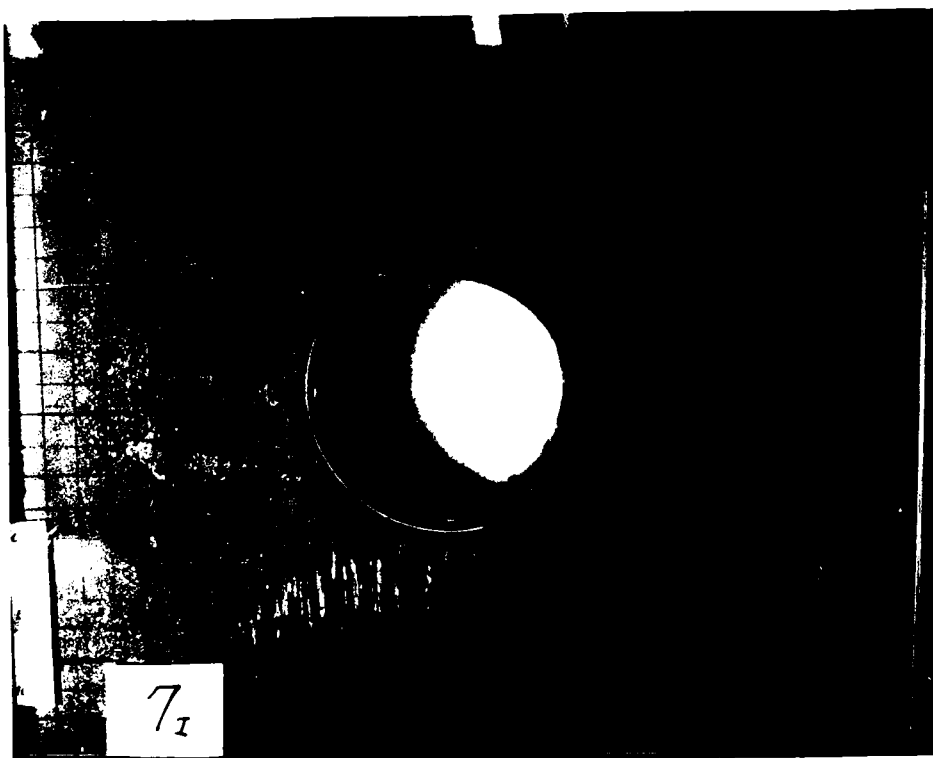
表3.1 トンネル周縁における  $u_r$  の計算値 (単位 cm)

$t(\text{sec}) \backslash \theta$	$70^\circ$	$60^\circ$	$30^\circ$	$0^\circ$	$-30^\circ$	$-60^\circ$	$-70^\circ$
2	-0.0512	-0.0508	-0.0497	-0.0481	-0.0465	-0.0454	-0.0450
3	-0.0742	-0.0736	-0.0719	-0.0697	-0.0674	-0.0657	-0.0651
5	-0.1157	-0.1147	-0.1121	-0.1086	-0.1050	-0.1025	-0.1015
7	-0.1516	-0.1503	-0.1470	-0.1423	-0.1377	-0.1343	-0.1330
10	-0.1968	-0.1952	-0.1908	-0.1848	-0.1787	-0.1744	-0.1727
30	-0.3413	-0.3385	-0.3309	-0.3204	-0.3100	-0.3024	-0.2996
90	-0.3868	-0.3836	-0.3750	-0.3631	-0.3512	-0.3426	-0.3395
150	-0.3875	-0.3843	-0.3757	-0.3638	-0.3519	-0.3433	-0.3401

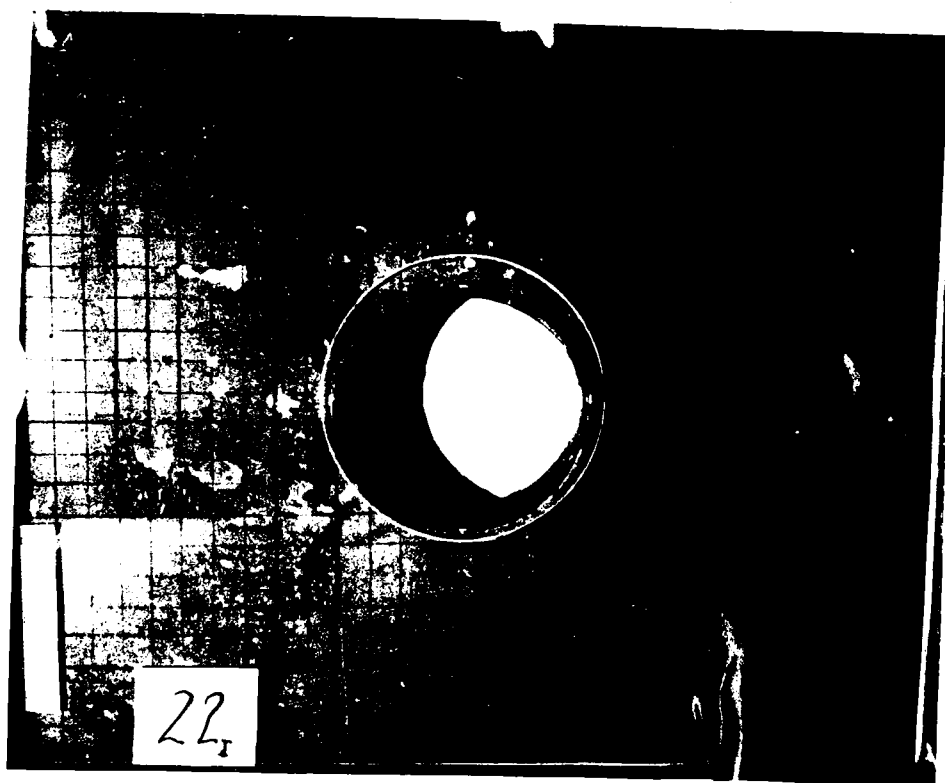
(負の符号はトンネル中心に向う変形量を示す)

トンネル模型実験の変形写真撮影より変形量を測定する場合はガラス板に画いたトンネル円孔中心を中心とした同心円を基準として測つてゐる。 $t = 1260 \text{ sec}$ 、 $t = 7200 \text{ sec}$  のときの撮影写真をそれぞれ写真〜 $\beta_2$ 、写真〜 $\beta_3$ に示す。地山荷重を載荷して後の経過時間に対して、このトンネル模型のトンネル円孔縁の変形量の測定値を表〜 $\beta_2$ に示す。ただしこの表において  $\theta$  は第1編第3章の第2、2図のようにとつたものである。しかし実際のトンネルでは始めから地山荷重がかかっている状態でトンネルを掘削して変形が生ずるのであるから、トンネル模型実験の写真撮影より求めた変形測定値より実際のトンネル変形状態の変形量を求めるため、つぎの補正をなすべきである。写真〜 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ の網目の変形をみると、トンネル円孔下部は相対的に上方に変形している。この補正のためにはトンネル円孔より遠く離れた所では荷重をかければ下方に圧縮される。この圧縮後の位置が実際の地山のその点の位置を示しているから、逆にこの圧縮量だけ上方に変形測定値に加算すべきである。この量を  $\delta$  の値として、 $\delta$  の値としては近似的にトンネル下盤中央直下の水平線が相対的に上方に弯曲した量をとることにすれば、 $\delta = 0.4172 \text{ cm}$  となる。トンネル円孔の変形量測定値の表〜 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ の値に  $\delta \sin \theta$  を加算したものが表〜 $\beta_4$ である。 $\delta \sin \theta$  の補正値を表〜 $\beta_3$ に示す。表〜 $\beta_4$ の実際の変形量と先の理論式より求めた表〜 $\beta_1$ の計算値を第3.3図(a)、(b)、(c)、(d)、(e)、(f)、(g)に示して比較する。





写真～3.2



写真～3.3

表 ~ 3.2 トンネル円孔変形量測定値  $\Delta r$  (単位 cm)

(負の符号はトンネル中心に向う変形量を示す)

$\theta$ $t(\text{sec})$	0	10	30	90	150	300	600	1260
180°	0	-0.1125	-0.1643	-0.1675	-0.1658	-0.1658	-0.1658	-0.1658
150°	0	-0.3938	-0.4436	-0.4853	-0.4831	-0.4831	-0.5017	-0.5391
120°	0	-0.7125	-0.7784	-0.8032	-0.8001	-0.8001	-0.8188	-0.8561
90°	0	-0.7876	-0.8508	-0.8511	-0.9107	-0.9481	-0.9668	-0.9854
60°	0	-0.7126	-0.7949	-0.8026	-0.7987	-0.8547	-0.8659	-0.8734
30°	0	-0.4500	-0.5155	-0.5218	-0.5373	-0.6196	-0.5933	-0.6120
0°	0	-0.1688	-0.1999	-0.2229	-0.2021	-0.2021	-0.2021	-0.2021
-30°	0	-0.0750	-0.0689	-0.0632	-0.0715	-0.0715	-0.0715	-0.0715
-60°	0	+0.0375	+0.0436	+0.0770	+0.0789	+0.0789	+0.0789	+0.0789
-90°	0	+0.1500	+0.1534	+0.1699	+0.1523	+0.1523	+0.1523	+0.1523
-120°	0	+0.0375	+0.0404	+0.0759	+0.0768	+0.0768	+0.0768	+0.0768
-150°	0	+0.0000	+0.0025	+0.0018	+0.0017	+0.0017	+0.0017	+0.0017

表 ~ 3.3 補正值 (単位 cm)

$\theta$	$\delta \sin \theta$	$\theta$	$\delta \sin \theta$	$\theta$	$\delta \sin \theta$
180°	0	60°	0.3613	-60°	-0.3613
150°	0.2086	30°	0.2086	-90°	-0.4172
120°	0.3613	0°	0	-120°	-0.3613
90°	0.4172	-30°	-0.2086	-150°	-0.2086

表 ~ 3.4 測定値より補正された実際のトンネル円孔変形量  $\Delta r$  (単位 cm)

(負の符号はトンネル中心に向う変形量を示す)

$\theta$ $t(\text{sec})$	0	10	30	90	150	300	600	1260
180°	0	-0.1125	-0.1643	-0.1675	-0.1658	-0.1658	-0.1658	-0.1658
150°	0	-0.1852	-0.2350	-0.2767	-0.2745	-0.2747	-0.2931	-0.3305
120°	0	-0.3512	-0.4171	-0.4419	-0.4388	-0.4388	-0.4547	-0.4948
90°	0	-0.3704	-0.4336	-0.4339	-0.4939	-0.5309	-0.5496	-0.5682
60°	0	-0.3513	-0.4336	-0.4413	-0.4374	-0.4934	-0.5046	-0.5121
30°	0	-0.2414	-0.3069	-0.3132	-0.3287	-0.4110	-0.3847	-0.4034
0°	0	-0.1688	-0.1999	-0.2229	-0.2021	-0.2021	-0.2021	-0.2021
-30°	0	-0.2836	-0.2775	-0.2718	-0.2801	-0.2801	-0.2801	-0.2801
-60°	0	-0.3238	-0.3177	-0.2843	-0.2824	-0.2824	-0.2824	-0.2824
-90°	0	-0.2672	-0.2638	-0.2473	-0.2649	-0.2649	-0.2649	-0.2649
-120°	0	-0.3238	-0.3209	-0.2854	-0.2845	-0.2845	-0.2845	-0.2845
-150°	0	-0.2086	-0.2061	-0.2068	-0.2069	-0.2069	-0.2069	-0.2069

## 実験の考察

図 3.3 より実験値と計算値とを比較すればつぎのようである。  $\theta = 60^\circ \sim 120^\circ$  の間、

すなわちトンネル拱頂附近では計算値が実験値より小となっているのは、計算値では地表面よりトンネル中心までの深さ  $H = 1.207 \text{ m}$  となっており、地表面に荷重のない状態であって十分せん断抵抗がきいているが、実験値では上かぶり厚  $0.0 \text{ m}$  で過載荷重  $0.191 \text{ kg/cm}^2$  が作用しているから、それだけせん断抵抗のきき方が小となっている結果と考えられる。 $\theta = 60^\circ$  から時計まわりに  $\theta = 120^\circ$  まで、すなわちトンネル側壁及び下盤では実験値より計算値の方が大となっている。これはトンネル模型実験では側方、下方が模型箱で制限されているが、理論計算においては無限の板がりをもっているとして計算している結果のために実験値の変形量より計算値の変形量が大となったと考えられる。その他模型実験では下方種ガラス板及び後面の板と土との摩擦があるため、また完全に砂は模型でなく近似的にこのようにみなせる原因のため、このような差が生じたと考えられる。

前述の模型実験において地山の上が粘弾性状態にあるかどうかを調べるため荷重制御式三軸圧縮試験機を利用して、側液圧を零としてクリープ強度を求めた。この試験結果に関しては第1編第1章第4節に述べたように、この地山の上限降伏値は  $0.58 \text{ kg/cm}^2$  である。トンネル模型実験の載荷強度  $0.191 \text{ kg/cm}^2$  はこの上限降伏値の半以下となっている故に、土が粘弾性状態で実験をなしたことになる。つぎにトンネル円孔周縁の接線方向の直応力を調べる。(2.1.4.2)式より  $(\sigma_\theta)_{e1}$  を求めれば

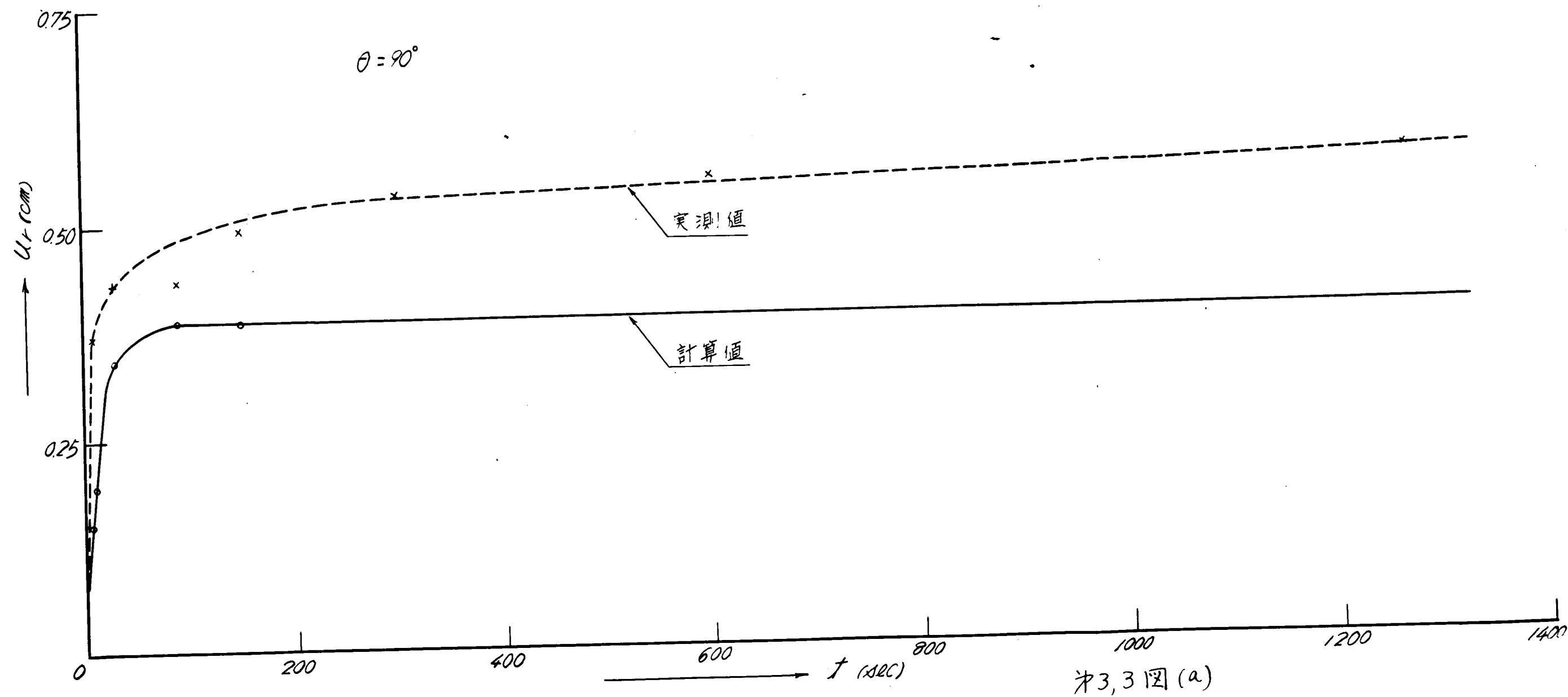
$$\theta = 90^\circ \text{ のとき} \quad (\sigma_\theta)_{e1} = -0.475 \text{ kg/cm}^2$$

$$\theta = -90^\circ \text{ のとき} \quad (\sigma_\theta)_{e1} = -0.505 \text{ kg/cm}^2$$

となり、ここに負の符号は圧縮応力を示す。 $(\sigma_\theta)_{e1}$  の式より  $\theta = 90^\circ$  の値から  $-90^\circ$  の値へと圧縮応力は増している。またかりにこのトンネル円孔の応力状態が大なる地山圧力のため、弾性状態にあるとすれば、そのときの  $\sigma_\theta$  を  $(\sigma_\theta)_{p1}$  とする。ヒズミ制御式三軸圧縮試験結果を第3、4図に示す。これより粘着力  $C = 0.60 \text{ kg/cm}^2$ 、内部摩擦角  $\varphi = 11^\circ 30'$  となり、

$$(\sigma_\theta)_{p1} = 2C \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = 1.47 \text{ kg/cm}^2$$

の圧縮応力となる。 $|(\sigma_\theta)_{e1}| < |(\sigma_\theta)_{p1}|$  よりトンネル模型実験を行った載荷状態は地山の粘弾性状態にあることを示している。



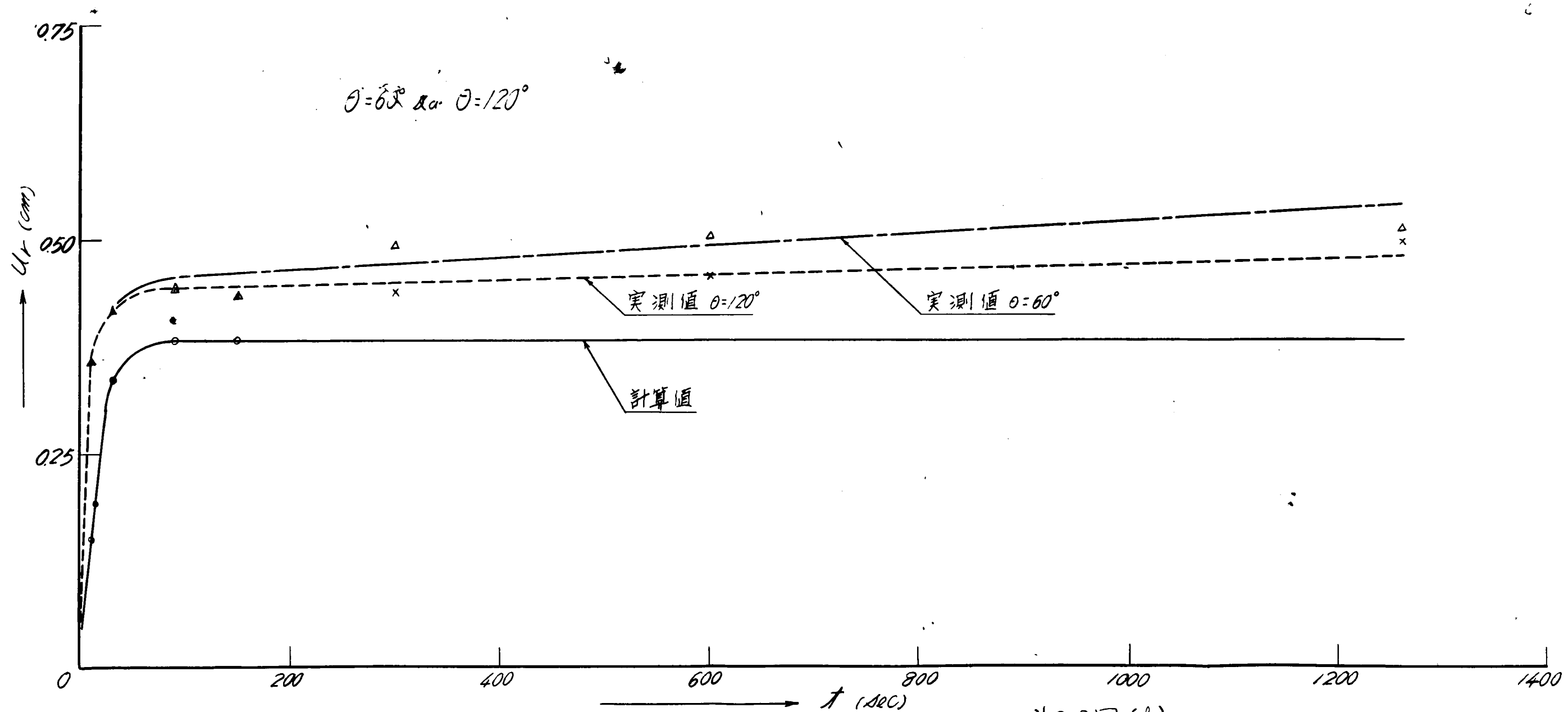
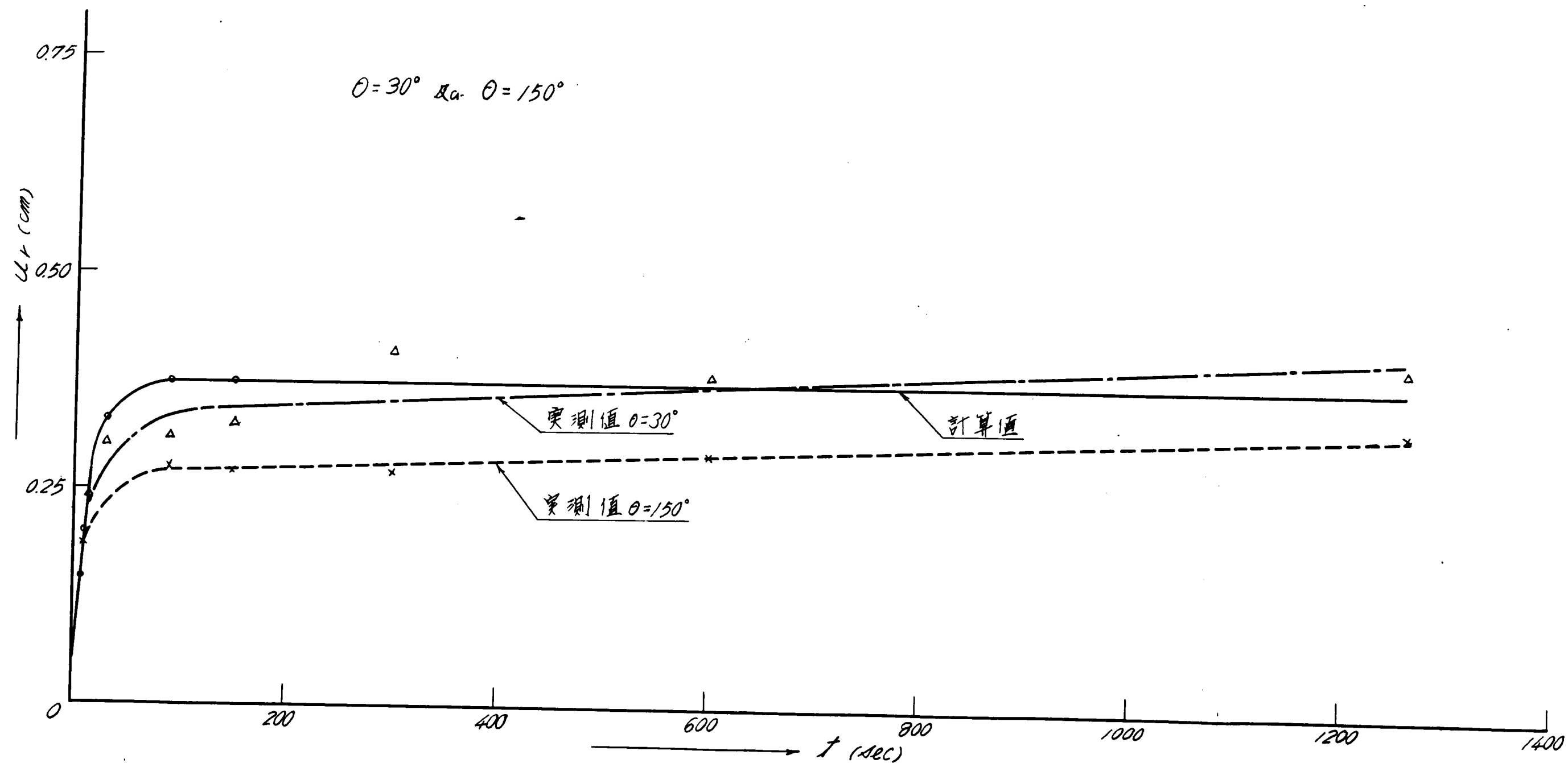
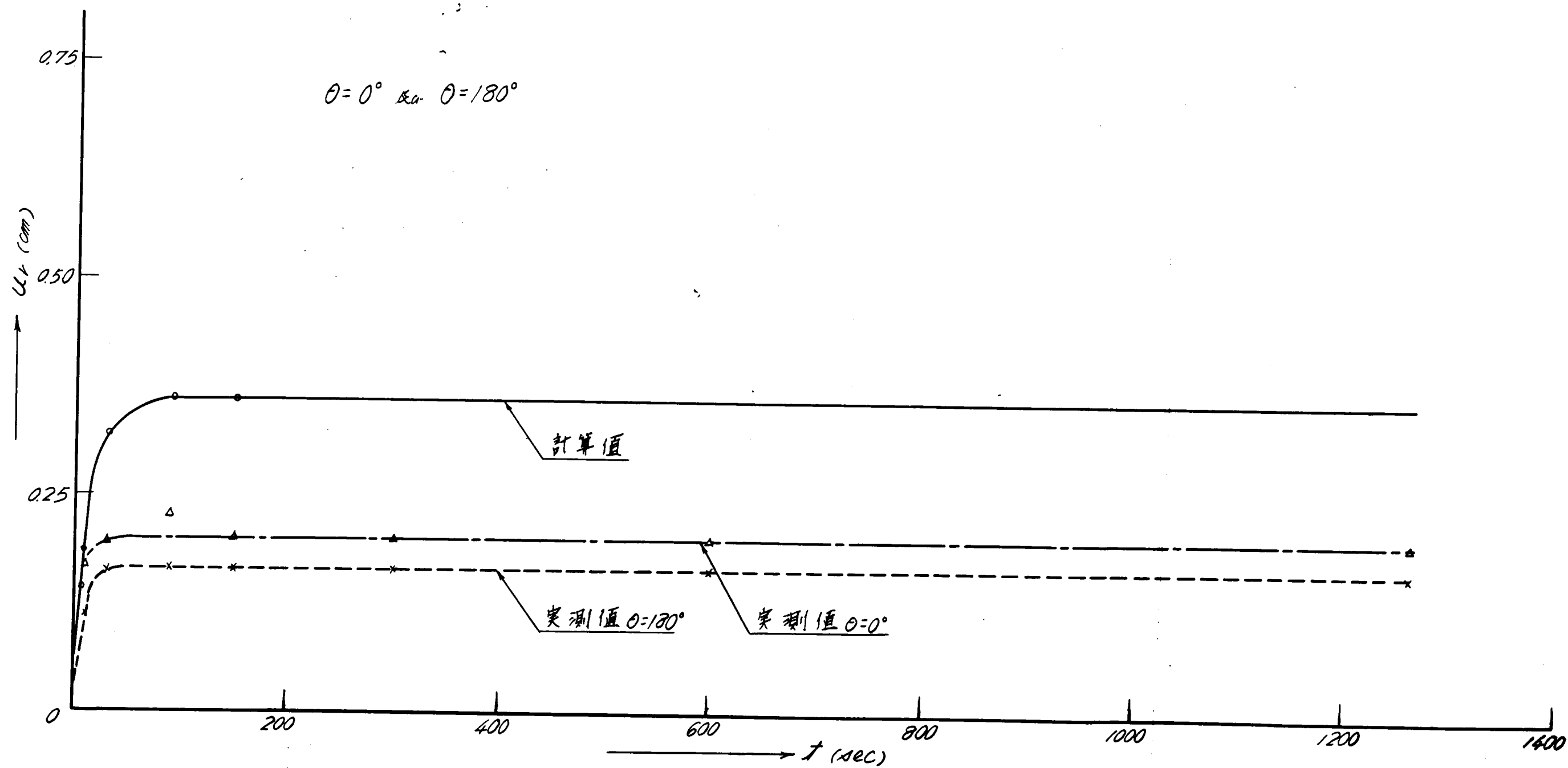


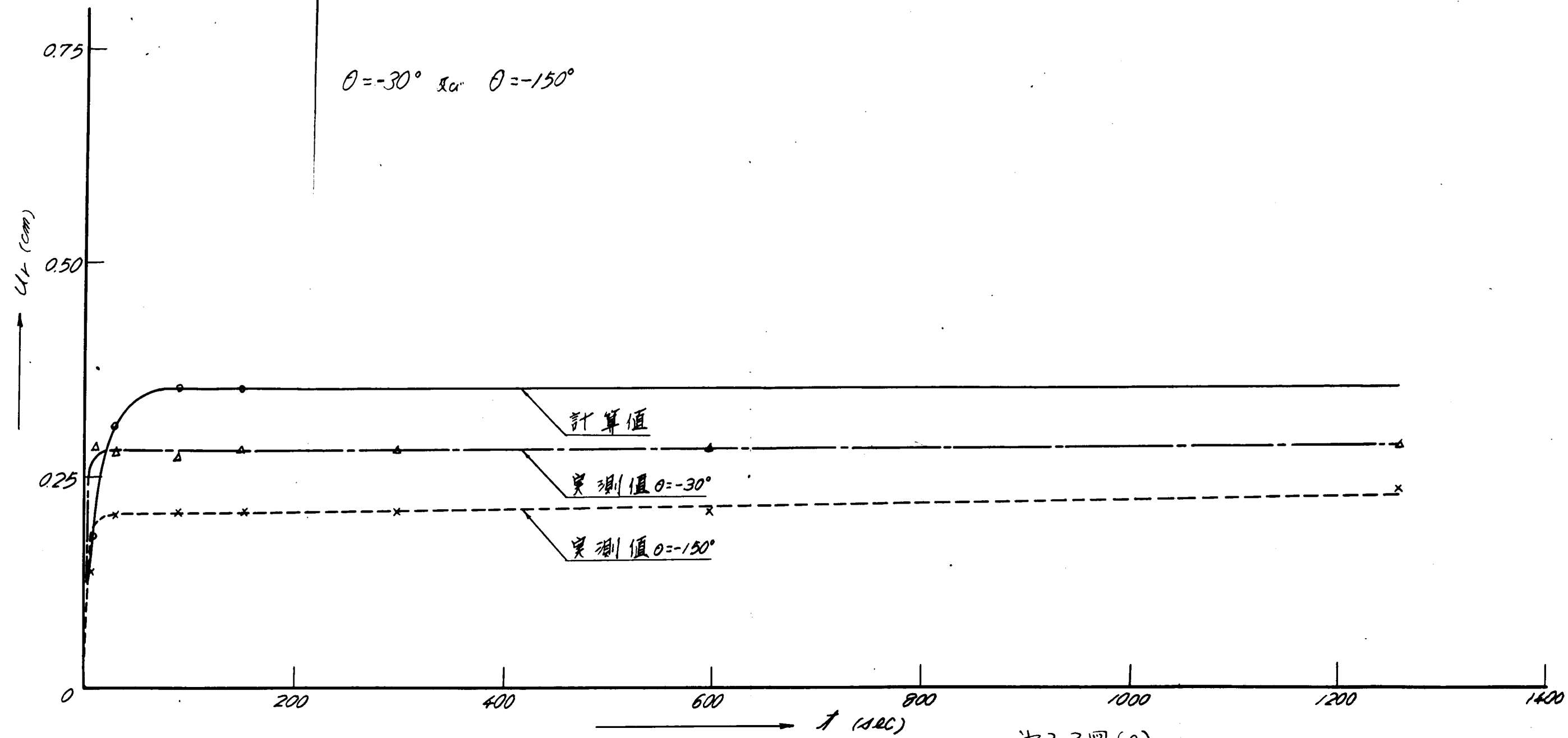
图 3, 3 (a)



第3,3図(c)

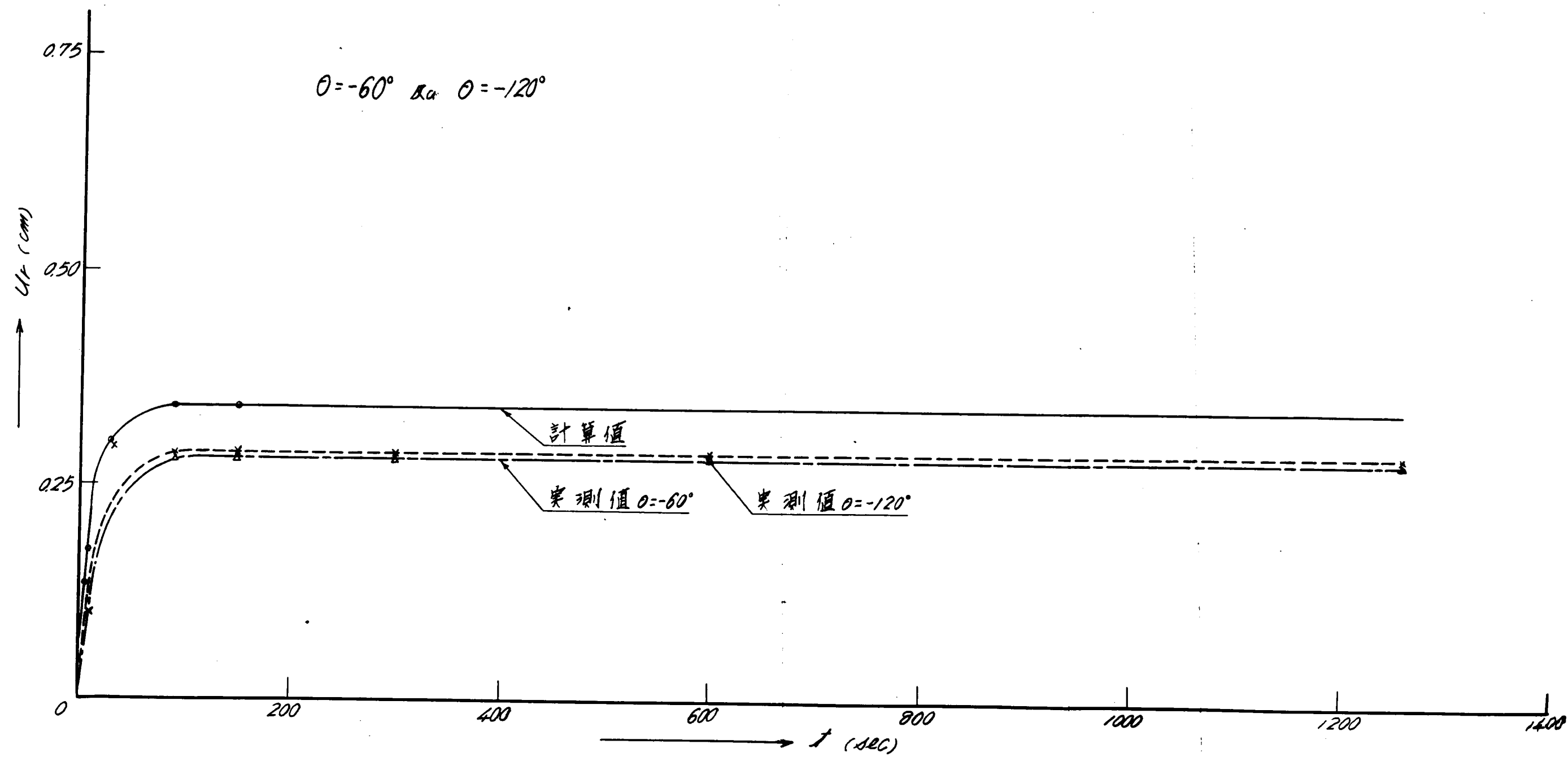


第3,3図(d)



※3,3図(e)





才3,3図(f)

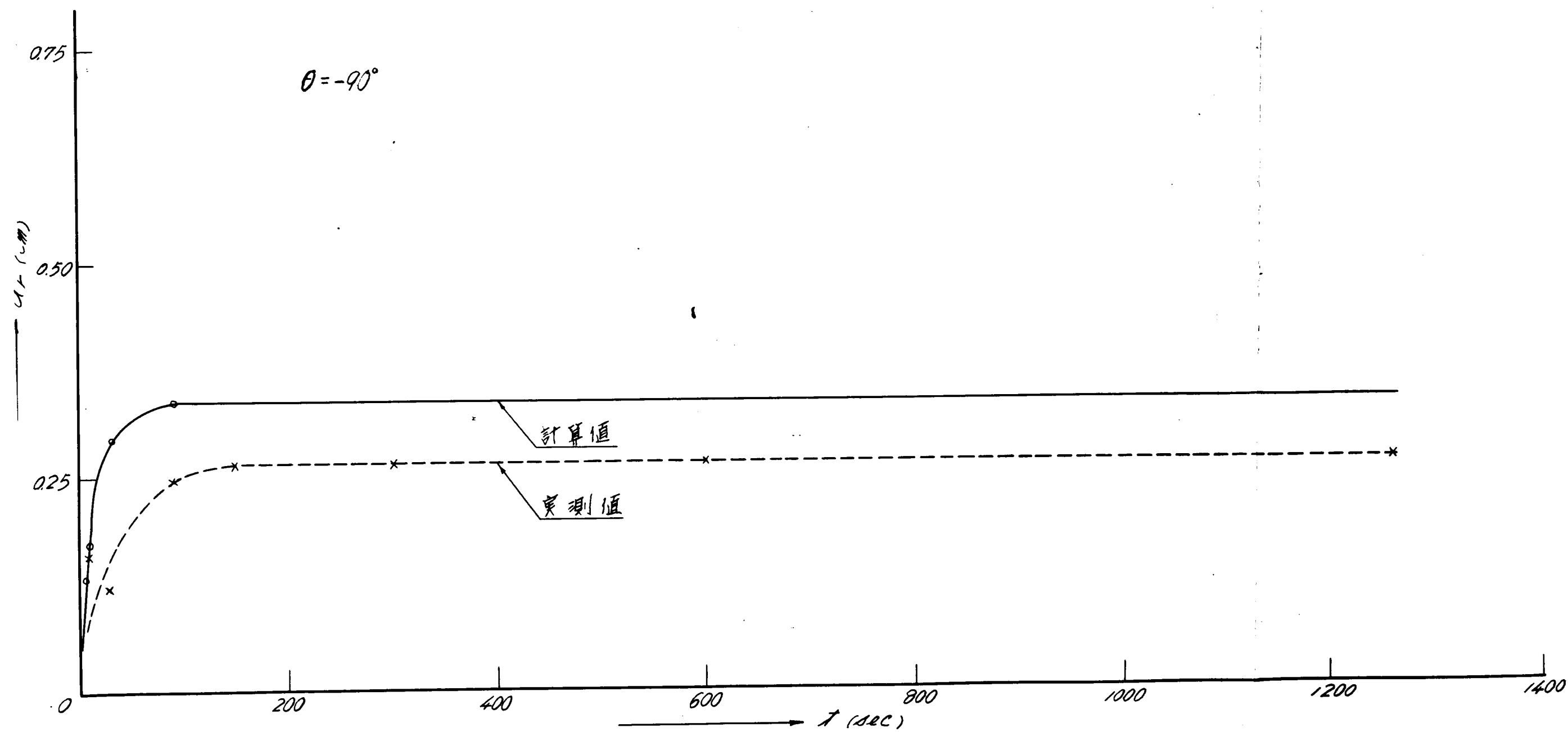
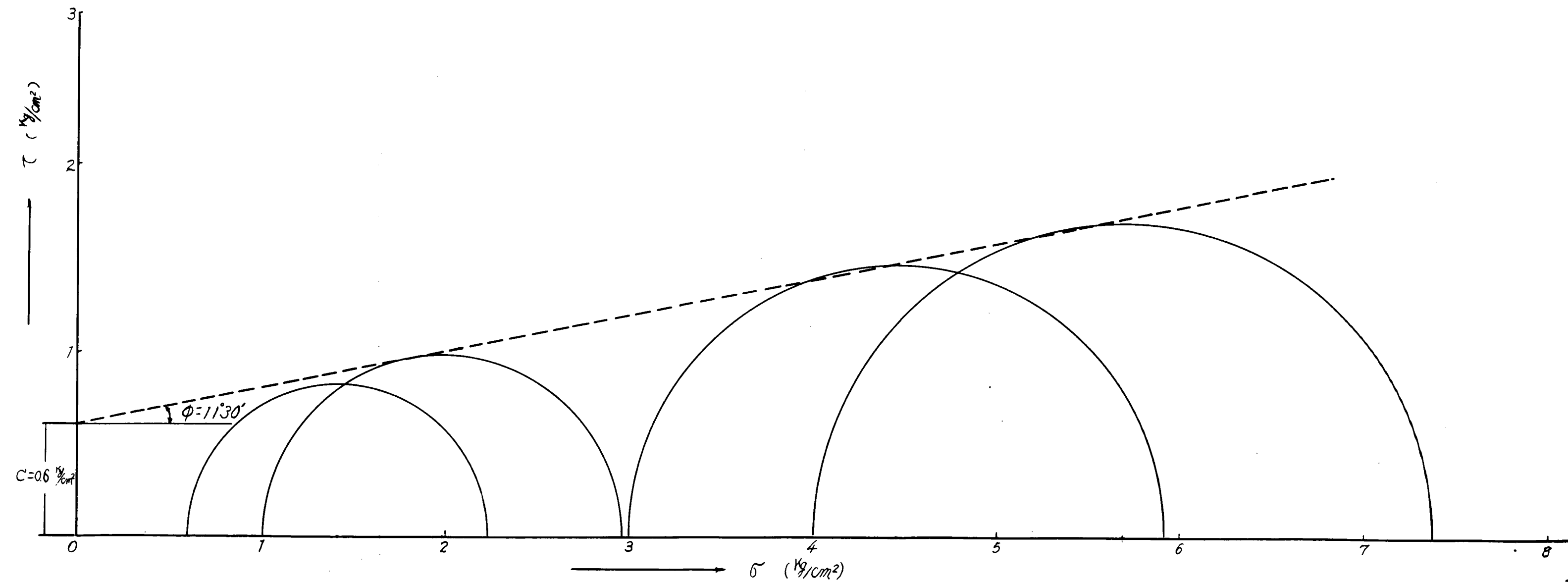


图 3.3 (g)



第3,4图

### 第3節 結 語

クリープ試験のときの載荷重をいろいろかえたときせん断弾性係数 $\mu$ 、粘性係数 $\eta$ の値が如何になるかをなお検討する余地があるが、第1編第1章第3節で述べたようにクリープ試験のとき圧密荷重より小なる鉛直荷重でクリープ試験をなし、破壊をおこさない条件で測定して求めた $\mu$ 、 $\eta$ の値を用いて理論式(ふゑ、19)式及び(ふゑ、20)式より計算した変形量の計算値とトンネル模型実験による変形量の測定値とを比較したが、トンネル模型実験の土の均質性を完全に得がたく、実際のトンネル地山荷重条件を実験では完全に満たしにくいことにより、ある差異を生じたが、粘性土の地山中にトンネルを掘削して後の変形挙動について、地山を簡単な粘弾性体とみなして、土の力学模型をVoigt型とみなしたときの理論式(ふゑ、19)式及び(ふゑ、20)式によって近似的にその変形挙動の概相を説明できると考えられる。このことは緒論第1章第6図に示す国鉄日振トンネルの掘削面周壁の膨張の現場測定の結果より、ほぼこの粘弾性理論でこの現象を説明できると考えられる。

なお粘性土中のトンネルが掘削後変形してある時間後に崩壊する問題については上既降伏値以上の荷重がトンネル模型にかかるようにして実験をなすべきであり今後に残された問題である。また第3、4図でわかるように $\theta = 90^\circ$ 、 $\theta = 60^\circ$ 及び $\theta = 120^\circ$ の拱頂付近では変形量の実測値によってある時間までは変形量が急激に増大し、それ以後も徐々に変形量が増加していることが観測されているが、地山を簡単な粘弾性体とみなされるときの変形挙動の理論式によつては、初期の変形は急激に増加して後、ある時間後は変形量の変化なく一定となっている。この差異の主なるのは粘弾性理論のtime factorに起因するものであり、さらにrheologyの立場より変形挙動の理論を究明すべきであるので次章にこれに関して実験的に研究したことを述べることとする。

## 第2章 より一般化した粘弾性体とみなされる地山中の素掘円

### 形トンネルの変形挙動に関する模型実験<sup>79)</sup>

#### 第1節 実験装置及び実験方法

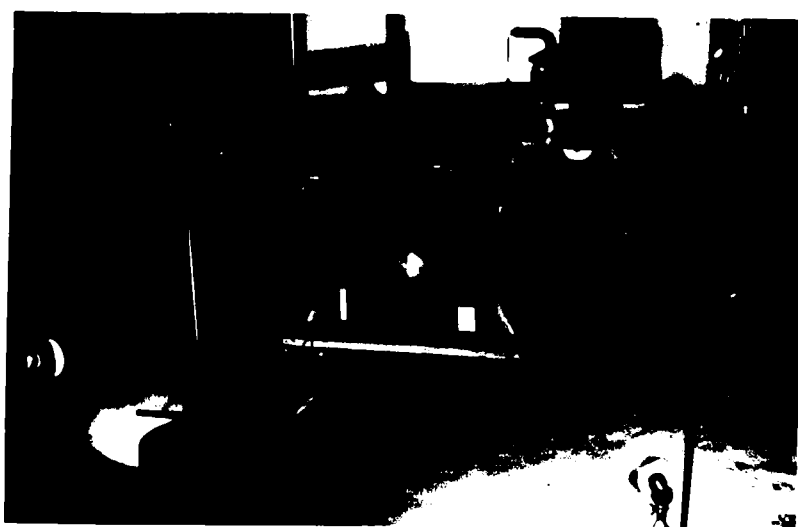
第2節 第3章に述べたより一般化した粘弾性体とみなされる地山中の素掘円形トンネルの変形挙動に関する理論を実験的に検証するためつぎのような模型実験をなした。前章と同じく、 $60 \times 70 \times 10 \text{ cm}$  の内容積をもつ木箱を作り、変形挙動を写真撮影するために前面の $60 \times 70 \text{ cm}$  を硬質ガラス(板厚 $20 \text{ mm}$ )をあてた。前章の模型実験では、 $10 \text{ mm}$ の厚さのものをを用いたが、載荷時にガラス板中央で約 $1 \text{ mm}$ の歪みを生じたので、これを免ずるため $20 \text{ mm}$ の厚さの硬質ガラスを使用したのである。 $60 \times 70 \text{ cm}$ の後面の木板は濾紙をとりつけられるようねじ止めとする。土をつめる方法は前章と同様で木箱を横倒しにして、つぎに述べる土の含水比 $55\%$ のものを均等になるようにつぎ固める。なお $60 \times 70 \text{ cm}$ の両側面には圧密時の排水をよくするため濾紙をあてた。土をつめてからガラス板をあて写真(図3.4)に示すよう鋼状の枠を周囲にあて前後よりボルト締めとして鉛直に立てる。つめた土の圧密荷重及びその後のトンネル地山荷重のかけ方は写真(図3.5)及び写真(図3.6)に示すように/evev比の下部懸吊式である。

使用した土は第1節 第2章第3節に述べたものと同じで、徳島市南昭和町沖積土で、その物理的性質は真比重 $2.77$ , L.L.  $38.5\%$ , P.L.  $21.7\%$ , P.I.  $16.8\%$ であつて、粒度分析の結果粘土分 $10\%$ , シルト分 $60\%$ , 砂分 $30\%$ の Silty loam である。

つめた土をさらに均質にしめかためると同時に粘弾性的特性をもつように圧密させる。トンネル模型実験用の土は最初圧密荷重 $0.288 \text{ kg/cm}^2$ をかけて圧密をおこさせる。その実験結果を第3.5図(a)に圧密時間沈下曲線として示す。これによれば一次圧密の特徴であるS字型反曲線があらわれ載荷後 $1550$ 分で一次圧密を終了し、二次圧密状態になり外部よりの振動による影響があらわれているが、載荷後 $2200$ 分まで放置した。その後直ちに $0.372 \text{ kg/cm}^2$ の荷重に増加して更に圧密した。このときの圧密時間沈下曲線を第3.5図(b)に示す。このときは再載荷後 $100$ 分で一次圧密終了して二次圧密状態となり、再載荷後 $1200$ 分まで放置して除荷した。このようにしてトンネル模型実験用の土は十分均質につまり、後に行つたトンネル模型実験では地山荷重として $0.288 \text{ kg/cm}^2$ を載荷したとき排水が殆んどなかったことより充分一次圧密を終了し、クリープ状態になっていると思われる。

つぎに土のクリープ試験用試料土の作成のため同じ模型箱を用いて同じ方法で、土をつめ最初圧密荷重 $0.288 \text{ kg/cm}^2$ をかけたときの圧密時間沈下曲線を第3.6図(a)に示す。これによれば載荷後 $1550$ 分で一次圧密を終了し、載荷後 $2200$ 分まで放置した後、さらに、 $0.372 \text{ kg/cm}^2$ に荷重を増加して更に圧密した圧密時間沈下曲線を第3.6図(b)に示す。これによれば再載荷後 $100$ 分で一次圧密終了して、再載荷後 $1200$ 分まで放置して除荷した。それでこのようにして作った土は前のトンネル模型実験用の土と殆んど同じ状態で圧密されている故に、この試料土を用いてクリープ試験、三軸圧縮試験、ポアッサン比測定試験を行つた、これに関しての実験結果は第1節 第2章第3節に述べている。

前述のトンネル模型実験箱において行つた圧密を終了した土の $60 \times 70 \text{ cm}$ の前面の表面に $2 \text{ cm}$ 間隔で縦横に直線をヘクト版インクで引き、この表面の中央にトンネル円孔の半径 $8 \text{ cm}$ の孔を掘削して、この面に硬質ガラス板をあてる。ただしこの作業は実験箱を横倒しにして行い装置を組み立てた後直立して写真(図3.4)に示すように/evev比の下部懸吊式によつて地山



写真～3.4



写真～3.5

荷重をかけた。このトンネル模型の載荷荷重としては $0.288 \text{ kg/cm}^2$  をかけた。この荷重載荷の時刻よりトンネル円孔が時間的に変形する量を写真撮影によって記録した。

。ただしトンネル円孔縁の変形量を測定する基準としてはガラス板上のトンネル円孔より大なる半径の同心円を画いたものを用いた。変形量の測定はこの写真撮影をスライドにて拡大して行った。

### 第5節 実験結果及びその考察

トンネル模型実験に使用した地山材料の土のせん断弾性係数 $\gamma$ 及び(1.2.25)式のrheologic的常数 $\alpha$ 、 $\beta$ をクリープ試験によって求めた結果は第1編第2章第3節で述べた値のものであつて、 $\gamma = 1.478 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアッサン比 $\nu = 0.474$ 、ポアッサン数 $\mu = 2.11$ 、 $\alpha = 0.70$ 、 $\beta = 0.091$ となるから、(1.2.25)式のtime factorは

$$\text{至}(t) = \alpha + \beta \log_{10} t = 0.70 + 0.091 \log_{10} t$$

となる。また土の単位容積重量は $W = 0.00196 \text{ kg/cm}^3$ であり、トンネル模型実験における地山荷重載荷面よりトンネル中心までの深さは $27.3 \text{ cm}$ である。また地山載荷荷重は $P = 0.288 \text{ kg/cm}^2$ である故に、土がぶり換算高さ $H$ は、

$$H = 27.3 + \frac{0.288}{0.00196} = 174.03 \text{ cm}$$

となる。(2.3.29)式を用いるときに、上の実測値を用いて、

$$\mu_1 = 1.638, \mu_2 = 0.164, \mu_0 = 3.111, m = -0.0250, b_1 = 0.00186$$

$$b_2 = 0.000098, E = 28(1 + \frac{1}{\mu}) = 4.355 \text{ kg/cm}^2$$

がえられ、これらの値を(2.3.29)式に代入する。トンネル周縁の変形量は $\gamma = \beta = 8 \text{ cm}$ として、

$$u_r = (u_r) e_1, \text{至}(t)$$

であつて、(2.3.29)式の[ ]の括弧の中が $(u_r) e_1$ となる。 $(u_r) e_1$ の値を表へ3.5に示す。また(2.3.29)式によって求められるトンネル周縁上の $u_j$ の変形量の時間的変化は表へ3.6に示す。

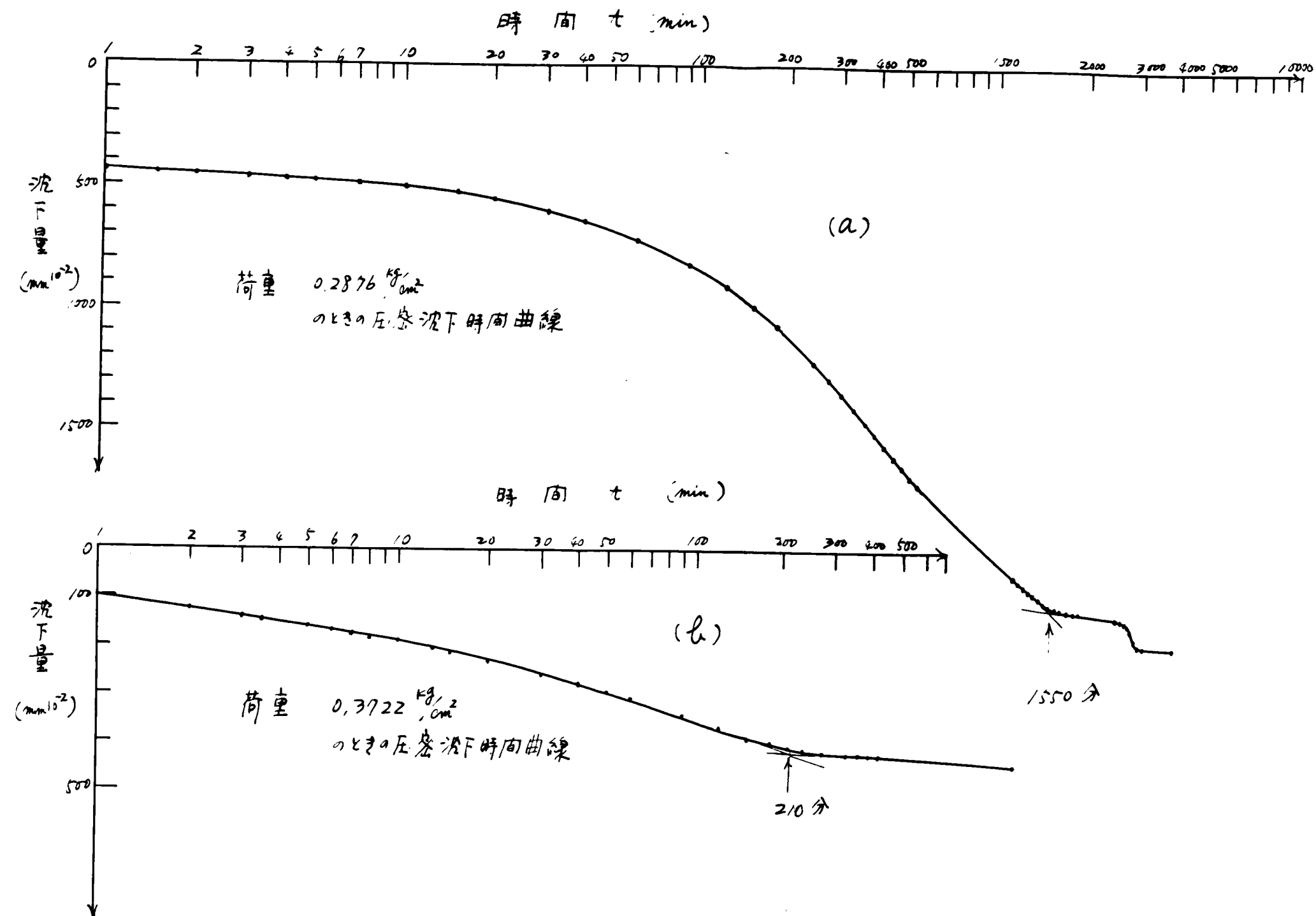
表へ3.5 トンネル周縁における $(u_r) e_1$ の計算値(単位cm)

(負の符号は変形がトンネル中心に向うことを示す)

$\theta$	$90^\circ$	$60^\circ$	$30^\circ$	$0^\circ$	$-30^\circ$	$-60^\circ$	$-90^\circ$
$(u_r) e_1$	-1.0250	-1.0287	-0.9088	-0.8264	-0.8413	-0.9157	-0.9567

表へ3.5及び表へ3.6の値は地山が半無限体であり側方、下方は無限に広がっているときのトンネルの円孔周縁上の変形量を求めたのであるが、トンネル模型実験において測定したこの変形量は上述の理論式の条件を満足していなく、模型実験箱の大きさに側方及び下方に広がり制約がある。この条件を考慮したときの計算法は次の方法による。

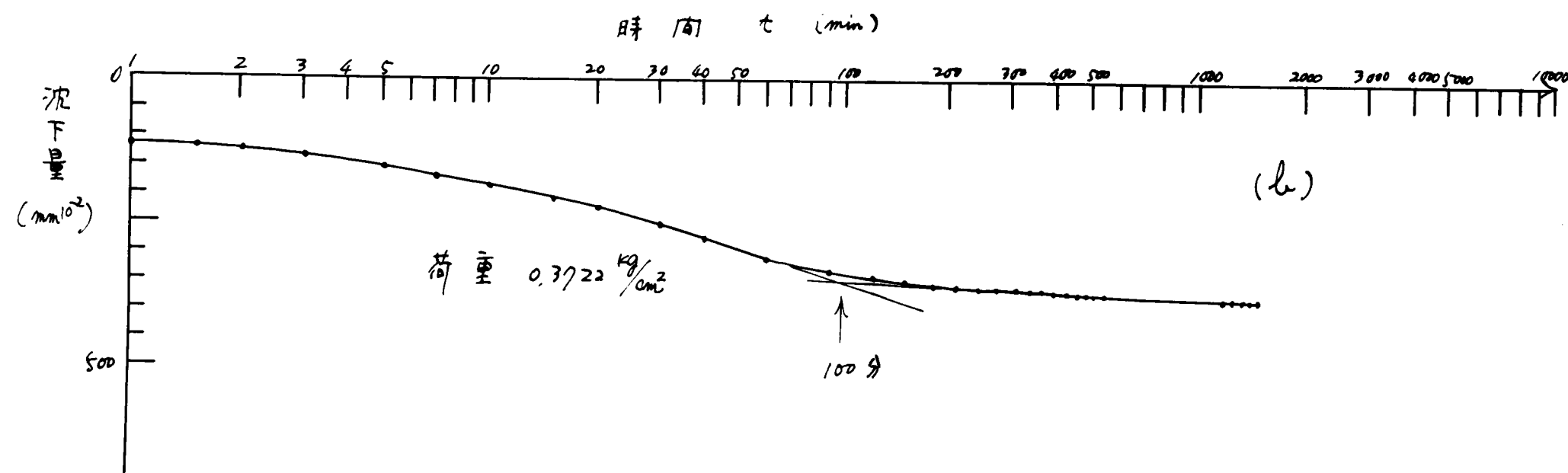
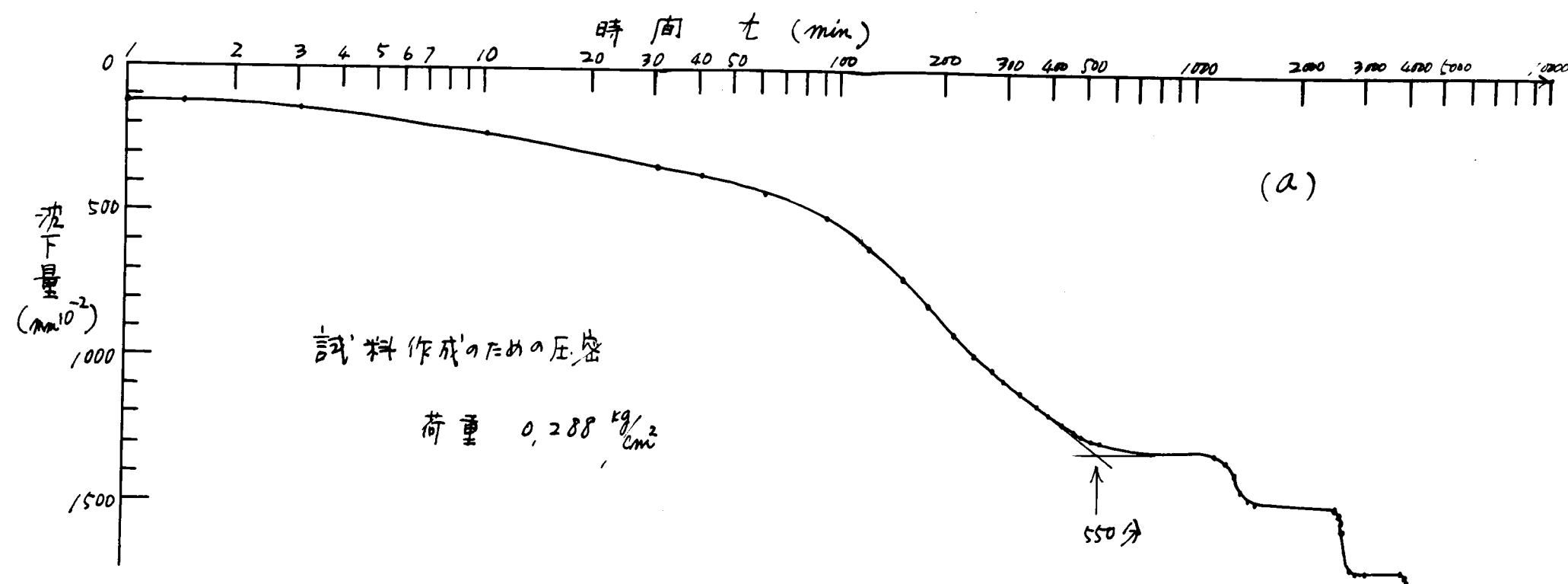
上述の理論によって求めた $u_r$ を $u_{r1}$ とする。第3.7図に示すようにOXに対して円孔のある(A)図の鏡像をとり、これを(B)図とする。(B)図の円孔中心を $O_1$ とし、(A)図のトンネル円孔縁の $\theta = -90^\circ$ の点を $a$ とする。 $\overline{O_1 a} = r_2 v$ とすれば、 $r_2 v = 44.2 \text{ cm}$ であつて、(B)図においては地山荷重 $P$ は下より上方に向つて作用しているが、このときの(B)図のトンネル円孔周辺の変形量の $\theta = -90^\circ$ のとき値を $(u_{r2}) v$ とする。(2.3.29)式において $\gamma = r_2 v$ 、 $\theta = -90^\circ$ として $(u_{r2}) v$ の $t \rightarrow \infty$ のときの値 $(u_{r2}) v e_1 = -0.6317 \text{ cm}$ となる。 $(u_{r2}) v = (u_{r2}) v e_1, \text{至}(t)$ であつて、模型箱の条件を考えたときの $a$ 点の実際の変形量は $(u_r) v = (u_{r1}) v - (u_{r2}) v$ として求められる。ただし $(u_{r1}) v$ は $\theta = -90^\circ$ のときのトン



第3,5図







第3.6図



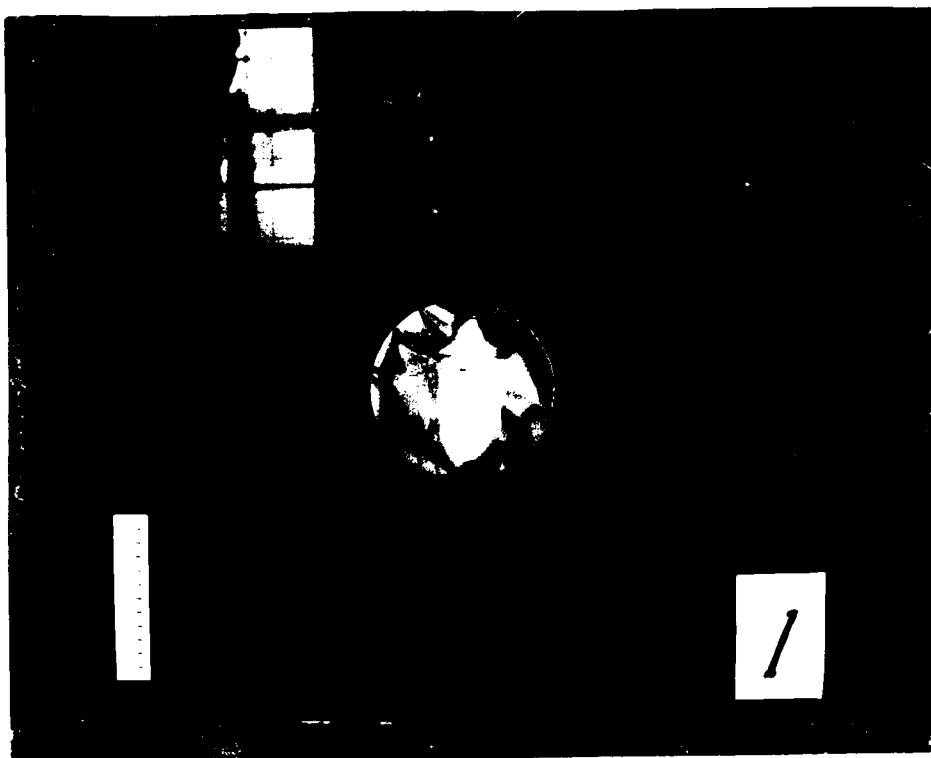
表 3.6 トンネル周縁における $u_r$ の計算値(単位 cm)  
(負の符号は変形がトンネル中心に向うことを示す)

$t$ (sec)	$\theta$	$90^\circ$	$60^\circ$	$30^\circ$	$0^\circ$	$-30^\circ$	$-60^\circ$	$-90^\circ$
10	0.7910	-0.8582	-0.8137	-0.7189	-0.8537	-0.6655	-0.7243	-0.7567
20	0.8184	-0.8880	-0.8419	-0.7438	-0.6763	-0.6885	-0.7494	-0.7830
30	0.8344	-0.9053	-0.8583	-0.7583	-0.6895	-0.7019	-0.7641	-0.7983
40	0.8458	-0.9177	-0.8701	-0.7687	-0.6990	-0.7116	-0.7745	-0.8092
50	0.8546	-0.9272	-0.8791	-0.7767	-0.7062	-0.7190	-0.7826	-0.8176
60	0.8618	-0.9351	-0.8865	-0.7832	-0.7122	-0.7250	-0.7892	-0.8245
90	0.8778	-0.9524	-0.9030	-0.8977	-0.7254	-0.7385	-0.8038	-0.8398
120	0.8892	-0.9648	-0.9147	-0.8081	-0.7348	-0.7481	-0.8142	-0.8507
150	0.8980	-0.9743	-0.9238	-0.8161	-0.7421	-0.7555	-0.8223	-0.8591
180	0.9052	-0.9821	-0.9312	-0.8226	-0.7481	-0.7615	-0.8289	-0.8660
210	0.9113	-0.9888	-0.9375	-0.8282	-0.7531	-0.7667	-0.8345	-0.8713
240	0.9166	-0.9945	-0.9429	-0.8325	-0.7575	-0.7711	-0.8393	-0.8789
300	0.9254	-1.0041	-0.9520	-0.8410	-0.7648	-0.7785	-0.8474	-0.8853
360	0.9326	-1.0119	-0.9594	-0.8475	-0.7707	-0.7846	-0.8540	-0.8922
420	0.9387	-1.0185	-0.9656	-0.8531	-0.7757	-0.7897	-0.8596	-0.8981
480	0.9440	-1.0242	-0.9711	-0.8579	-0.7801	-0.7942	-0.8664	-0.9031
540	0.9486	-1.0292	-0.9758	-0.8621	-0.7839	-0.7981	-0.8686	-0.9075
600	0.9528	-1.0338	-0.9801	-0.8659	-0.7874	-0.8016	-0.8725	-0.9115
720	0.9600	-1.0416	-0.9876	-0.8724	-0.7933	-0.8076	-0.8791	-0.9184
700	0.9688	-1.0511	-0.9966	-0.8804	-0.8006	-0.8151	-0.8871	-0.9269
1200	0.9802	-1.0635	-1.0083	-0.8908	-0.8100	-0.8246	-0.8976	-0.9378

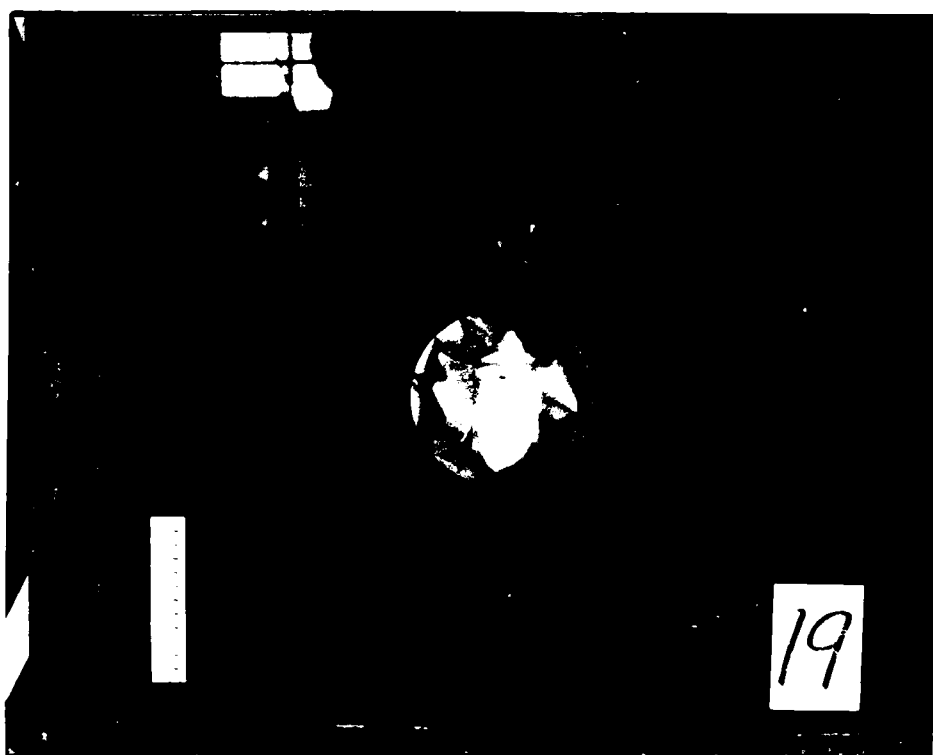
タル円孔縁上の $u_{r1}$ の値である。

また第 3.7 図の OY に対して (A) 図の鏡像をとれば (C) 図がえられ、(C) 図の中心を O<sub>2</sub> とし、(A) 図の円孔縁上の  $\theta = 180^\circ$  の点を  $a$  として、 $O_2a = R_2h$  とする。  $R_2h = 5.2$  cm である。 (C) 図のトンネル円孔周縁の変形量の  $\theta = 180^\circ$  のときの値を  $(u_{r2})_a$  とする。  
(2, 3, 29) 式において  $r = R_2h$ 、 $\theta = 180^\circ$  として  $(u_{r2})_a$  の  $t \rightarrow \infty$  のときの値  $(u_{r2})_{a\infty} = -0.1217$  cm となる。 $(u_{r2})_a = (u_{r2})_{a\infty} + \Delta u_{r2}$  として、模型箱の条件を考えたときの  $a$  点の実際の変形量は  $(u_r)_a = (u_{r1})_a - (u_{r2})_a$  として求められる。ただし  $(u_{r1})_a$  は  $\theta = 180^\circ$  のときのトンネル円孔縁上の  $u_{r1}$  の値である。(A) 図の  $a$  点、 $b$  点以外のトンネル円孔縁上の  $u_r$  の求め方としては、 $\theta = 0^\circ$  より時計方向に  $\theta = -180^\circ$  までの間、すなわち側壁中央よりインバート中央にかけての部分では、 $(u_{r2})_a$  と  $(u_{r2})_b$  の合成が半径方向に射影される値を  $u_{r2}$  として、模型箱の条件を考慮したトンネル円孔縁上の変形量は  $u_r = u_{r1} - u_{r2}$  として求められる。 $\theta = 0^\circ$  より反時計方向に  $\theta = 180^\circ$  までの間、すなわち側壁中央よりアーチ頂点にかけての部分では、 $(u_{r2})_b$  の半径方向へ射影される値を  $u_{r2}$  として、模型箱の条件を考慮したトンネル円孔縁上の変形量は  $u_r = u_{r1} - u_{r2}$  として求められる。このようにして求めた模型箱の境界条件を考慮して補正されたトンネル円孔縁の変形量  $u_r$  の計算値を表 3.7 に示す。

トンネル模型実験において地山荷重をかけて後のトンネル円孔縁の変形量を本編第 4 章第 2 節



写真—56



写真—57



表 3.7 トンネル模型実験箱の境界条件を考慮して補正された

トンネル円孔縁の $U_r$  の計算値(単位 cm)

(負の符号は変形がトンネル中心に向うことを示す)

$t(\text{sec}) \backslash \theta$	$90^\circ$	$60^\circ$	$30^\circ$	$0^\circ$	$-30^\circ$	$-60^\circ$	$-90^\circ$
10	-0.8582	-0.7655	-0.6355	-0.5574	-0.3325	-0.2435	-0.2571
20	-0.8880	-0.7719	-0.6575	-0.5767	-0.3440	-0.2519	-0.2660
30	-0.9053	-0.8075	-0.6704	-0.5880	-0.3507	-0.2568	-0.2712
40	-0.9177	-0.8186	-0.6795	-0.5960	-0.3555	-0.2603	-0.2749
50	-0.9272	-0.8271	-0.6866	-0.6022	-0.3592	-0.2630	-0.2777
60	-0.9351	-0.8341	-0.6924	-0.6073	-0.3622	-0.2653	-0.2801
90	-0.9524	-0.8495	-0.7052	-0.6188	-0.3689	-0.2702	-0.2853
120	-0.9648	-0.8606	-0.7144	-0.6266	-0.3737	-0.2737	-0.2890
150	-0.9743	-0.8691	-0.7215	-0.6328	-0.3774	-0.2764	-0.2919
180	-0.9821	-0.8761	-0.7272	-0.6379	-0.3805	-0.2786	-0.2942
210	-0.9888	-0.8820	-0.7321	-0.6422	-0.3830	-0.2805	-0.2962
240	-0.9945	-0.8871	-0.7364	-0.6459	-0.3852	-0.2821	-0.2979
300	-1.0041	-0.8956	-0.7435	-0.6521	-0.3889	-0.2848	-0.3008
360	-1.0119	-0.9026	-0.7493	-0.6572	-0.3920	-0.2871	-0.3031
420	-1.0185	-0.9085	-0.7542	-0.6615	-0.3945	-0.2889	-0.3051
480	-1.0242	-0.9136	-0.7584	-0.6652	-0.3968	-0.2906	-0.3068
540	-1.0292	-0.9181	-0.7621	-0.6686	-0.3987	-0.2920	-0.3083
600	-1.0338	-0.9221	-0.7655	-0.6714	-0.4005	-0.2933	-0.3097
720	-1.0416	-0.9291	-0.7713	-0.6765	-0.4035	-0.2955	-0.3120
900	-1.0511	-0.9376	-0.7783	-0.6827	-0.4072	-0.2982	-0.3149
1200	-1.0635	-0.9486	-0.7875	-0.6907	-0.4120	-0.3017	-0.3186

と同じ方法で測定した値を表 3.8 に示す。地山荷重載荷後 5 秒及び 1200 秒経過したとき写真撮影したものをそれぞれ写真 3.6 及び写真 3.7 に示す。ところで実際のトンネルでは地山荷重がかかっている状態でトンネルを掘削して変形が生ずる。故に模型実験の変形量に対してつぎの補正をなすべきである。写真 3.7 のトンネル円孔周辺の網目の変形をみると、トンネル円孔下部は相対的に上方に変形している。この補正のし方はトンネル模型円孔より遠く離れた所では荷重をかければ下方に圧縮される。この圧縮後の位置が実際の地山のその点の位置を示しているから、逆にこの圧縮量だけ上方に測定変形量に加算すべきである。この量を  $\delta$  としてこの値としては近似的にトンネル下盤中央直下の水平線が相対的に上方に彎曲した量をとることとする。この  $\delta$  の測定値は表 3.9 に示すように時間の経過によらない変化しているが、時間が無限大となったときの  $\delta$  の値をとるべきであるから、この表より近似的に  $\delta = 0.4449 \text{ cm}$  とすることとする。本編第 1 章第 5 節と同様にトンネル模型円孔縁の変形量の測定値に  $\delta$  の補正値を加算したものがトンネル模型実験における円孔縁の真の変形量の測定値であって表 3.11 に示す。なお  $\delta$  の補正値を表 3.10 に示す。表 3.6 及び表 3.7 及び表 3.11 を図示したものが第 3.8 図 (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g) である。トンネル円孔縁の変形量の計算値と実測値とを比較する。

## 実験の考察

表～ 3.8 トンネル円孔縁の変形量測定値  $u_r$  (単位 cm)

(負の符号はトンネル中心に向う変形量を示す)

$t(\text{sec}) \backslash \theta$	$180^\circ$	$150^\circ$	$120^\circ$	$90^\circ$	$60^\circ$	$30^\circ$	$0$	$-30^\circ$	$-60^\circ$	$-90^\circ$	$-120^\circ$	$-150^\circ$
5"	-0.2237	-0.5817	-0.9560	-1.1227	-0.9844	-0.6102	-0.2360	-0.0610	-0.0040	0	-0.0528	-0.1139
10"	-0.2381	-0.5764	-0.9596	-1.1550	-0.9880	-0.6229	-0.2177	-0.0587	-0.0100	+0.0020	-0.0509	-0.1159
20"	-0.2431	-0.5724	-0.9548	-1.1781	-1.0033	-0.6234	-0.2184	-0.0562	-0.0418	+0.0293	-0.0601	-0.1170
30"	-0.2259	-0.5764	-0.9677	-1.2039	-1.0002	-0.6537	-0.2095	-0.0628	-0.0466	+0.0346	-0.0835	-0.1159
40"	-0.2381	-0.5927	-0.9718	-1.2040	-1.0043	-0.6537	-0.2421	-0.0628	-0.0426	+0.0631	-0.0754	-0.1282
50"	-0.2473	-0.6089	-0.9728	-1.2094	-1.0134	-0.6536	-0.2410	-0.0653	-0.0453	+0.0604	-0.0785	-0.1311
60"	-0.2550	-0.6098	-0.9810	-1.2458	-1.0297	-0.6543	-0.2223	-0.0633	-0.0268	+0.0626	-0.0801	-0.1328
90"	-0.2550	-0.6137	-0.9973	-1.2458	-1.0705	-0.6543	-0.2346	-0.0714	-0.0472	+0.0626	-0.0842	-0.1328
120"	-0.2584	-0.6171	-1.0003	-1.2446	-1.0695	-0.6944	-0.2381	-0.0709	-0.0467	+0.0672	-0.0835	-0.1363
300"	-0.2550	-0.6424	-1.0299	-1.2539	-1.1072	-0.6752	-0.2550	-0.0755	-0.0472	+0.0666	-0.0841	-0.1491
600"	-0.2625	-0.6456	-1.0329	-1.2569	-1.1102	-0.7026	-0.2544	-0.0755	-0.0467	+0.0672	-0.0835	-0.1567
1200"	-0.2625	-0.7190	-1.0594	-1.2935	-1.1509	-0.7637	-0.2544	-0.0832	-0.0141	+0.0672	-0.0835	-0.1567

表～ 3.9  $\delta$  の時間的变化 (単位 cm)

経過時間 (sec)	5	10	20	30	40	50
$\delta$	0.3238	0.3238	0.3922	0.4360	0.4360	0.4360
経過時間 (sec)	60	70	120	300	600	1200
$\delta$	0.4448	0.4448	0.4646	0.4437	0.4647	0.4646

表～ 3.10 補正値 (単位 cm)

$\theta$	$\delta \sin \theta$	$\theta$	$\delta \sin \theta$	$\theta$	$\delta \sin \theta$
$180^\circ$	0	$60^\circ$	+0.3853	$-60^\circ$	-0.3853
$150^\circ$	+0.2224	$30^\circ$	+0.2224	$-90^\circ$	-0.4449
$120^\circ$	+0.3853	$0^\circ$	0	$-120^\circ$	-0.3853
$90^\circ$	+0.4449	$-30^\circ$	-0.2224	$-180^\circ$	-0.2224



表 3.1/1 測定値より補正された実際のトンネル円孔縁変形量 $U_r$

(単位 cm, 負の符号はトンネル中心に向う変形量を示す)

$\theta$ $t(sec)$	$180^\circ$	$150^\circ$	$120^\circ$	$90^\circ$	$60^\circ$	$30^\circ$	$0^\circ$	$-30^\circ$	$-60^\circ$	$-90^\circ$	$-120^\circ$	$-150^\circ$
5	-0.2237	-0.3573	-0.5708	-0.6778	-0.5971	-0.3878	-0.2360	-0.2834	-0.3893	-0.4447	-0.4381	-0.3363
10	-0.2381	-0.3540	-0.5744	-0.7101	-0.6027	-0.4005	-0.2177	-0.2811	-0.3753	-0.4427	-0.4363	-0.3383
20	-0.2431	-0.3500	-0.5674	-0.7332	-0.6180	-0.4010	-0.2184	-0.2786	-0.4271	-0.4156	-0.4454	-0.3394
30	-0.2259	-0.3540	-0.5825	-0.7590	-0.6149	-0.4313	-0.2095	-0.2852	-0.4319	-0.4053	-0.4688	-0.3383
40	-0.2381	-0.3703	-0.5866	-0.7571	-0.6190	-0.4313	-0.2421	-0.2852	-0.4279	-0.3818	-0.4607	-0.3506
50	-0.2493	-0.3865	-0.5876	-0.7645	-0.6281	-0.4313	-0.2410	-0.2877	-0.4306	-0.3845	-0.4638	-0.3535
60	-0.2550	-0.3874	-0.5958	-0.7809	-0.6444	-0.4319	-0.2223	-0.2857	-0.4412	-0.3821	-0.4654	-0.3552
90	-0.2550	-0.3913	-0.6162	-0.7899	-0.6852	-0.4319	-0.2346	-0.2938	-0.4325	-0.3821	-0.4675	-0.3552
120	-0.2584	-0.3941	-0.6151	-0.7997	-0.6842	-0.4720	-0.2381	-0.2933	-0.4320	-0.3770	-0.4688	-0.3587
300	-0.2550	-0.4195	-0.6447	-0.8090	-0.7219	-0.4728	-0.2550	-0.2979	-0.4325	-0.3783	-0.4674	-0.3715
600	-0.2625	-0.4427	-0.6477	-0.8120	-0.7249	-0.4820	-0.2544	-0.2975	-0.4320	-0.3777	-0.4688	-0.3791
1200	-0.2625	-0.4444	-0.6722	-0.8486	-0.7658	-0.5413	-0.2544	-0.3056	-0.3994	-0.3777	-0.4688	-0.3791

トンネル模型実験のトンネル円孔縁の変形量 $U_r$ の測定値と、この模型実験箱の境界条件を考慮したトンネル円孔縁の変形量 $U_r$ の計算値とを比較してみると、 $\theta = 0^\circ$ から $\theta = 90^\circ$ までは計算値の方が大きな値となっている。これは前章の場合の模型実験では $70 \times 60 \text{ cm}$ の前面の硬質ガラス板の厚さ $10 \text{ mm}$ のを用いたとき、ガラス板中央において地山荷重載荷中に約 $1 \text{ mm}$ の撓みを主にしたが、今回の実験においては板の厚さ $20 \text{ mm}$ の硬質ガラスを使用したため板の撓みは殆んどなかった。このため $70 \times 60 \text{ cm}$ の前面、後面と地山用の上との摩擦が相当大きく作用していると考えられ、このために計算値が実測値より大となったと考えられる。 $\theta = 90^\circ$ 、 $\theta = 60^\circ$ 、 $\theta = 30^\circ$ の場合の計算値と実測値との差異の程度は、第3、8図に示される程度のものであるならば大拘形挙動の理論の妥当性を示していると考えられる。 $\theta = 0^\circ$ の場合は実測値は計算値の半分位となっている。これはトンネル模型箱の $70 \times 10 \text{ cm}$ の傾り方の壁面と上との摩擦が大きくて、この壁面付近の上部の土が下に圧縮され、これに伴い $\theta = 0^\circ$ のトンネル側壁中央に向い押し出す力が減少したものと考えられる。 $\theta = -30^\circ$ では計算値と実測値とは殆んど一致して居り、 $\theta = -60^\circ$ 、 $\theta = -90^\circ$ では逆に実測値が計算値より大となっている。 $\theta = -90^\circ$ のトンネル下盤中央では前者とに比較的近似した値となっている。しかしトンネル模型箱の境界条件を考慮しないときの計算値の約2分の1が実測値となっている。いずれの $\theta$ の場合でも変形量の経時的変化は理論による計算値と実測値とは同様な傾向をもっていることがわかる。すなわち何れの場合でも変形量 $U_r$ はトンネル掘削直後は急激に増加してゆくが、ある時間(この場合は約 $50 \text{ sec}$ )経過後は徐々に変形量 $U_r$ が進行していることを示している。ただ $\theta = -90^\circ$ の場合の $U_r$ の実測値の変化は地山荷重載荷直後液状土形成した曲線によって示されるような変形挙動を示しているのは特異な現象とらる。

前述のトンネル模型実験において地山が粘弾性状態にあるかどうかを調べるためクリープ試験によって上限降伏値を求めた。これは第1編第3章第3節に述べたものと同一であって、上限降伏値 $\sigma_u = 0.522 \text{ kg/cm}^2$ である。これに対してトンネル模型実験の地山荷重強度は $P = 0.288 \text{ kg/cm}^2$ であって、上限降伏値よりはるかに小さいため上の粘弾性状態で実験をなしたことになる。トンネル円孔周縁上の接線方向の応力を調べると、(2, 1, 42)式より $(\sigma_\theta)_e$ を求めれば $\gamma = P = 0.288 \text{ cm}$ として、

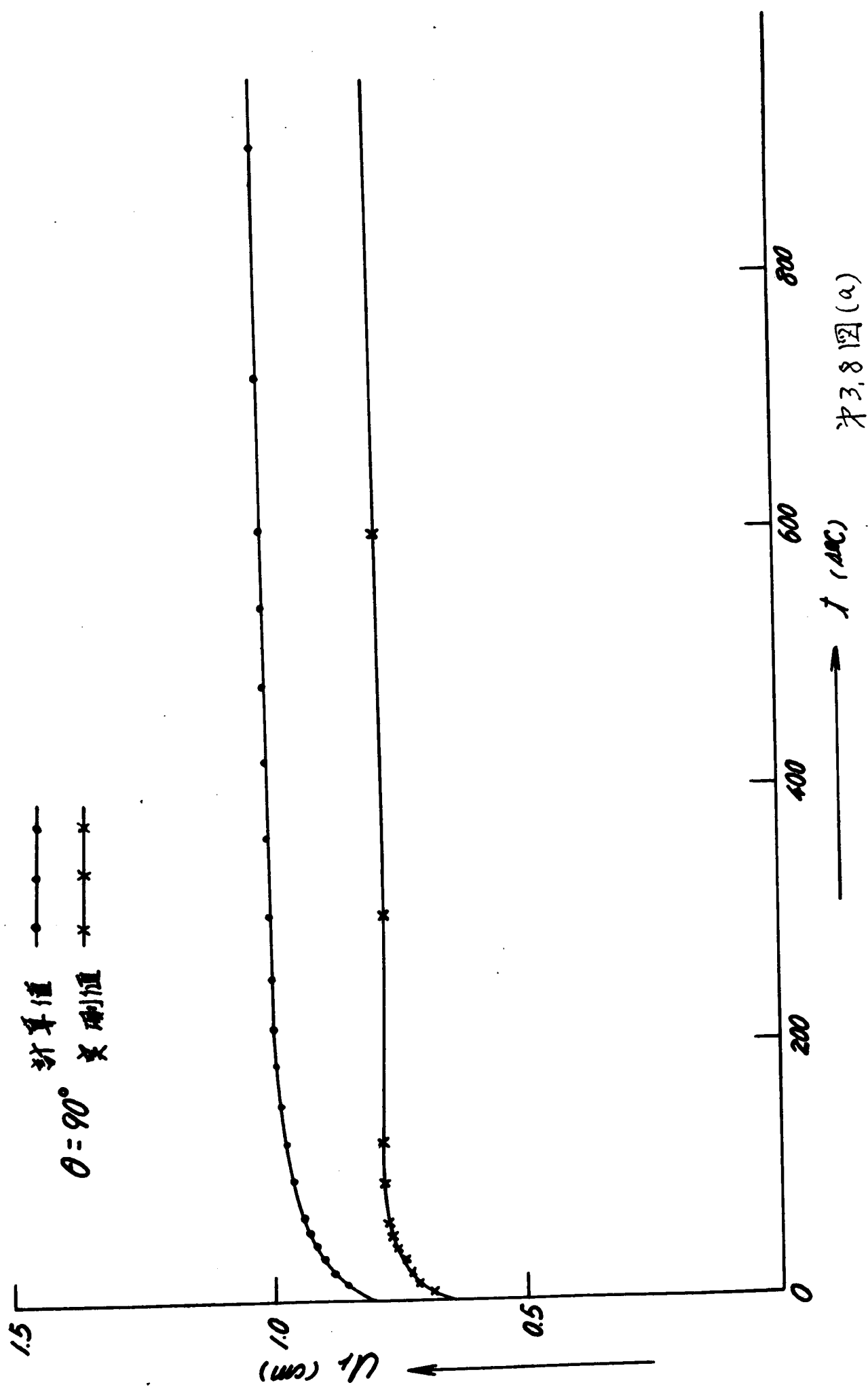
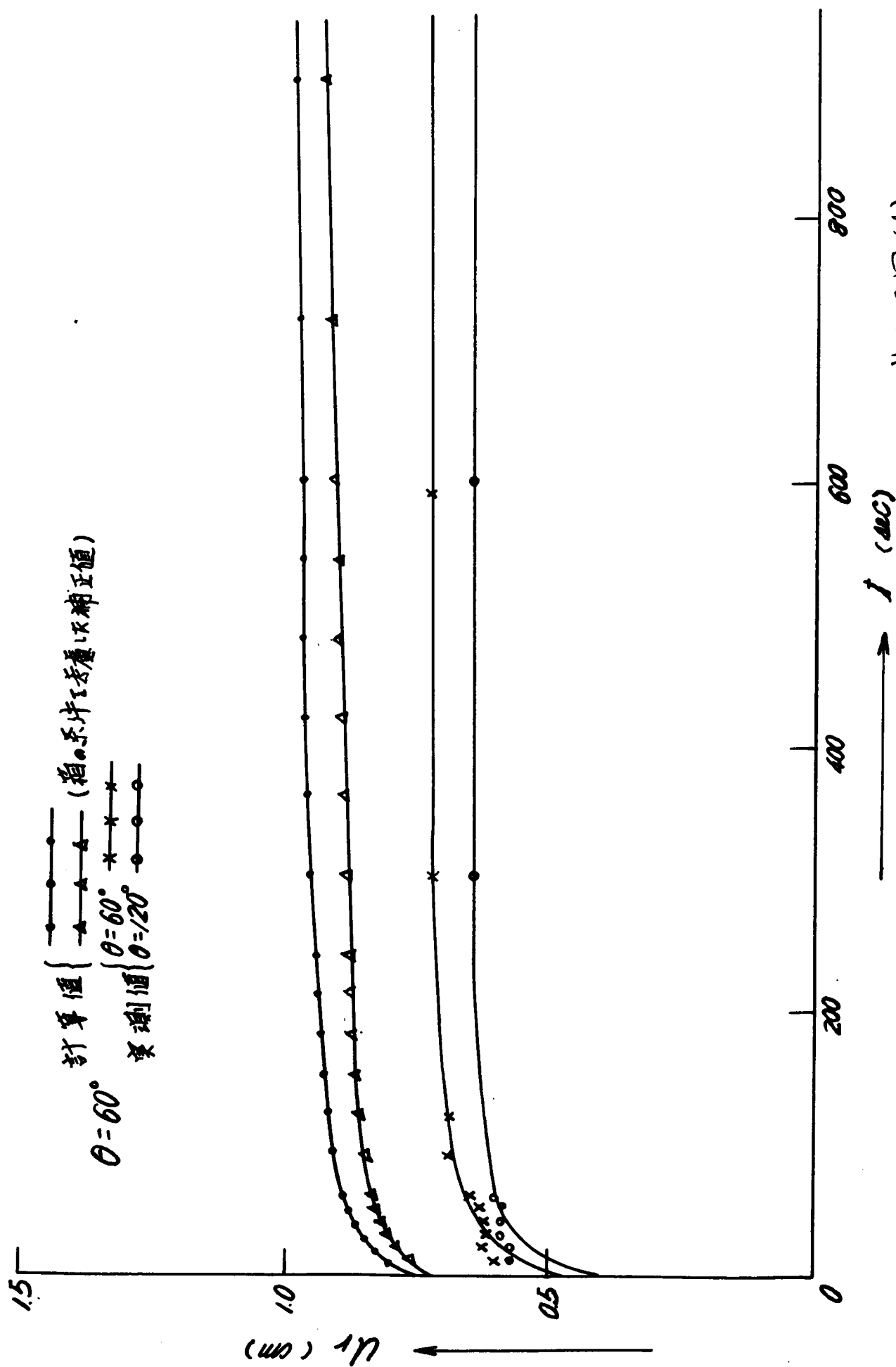


图 3.8 (a)



第 3, 8 图 (G)

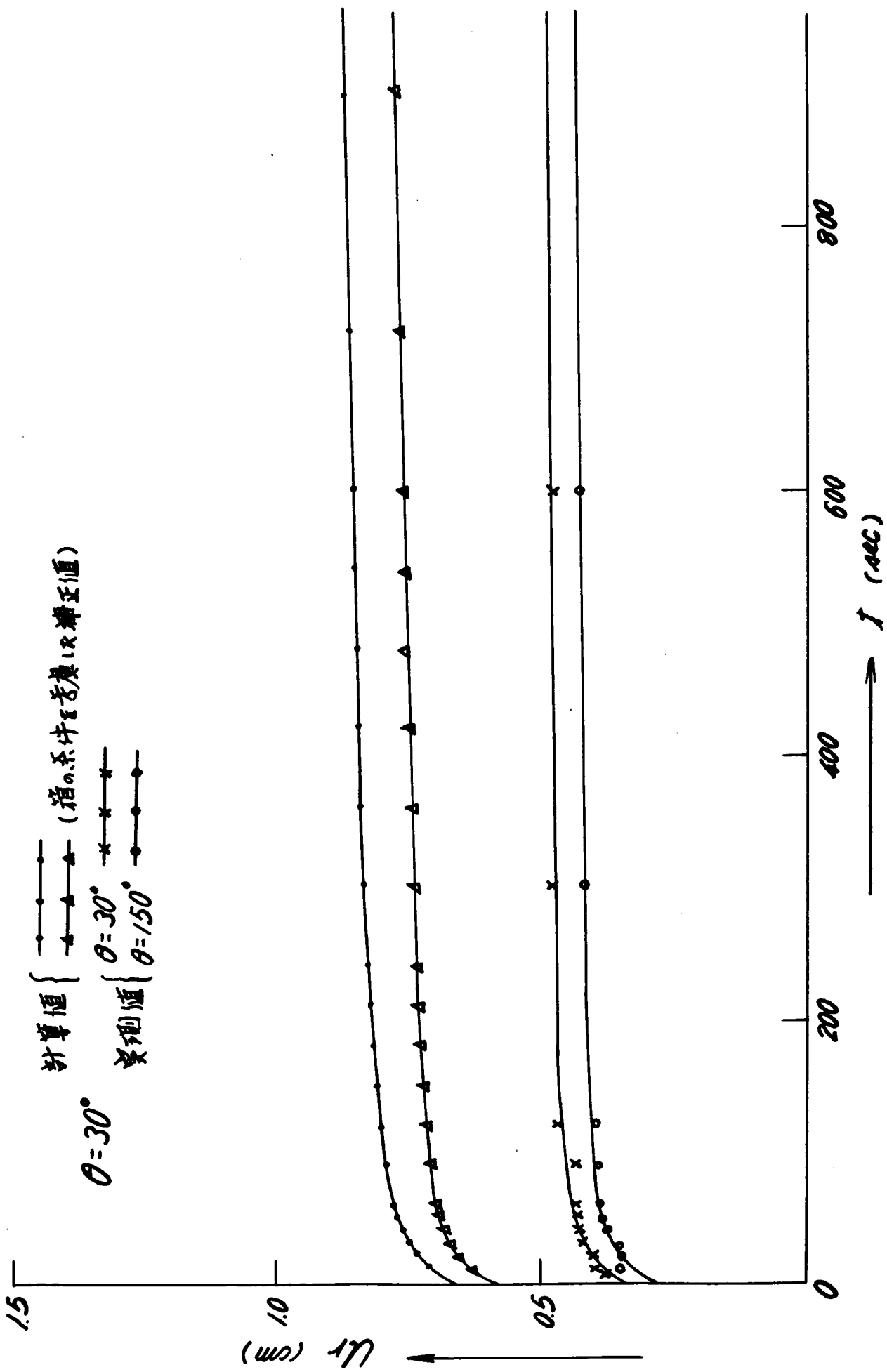
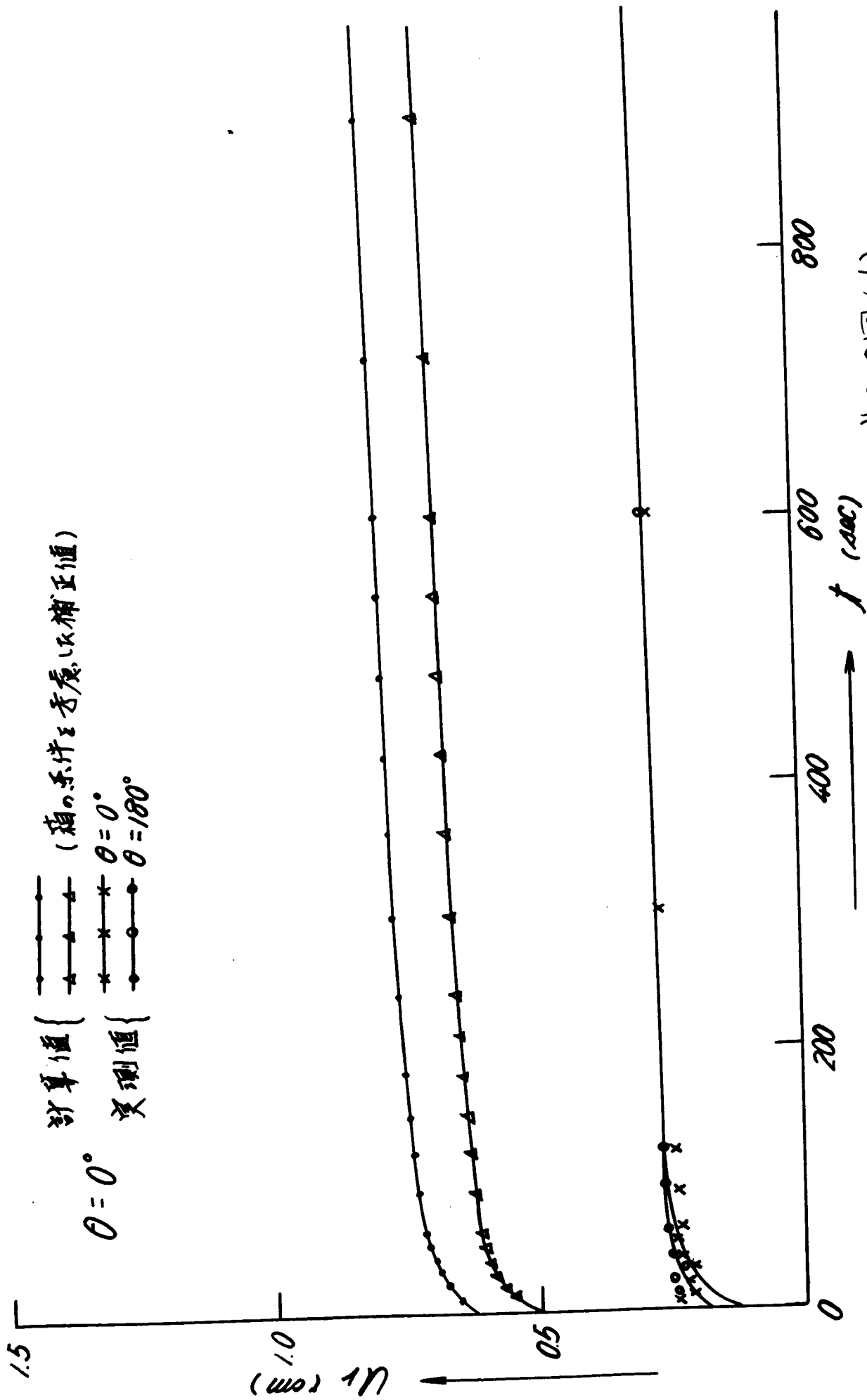
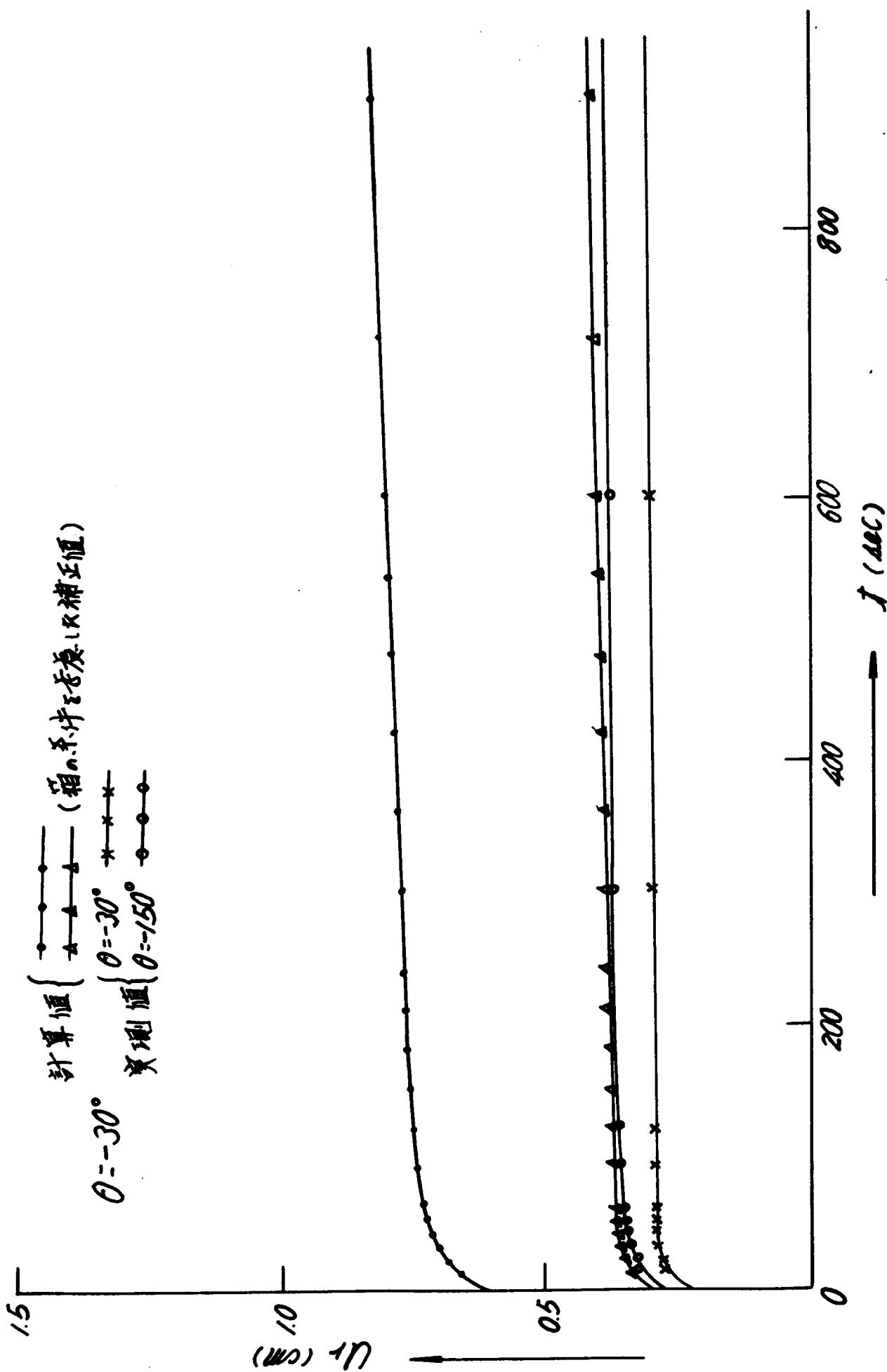


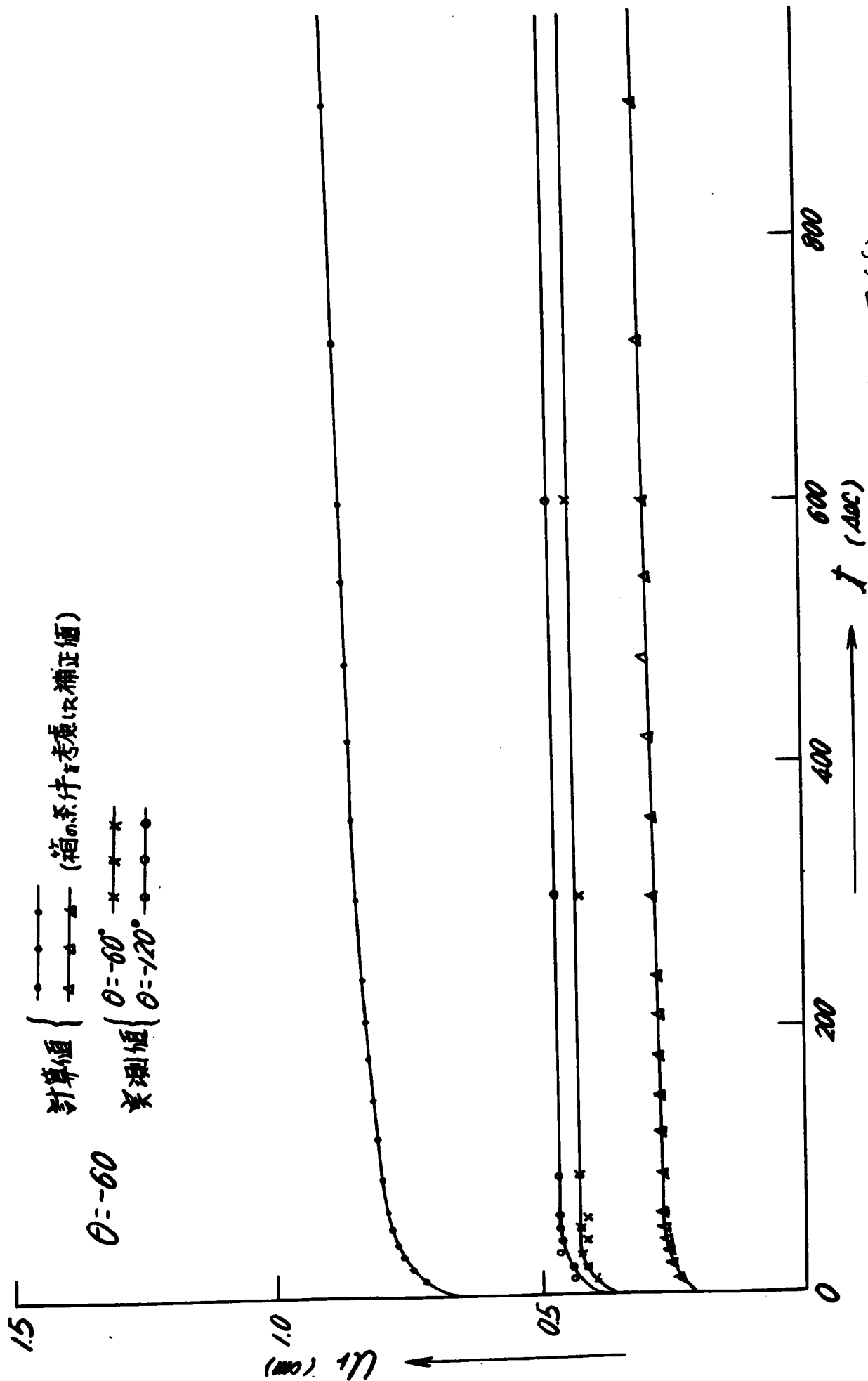
Fig. 3.8



※ 3, 8 図 (d)



※3, 8図(e)



才3,8図(f)

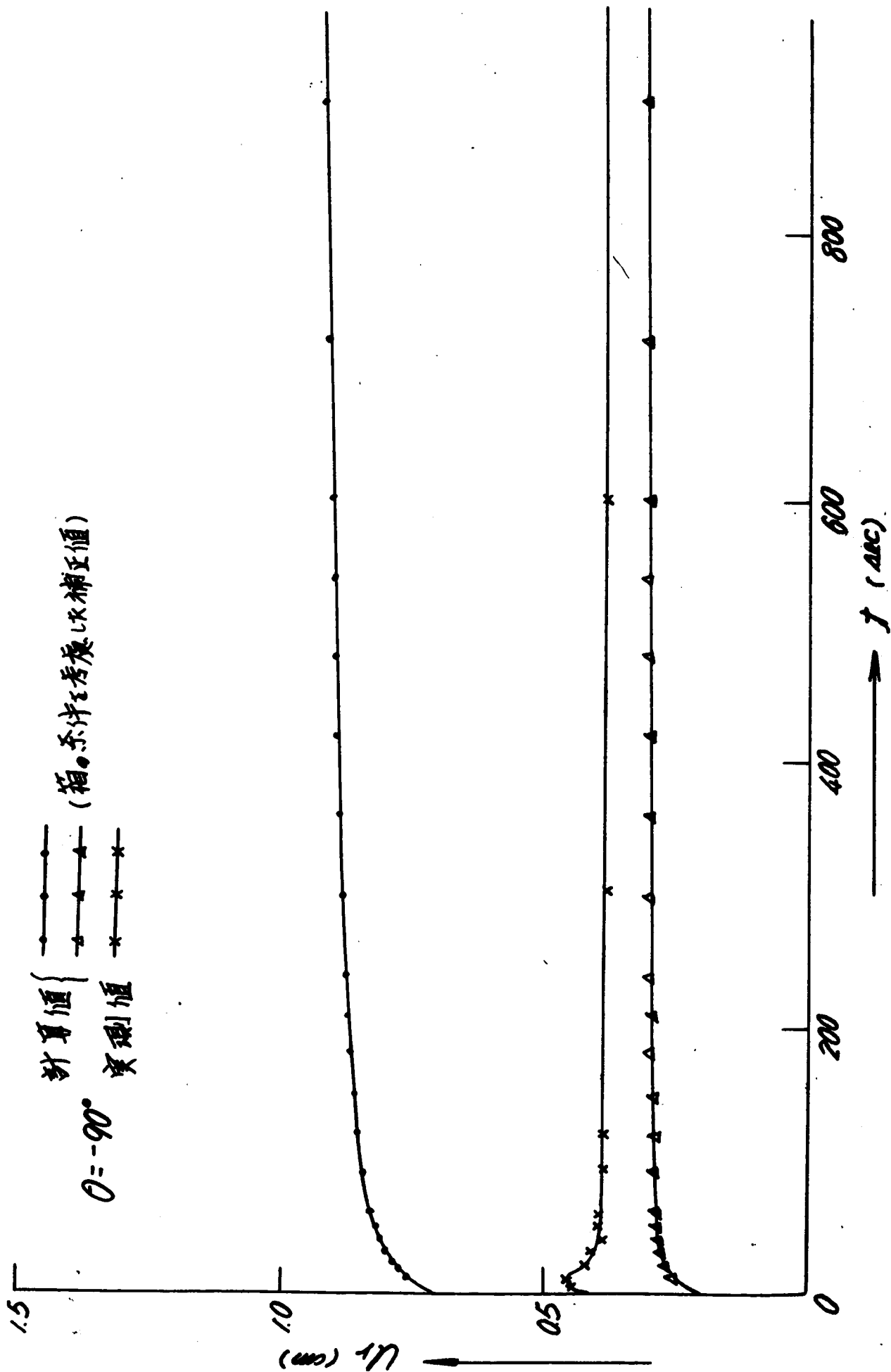


表 3, 8 図 (9)



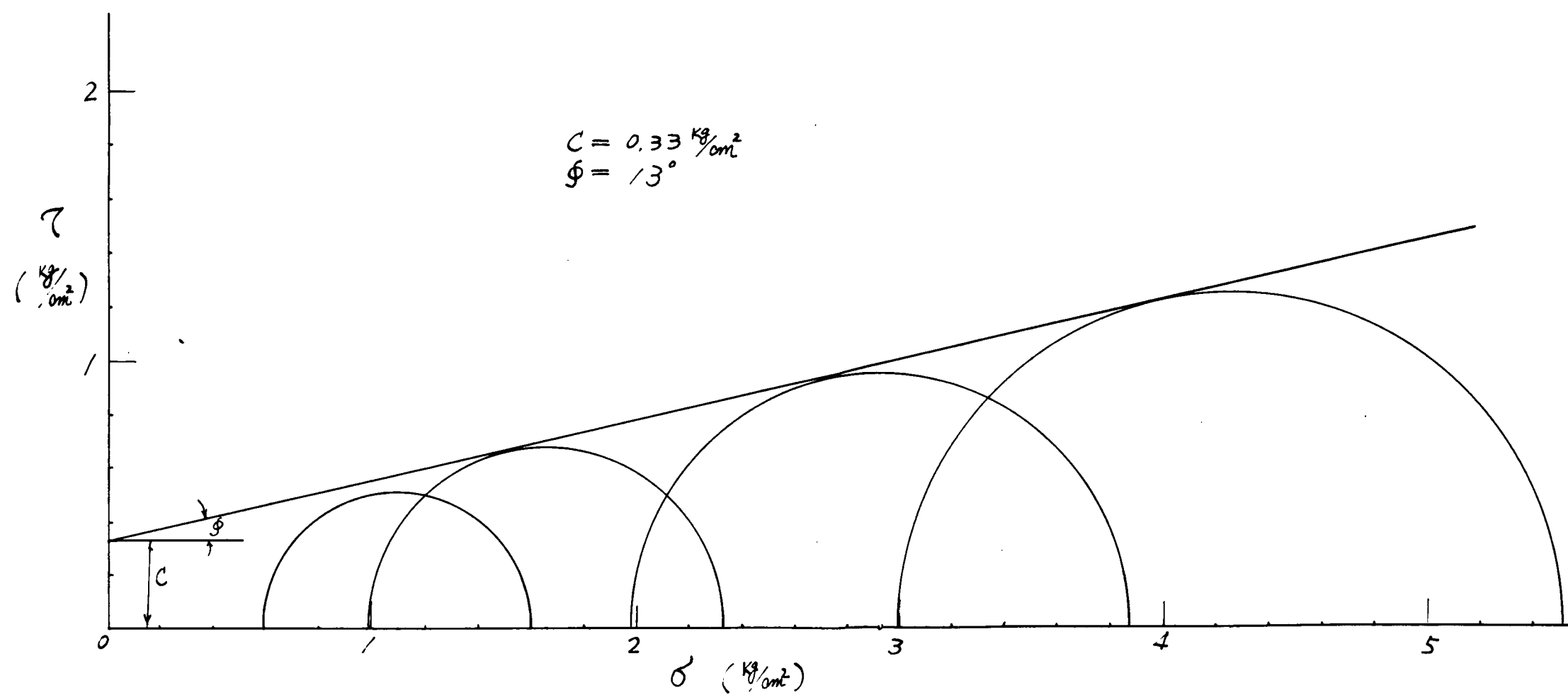


图 3.9

Age Group	Gender	U.S. should take action (%)	U.S. should not take action (%)
18-29	Male	~65	~35
	Female	~75	~25
30-49	Male	~70	~30
	Female	~80	~20
50-69	Male	~75	~25
	Female	~85	~15
70+	Male	~80	~20
	Female	~90	~10

$$\theta = 90^\circ \text{ のとき} \quad (\sigma_\theta)_{el.} = -0.5666 \text{ kg/cm}^2$$

$$\theta = 0^\circ \text{ のとき} \quad (\sigma_\theta)_{el.} = -0.7163 \text{ kg/cm}^2$$

$$\theta = -90^\circ \text{ のとき} \quad (\sigma_\theta)_{el.} = -0.5932 \text{ kg/cm}^2$$

であって、負の符号は圧縮応力を示す。またかりにこのトンネル円孔の応力状態が大なる地山圧力のため、塑性状態にあるとすれば、そのときの $\sigma_\theta$ を $(\sigma_\theta)_{pl}$ とする。ヒズミ制御式三軸圧縮試験結果を第3.9図に示す。これより粘着力 $C = 0.33 \text{ kg/cm}^2$ 、内部摩擦角 $\varphi = 13^\circ$ となり、

$$(\sigma_\theta)_{pl.} = 2C \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = 0.830 \text{ kg/cm}^2$$

の圧縮応力となる。故に $|(\sigma_\theta)_{el.}| < |(\sigma_\theta)_{pl}|$ よりトンネル模型実験を行った載荷状態は地山のより一般化した粘弾性体とみなされる土の応力状態にあることを示している。

### 第3節 結 語

本実験においてはせん断弾性係数 $\nu$ とrheology的常数 $\alpha$ 、 $\beta$ の決定は第1編第2章第3節に述べたように数多くの載荷重を変えたクリープ試験を行ったものより検討を加えて求めている故に、前章の場合に比較してよい結果がえられていると考えられる。

また理論式(2.3.29)式をもととして第3.7図に示す鏡像をとって、トンネル模型実験箱の境界条件を満たすような計算法によって求めたトンネル円孔縁上の $u_r$ の変形量と

トンネル模型実験により求めた $u_r$ の実測値と比較してある差異は生じてはいるが、その経時的变化の傾向については表〜3.7及び表〜3.11よりみれば時間50 secまでは急激に $u_r$ は増加し、それ以後は $u_r$ は徐々にではあるが増加している傾向がみられる。このことは地山をより一般化した粘弾性体とみなしたときのトンネル円孔周辺の変形挙動の理論式(2.3.29)式がよりよくトンネルの変形挙動を説明すると考えられる。緒論第2章で述べたようにトンネル地圧の甚だしい所で地圧が測定され、相当長期間にわたり土圧が徐々に増加している結果がみられるが、このような変形挙動の原因によって、この長期間にわたる土圧増加を生じる力ではないかと考えられるのである。

### 第3章 摩擦性塑性体としての水平層を有する 地山中のトンネル周辺応力及び圧り線 に関する模型実験<sup>(a)</sup>

#### 第1節 実験装置及び実験方法

水平な地表面を有する弾性体の地山中に摩擦性塑性体とみなされる水平層が存在する場合、この摩擦性塑性体の層の中にトンネルを掘削すれば、摩擦性塑性体の物質はトンネル中心方向に塑性流動を起す。このとき圧り線及び応力分布に関する理論的考察は第2編第6章において行ったのであるが、この理論を検証するために次のような実験装置によって圧り線の観測及び弾性体地山と摩擦性塑性体としての水平層の境界における鉛直方向直応力を測定して、理論より求めたこの応力と比較して理論の妥当性を調べんとしたのである。

この模型実験装置としては、写真3.6に示すような模型実験箱を作り、この模型実験箱を立てた下部の摩擦性塑性体としての水平層の地山の上を写真3.10(a)図に示すように高さ $h=200$ 、長さ $32\text{ cm}$ 、奥行き $5\text{ cm}$ のものとして箱につめる。左側の自由面 $2\times 5\text{ cm}$ はこの摩擦性塑性体の水平層の高さ全部トンネル側壁となったものとし、右側は無限に存在しているべきであるが、実験箱の寸法に制約されてトンネル側壁より長さ $32\text{ cm}$ までとして、この水平層の右端は実験箱の岸に接している。この摩擦性塑性体の水平層の上部より地山の自重により鉛直圧力が等分布で作用し、これに応じてこの水平層が左のトンネル側壁の自由面に向かって流動するとき、水平層より上の地山の沈下がこの流動に応じてくるように写真3.10(a)図に示すような水平層地山の上の載荷装置を作った。この等分布鉛直圧力は一辺 $4\text{ cm}$ の正三角形のブロック8ヶによって水平層につたえられるのである。前この三角形ブロックが沈下と共に勝手な回転運動をおこさないように、このブロックの下にグリキ板を引いている。また水平層と上下の地山の境界において充分摩擦が作用するように6の番サンドペーパーを挿入している。

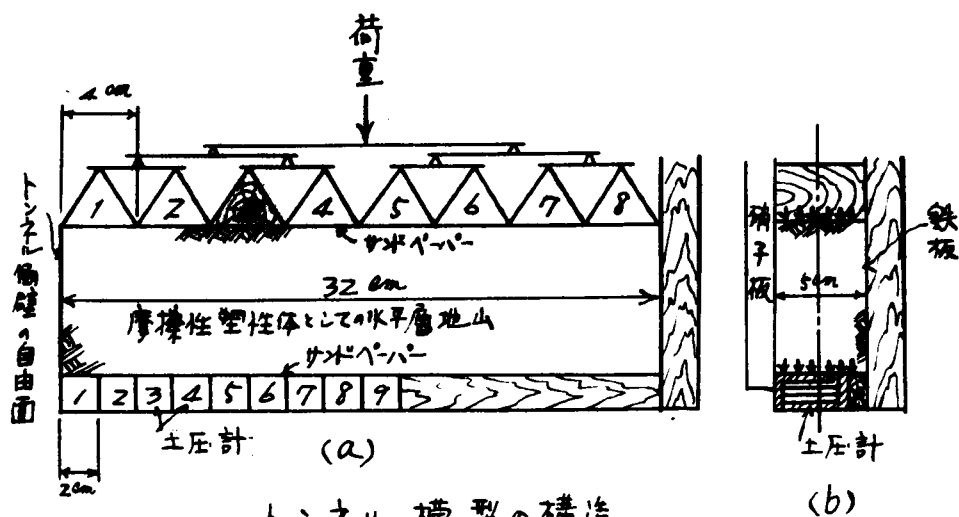
摩擦性塑性体としての水平層の下面にはトンネル側壁近傍の水平層と下部弾性地山との境界の鉛直圧力 $\sigma_y$ を測定するために土圧計をタケ挿入して居り、土圧計の一ヶの長さは $2\text{ cm}$ である。故にトンネル側壁より $10\text{ cm}$ の距離まで土圧計が存在し、それより右方は土圧計と高さの等しい木片によって下方の地山を代表させている。この模型実験箱の前面は圧り線の観察のためガラス板をあて、これを写真3.6に示すようにアングルの鋼材をあてて両端を万力で模型実験箱と固結している。上部の載荷装置の2ヶの三角形ブロックに等分布圧力を作用させるには写真3.10(a)図に示すような装置で上部に集中荷重をかける。この集中荷重は写真3.6に示すようにLever比 $1/2$ の下懸吊式によってかけるようにしてある。

つぎに圧力計はその形、大きさは写真3.11図に示してあるようにL形受圧板が二枚の厚さ $1/16$ の焼青銅板によって片持梁式にL形固定ブロックに支えられている。受圧板、固定ブロックは真鍮製である。上下二枚の焼青銅板には写真3.11(b)図に示すように、上の焼青銅板の下面、下の焼青銅板の上面にSR一々電気抵抗線式歪計をはりつけた。このSR一々歪計は美和無線研究所製K-12で、ゲージ長 $3\text{ mm}$ 、ゲージ率 $166$ 、電気抵抗 $120\Omega$ のものを用いた。この歪計の測定には新興通信工業KKのPS7一々のインデータを用いた。このようにして製作した土圧計を模型実験箱に設置する位置は写真3.10(a)、(b)図に示している。なお土圧計をならべたものを写真3.12に示し、土圧計一ヶを分解したものを写真3.10に示す。

摩擦性塑性体としての水平層を形成するには模型実験箱を横倒にして、写真3.10図に示す土圧計の入る位置に土圧計を入れ、トンネル側壁及びこの水平層上面を形成する型枠をあてて、この中に次に述べる土を段階に述べる含水比にしてつめる。つめる要領は $5\text{ cm}$ の深さを三層にわけて



写真～3.8



トンネル模型の構造  
(a) トンネル断面 (正面図)  
(b) 側面

第3.10図

第 3.10



写真～3.9



写真～3.10



つめ、一層毎に軟粘リモルタル供試体作成用定棒で一ヶ所5回にならうにして充分つめて水平層を形成した。その表面をゴテにて仕上げて写真 ～ 3.11 に示すようにヒリ線を観察するため、表面にヘクト版インキで直径1cmの円を列べたものを印刷した。このようにして形成された摩擦性塑性体としての水平層の上面に地山荷重がかかる載荷装置を設置し、ガラス板をアングル鋼材で固結した模型実験箱を写真 ～ 3.12 のように直立して、下部懸吊式の載荷装置のLeverに重錘を段階的に増大しながら載せる。そのときの圧力計の読みをインゲータによって測定すると同時に、ヒリ線観察のためにヘクト版インキで印刷した円の変形状態を写真撮影した。

つぎに以上の実験終了後同じ条件で模型実験箱に土をつめて、この土の試料より不攪乱土を採取して一面せん断試験及び単軸圧縮試験を行った。実験に使用した土は徳島市大海子奥の谷の土で、その物理的性質は真比重2.779、L.L. 75%、P.L. 40.3%、P.I. 34.7%であり、粒度分析の結果砂分37.5%、シルト分44.5%、粘土分18.0%であって三角座標による分類は粘土である。この土の含水比を第1回実験には49.0%、第2回実験には52.5%として実験を行った。

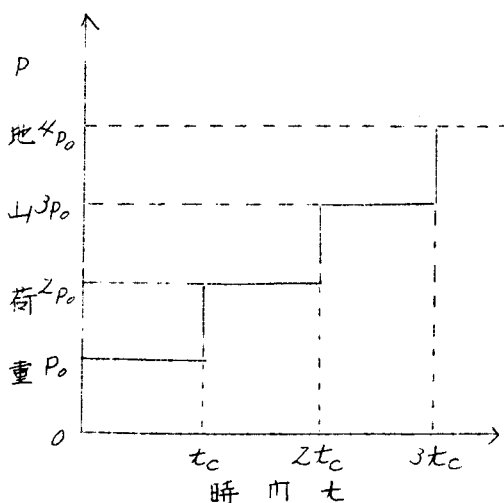
### 第2節 実験結果及びその考察

前節に述べた模型実験においてつめた土のせん断抵抗は単軸圧縮試験によって求めた。使用した土は粘土であるので内部摩擦角は殆んど零とみなされるので単軸圧縮強度 $\sigma_u$ を測定し、粘着力 $C = \frac{\sigma_u}{2}$ として求めた。これを表 ～ 3.12 に示す。

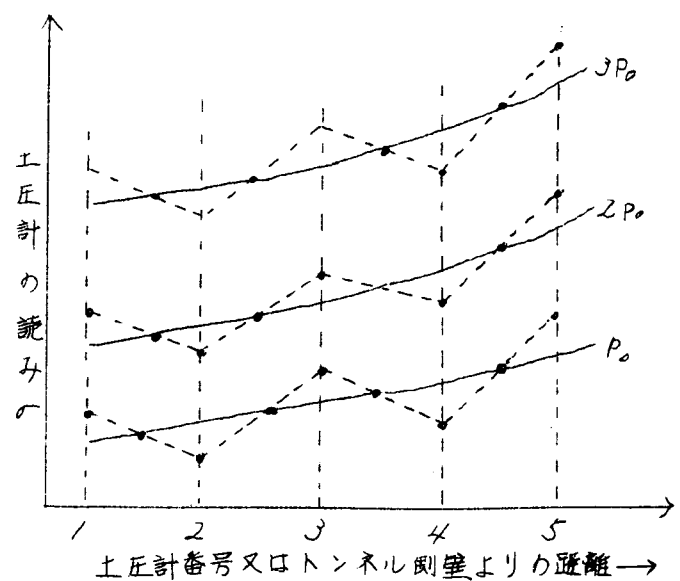
表 ～ 3.12 実験用試料土のせん断抵抗

実験番号	含水比 %	粘着力 $C$ $\frac{\sigma_u}{2}$
第1回実験	49.0	0.083
第2回実験	52.5	0.093

土圧計の検定は近似的な方法として土圧計の受圧板中央に集中荷重を段階的に載荷してインゲータの読みをとり、集中荷重を受圧板面積で除した値を圧力強度として、これとインゲータの測定値との相関性を調べたが、何れの土圧計も直線性があり、この検定曲線を用いてインゲータの測定値より摩擦性塑性体としての水平層と下の地山の境界における鉛直方向土圧 $\sigma$ を測定した。



第3.12図



第3.13図

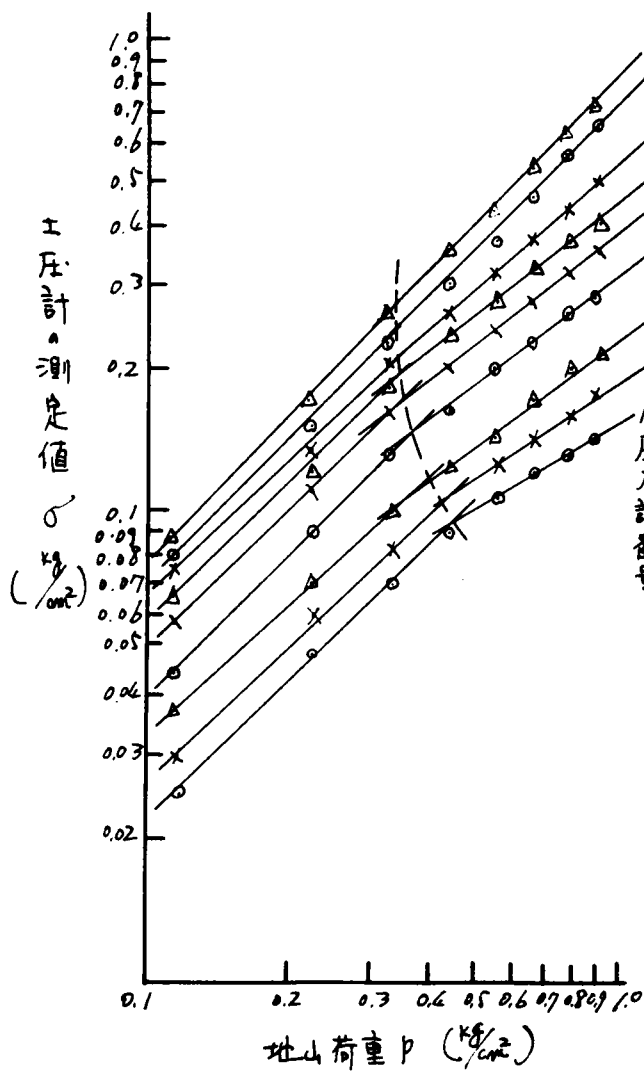
为 1 回实验

奥の谷粘土

(a)

含水比 49%

粘着力  $C = 0.083 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

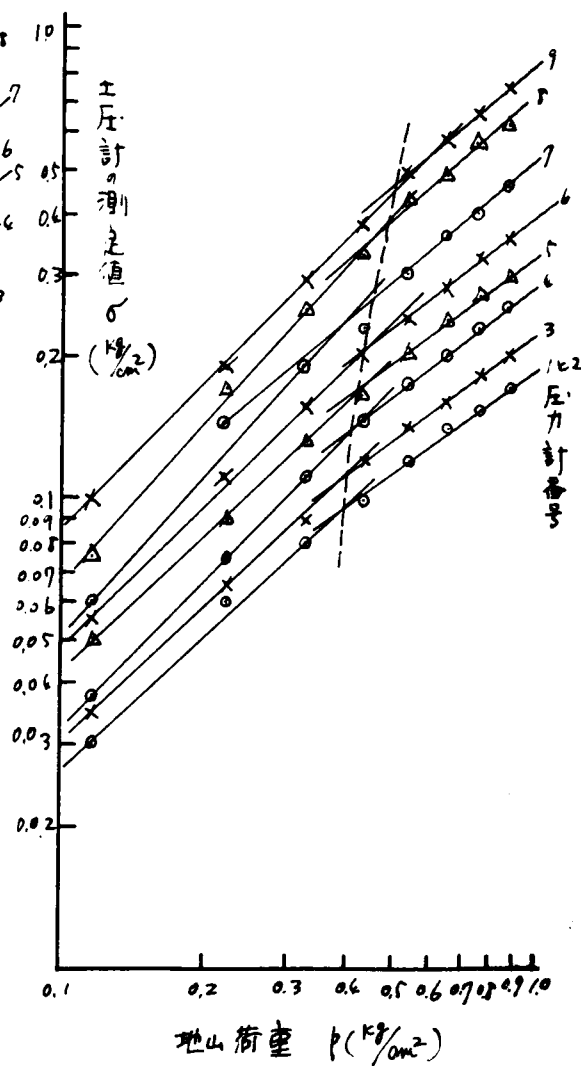


騷風回之

奥の谷粘土

(b)

含水比 52.5%

粘着力  $C = 0.093, \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ 

冲 3, 14 图



前節に述べたように摩擦性塑性体としての水平層の土をつめ載荷装置を設置して、硬型実験箱を立て下部懸吊式Lever によって地山荷重に該当する荷重をかける。この荷重のかけ方は、第3/2図に示すように荷重制御式に一定時間間隔毎に  $P = P_0, 2P_0, 3P_0, \dots$  と増加しゆく。このとき各土圧計の読みは第3/3図の点線に示す如く折線となる。これは載荷装置の正三角形ブロックが幾分回転運動をなすのに原因すると考えられるので、この各土圧計の読みを補正するのには第3/3図の各折線を構成する線分の中点を<sup>中点</sup>実験値を以て土圧計の読みを与える曲線とする。このようにして得られた土圧計の測定値と地山荷重  $P$  の値とを対数紙上にプロットして  $P = P_0, 2P_0, 3P_0, \dots$  のそれぞれに対応する相関曲線を求めたものが第4図、第5回実験に対するものとしてそれぞれ第3/4図の(a)及び(b)である。

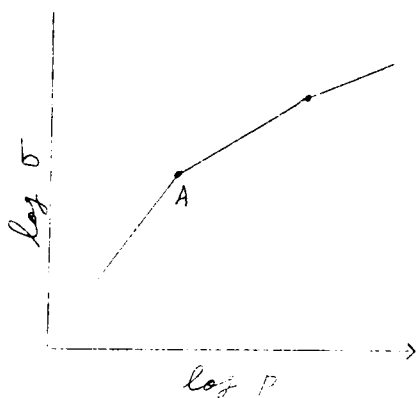
水平層をなす土が地山荷重をうけ塑性状態になるときは、土の中に発生する応力は上限降伏値に達する。この場合水平層中の地山土はトンネル側壁中心に向い、顕著な塑性流動をおこし、この場合の応力状態は第2編第6章に述べた塑性域内の応力状態とならから、土圧計の測定値  $\sigma$  と地山荷重  $P$  との間には一般に、

$$\sigma = C P^n \quad \text{----- (3.3.1)}$$

で表わされる関係があると考えられる。ただし  $C, n$  は常数である。上式の両辺の対数をとつて、

$$\log \sigma = \log C + n \log P \quad \text{----- (3.3.2)}$$

となり、初期の部分において  $n \approx 1$  の直線となるが、この部分をすぎると各点ごとに指数  $n$  の値がかわる。この関係はコンクリートやある種の金属にみられる応力とヒズミの関係と同様とみられ、しかもクリープ限、すなわち上限降伏値までは一直線で示されることが実験的に確かになっている。(1), (2) このことは第1編第2章第4節(4.2.3.3)式において述べた考えと同様にして、荷重制御の載荷試験を行つて  $\sigma \sim P$  関係を対数紙上にプロットすれば第3/5図のような折線がえられ、その折点  $A$  を求めれば、 $A$  点の  $\sigma$  の値がそれぞれの土圧計で測定される上限降伏値であつて、この値が塑性状態となつたときの  $\sigma_y$  の値となる。第3/4図の(a), (b)においてはそれぞれ第4回、第5回実験における各土圧計ごとに  $\log \sigma \sim \log P$  曲線を書いてその折点を求め、その点の土圧計測定値  $\sigma$  を  $\sigma_y$  として読みとり、この第4回、第5回実験の各土圧計番号に対する  $\sigma_y$  の測定値を普通目盛の方眼紙にプロットしてえられる曲線をそれぞれ第3/6図、第3/7図の鎖線の曲線として書く。この曲線がトンネル近傍における摩擦性塑性体としての水平層とその下の弾性地山との境界における  $\sigma_y$  の分布の硬型実験における測定値となるのである。



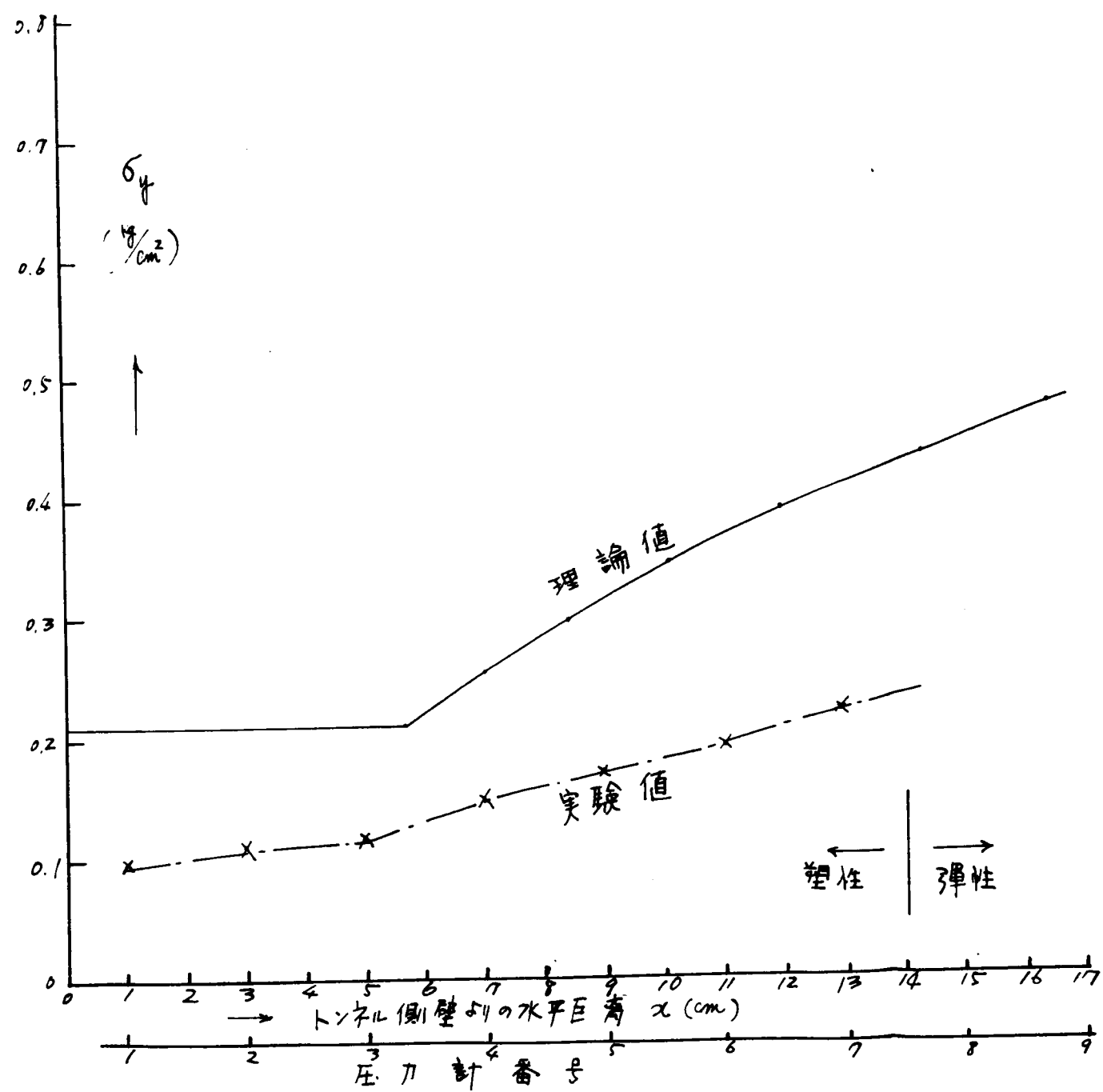
第3/5図

つぎに  $\sigma_y$  の理論値を求めらるには第2編第6章に述べた方法によるのであるが、第3/5図に示す降伏条件は本章の実験に用いた土においては第3/5図に該当するものは第3/8図のようになる。ここに  $C$  は粘着力である。すなわちセールの応力円は第3/8図において  $\sigma$  と平行で、間隔  $C$  なる限界線に切する降伏条件となる。このとき降伏条件式としては、

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4C^2 \quad \text{----- (3.3.3)}$$

が成立する故に、このときの第2編第6章に述べた理論は已に  $R, H // (3)$  によって説明されているものとなる。本章の実験に用いた土の粘着力  $C$  の値は表3/2に示されたものであり、摩擦性塑性体としての水平層の高さは  $8\text{cm}$  である。この数値を上述の理論に用いて  $\sigma_y$  の値と

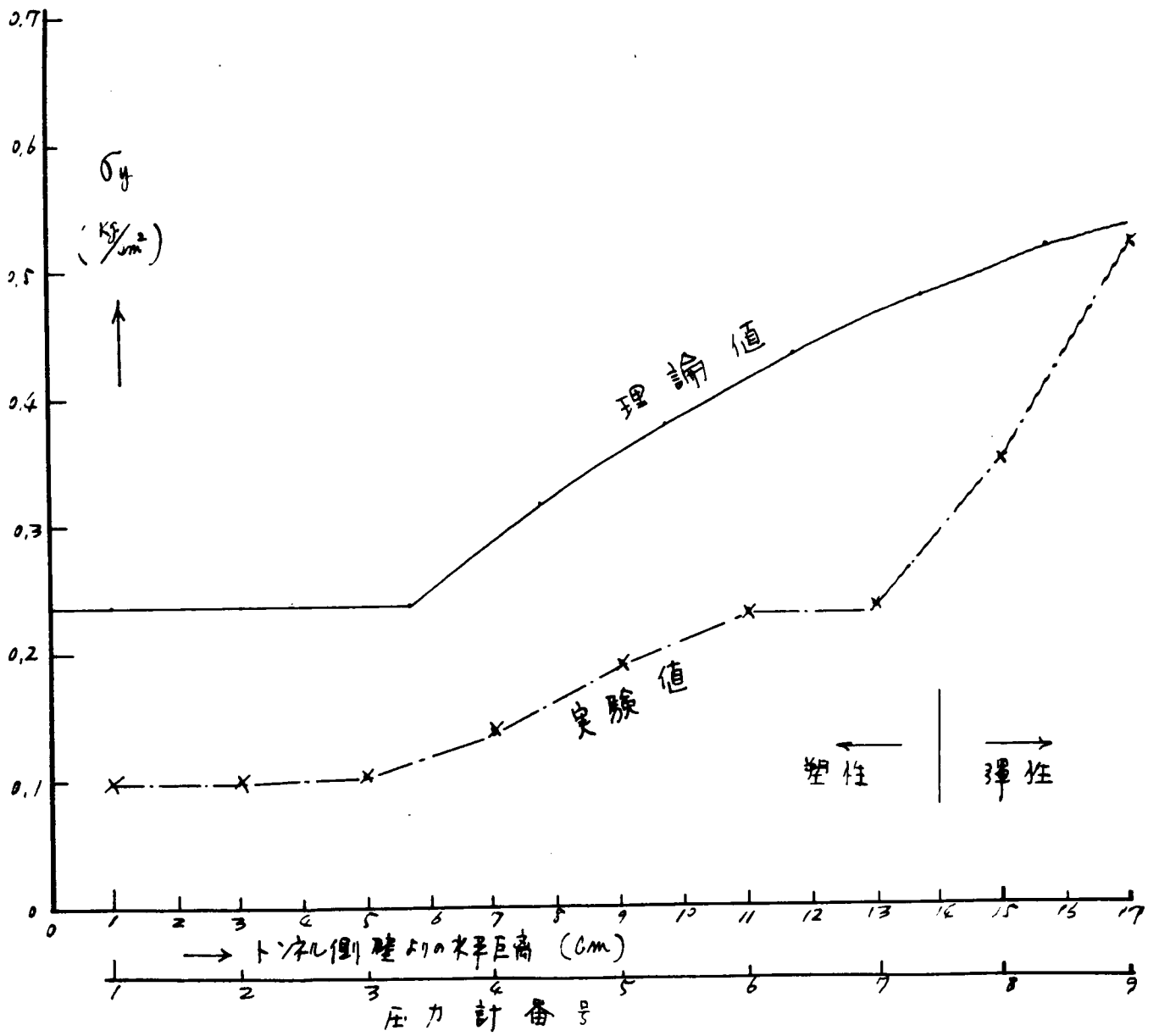
# 第1回実験



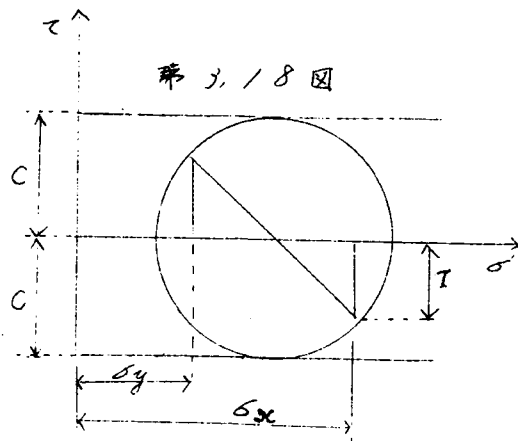
第3,16図



# 市 2 回 臭 験



第3,17図



リ線の綱目の計算を求める。 $\sigma_y$ の値を表～3.13, 表～3.14にそれぞれ第1回、第2回実験に対して かける。さらにこの表に先に述べた $\sigma_y$ の測定値を 併記して比較する。

表～3.13 第1回実験の $\sigma_y$ の値

土圧計番号	1	2	3	4	5	6	7	8	備考
トンネル側壁よりの 距離 X (cm)	1	3	5	7	9	11	13	15	
$\sigma_y$ の理論値(1) $\text{kg/cm}^2$	0.213	0.213	0.213	0.257	0.315	0.365	0.410	0.445	
$\sigma_y$ の理論値(2) $\text{kg/cm}^2$	0.095	0.110	0.115	0.150	0.170	0.190	0.240	—	
(1) — (2) $\text{kg/cm}^2$	0.118	0.103	0.098	0.107	0.145	0.175	0.170	—	
$\frac{(1)-(2)}{(2)}$ の比	1.24	0.94	0.85	0.71	0.85	0.92	0.71	—	平均1.03

※3.14図をみれば土圧計8番、9番は弾性状態の応力を示している。

表～3.14 第2回実験の $\sigma_y$ の値

土圧計番号	1	2	3	4	5	6	7	8	備考
トンネル側壁よりの 距離 X (cm)	1	3	5	7	9	11	13	15	
$\sigma_y$ の理論値(1) $\text{kg/cm}^2$	0.238	0.238	0.238	0.290	0.360	0.413	0.465	0.505	
$\sigma_y$ の測定値(2) $\text{kg/cm}^2$	0.100	0.100	0.105	0.140	0.190	0.230	0.230	—	
(1) — (2) $\text{kg/cm}^2$	0.138	0.138	0.133	0.150	0.170	0.183	0.235	—	
$\frac{(1)-(2)}{(2)}$ の比	1.38	1.38	1.27	1.07	0.895	0.796	1.02	—	平均1.11

第3.17図の測定値をみて土圧計8番、9番は、弾性状態になっていると考

えられる。

表～3.13, 及び表～3.14に示す $\sigma_y$ の理論値をそれぞれ第3.16図及び第3.17図の実線 の曲線で示し測定値の $\sigma_y$ を直接比較する。

$\sigma_y$ の理論値と測定値とを比較するときは理論値の方が大であつて、この理由は模型実験におい て摩擦性塑性体としての水平層の上面に地山荷重にあたる荷重をかけたとき、前面のガラス板と 後面の桐板と上と下面の粘着抵抗、その他アーチアクションの作用によって水平層下面に生ず る $\sigma_y$ の値は相対理論値より小となるためと考えられる。しかし $\sigma_y$ 測定値の傾向と $\sigma_y$ の理論 値の傾向はトンネル側壁より離れるに従つて増加している様子が相似た形をしている。 $\sigma_y$ の理

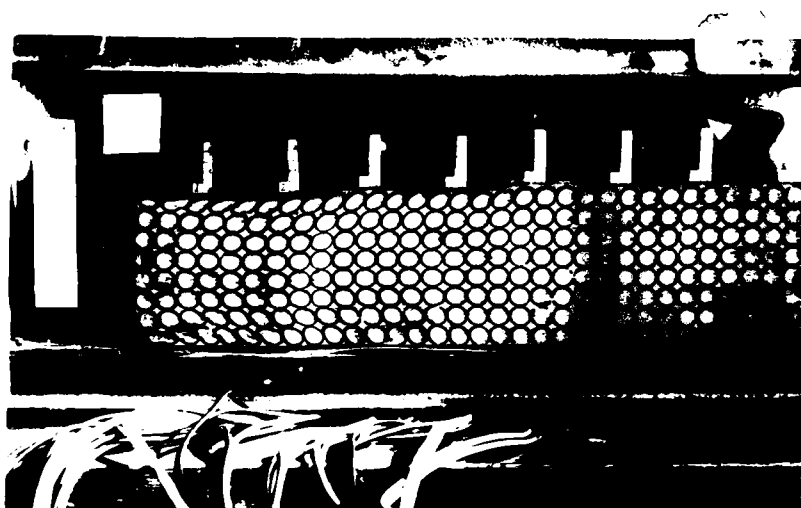
理論値(1)とその測定値(2)との差(1)-(2)は土の粘着力と $\sigma_y$ の値に関連していると考えられ、第1回実験における $\frac{(1)-(2)}{(2)}$ の平均値は1.03、第2回実験における $\frac{(1)-(2)}{(2)}$ の平均値は1.11となっている。この比はガラス板や紙の板と土との面の粘着抵抗やアーチアクションの影響の総合されたものとみなしに関連があると考えられる。しかしアーチアクションも粘着力に関連しているから結局 $\frac{(1)-(2)}{(2)}$ の比は土の粘着力のみに関連をもっていると考えられる。第2回実験と第1回実験の土の粘着力の比は $\kappa = \frac{0.085}{0.072} = 1.18$ となり、また第2回実験と第1回実験との $\frac{(1)-(2)}{(2)}$ の平均値の比は $\lambda = \frac{1.11}{1.03} = 1.08$ となり、 $\kappa$ と $\lambda$ の値は殆んど相近似した値となっているから、 $\sigma_y$ の理論値と測定値との差は $\sigma_y$ の測定値と粘着力とがある一定の函数関係にあると考えられる。実験回数が僅かであるので確定はできないが、ほぼこのような推論より第2編第6章の理論の妥当性をみとめることができると考えられる。

さらに第2編第6章の理論の検証は圧り線について考察することとする。圧り線によって決定される網目の各節点を求める理論について内部摩擦角の存在する場合のみを第2編第6章において述べたが、内部摩擦角が零である場合はR、H(193)に述べられている場合となる筈。これによってこの模型実験の摩擦性塑性体としての水平層の高さ8cmのものに対して計算した圧り線を描いた理論値は第3/9図に示すような図形となる。模型実験の第1回実験においてこの水平層をなす上のガラス面にあたる表面にヘクト版インキで印刷した直径1cmの円の変形の痕跡を写真〜3/2に示す。この円形が荷重のため内部に発生した応力により楕円に変形していてこの楕円の長径方向が最小主応力方向となり、短径方向が最大主応力方向であるから、この主応力方向と45°の角をなす方向が圧り線の方角となる。このようにして圧り線をたどって圧り線を描けば圧り線の理論値と相似した図形となることが判る。また模型実験の第2回実験において実験終了後圧り線がこの水平層の表面に発生したのを写真撮影したものが写真〜3/3であって、これでは観察しにくいので、圧り線に滲って色をつけたものが写真〜3/4である。これによって圧り線の理論値と実験値とを比較すると表〜3/5に示すようになる。

表〜3/5 圧り線の理論値と実験値との比較

比較すべき項目	理論値	第2回実験値	理論値
			実験値
第3/9図における節点(0,0)のxの値(1)	4cm	3.5cm	1.14
第3/9図における節点(6,0)のxの値(2)	5.6cm	4.8cm	1.17
第3/9図における節点(6,6)のxの値(3)	14.5cm	12.0cm	1.21
第3/9図における節点(12,6)のxの値(4)	16.5cm	14.0cm	1.18

表〜3/5によれば、(1)、(2)、(3)、(4)のxの値の理論値と実験値との比は1.14から1.21の間にあり、略相近似した比をとっている。この理論値と実験値との差の主な原因は実験においては土が相当圧縮され、トンネル側壁近くでは水平層の高さが縮小して7cmに減少しているためと考えられる。理論値においてはこの水平層の高さは8cmであるから、理論値と実験値との比は $\frac{8}{7} = 1.14$ であって、これは表〜3/5の(1)の項目の場合の理論値と実験値との比1.14と同じ値である。このことから第2回実験においてこの水平層の試料土の単軸圧縮試験を同じ内部摩擦角を零とみなしたことは妥当と考えられる。また表〜3/5の(2)、(3)、(4)の項目に対して理論値と実験値との比が1.17〜1.21の間にある程度であるならば理論の妥当性をみとめることができる。



写真〜3,12



写真〜3,13



写真〜3,14

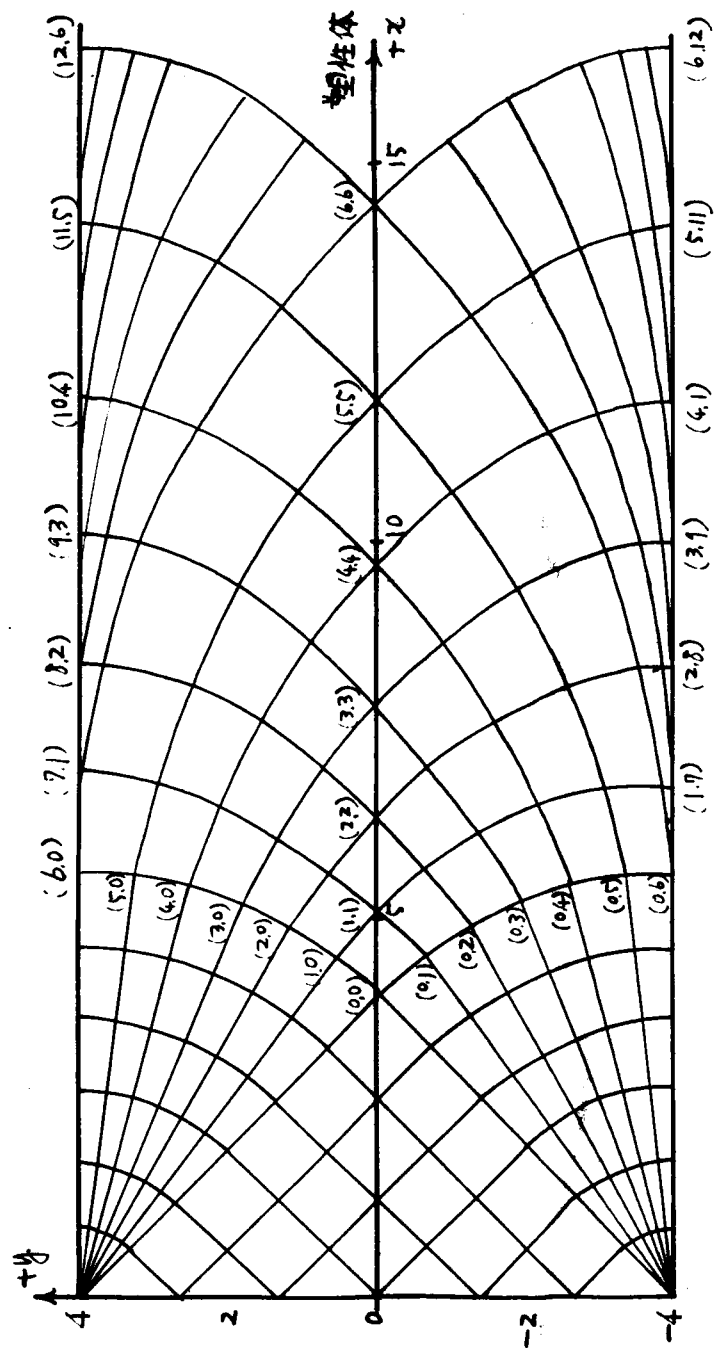


图 3, 19



### 第3節 結 語

第2編第6章に述べた理論は内部摩擦角 $\phi$ が存在する場合であるから主応力 $\sigma_1$ と最大主応力のなす角は $\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}$ となり、水平軸と最大主応力のなす角 $\phi$ については第2,4の図において、

$$\phi_{m,n} = \phi_{m,0} + \phi_{0,n} - \phi_{0,0} \quad \text{--- (3.3.3)}$$

が成立する。また第2,4の図において平均応力 $\sigma$ については、

$$\log \sigma_{m,n} = \log \sigma_{m,n-1} + \log \sigma_{m-1,n} - \log \sigma_{m-1,n-1} \quad \text{--- (3.3.4)}$$

が成立する。しかしながら本章の模型実験においては使用した土が粘土なる故、内部摩擦角 $\phi$ が零である、主応力 $\sigma_1$ と最大主応力のなす角は $\frac{\pi}{2}$ となる。 $\phi$ については(3.3.3)式の Hencky の第一定理が成立し、平均応力については(3.3.4)式が代りに、

$$\sigma_{m,n} = (\sigma_{m,n-1}) + (\sigma_{m-1,n}) - (\sigma_{m-1,n-1}) \quad \text{--- (3.3.5)}$$

が成立する特別な場合となる。またこの実験においてはトンネル側壁では変位工はなく素地のままとしているから、トンネル側壁近傍の第2,4の図に示す Rankine S+α+βの部分において $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = \sigma_z$ となっている。この境界条件を用いて第2編第6章の考えを用いて $\sigma_y$ の理論値、主応力の理論値を求め、実験結果と比較して内部摩擦角 $\phi$ が零の場合の理論の妥当性を検証した。これによって第2編第6章の理論の考え方の妥当性がみとめられるのである。表3-5に示すように土に関する実験で主応力の理論値と実験値との比が1/4 ~ 1/2の間にあつたならば理論値の妥当性をみとめることができると考えられる。

しかし $\sigma_y$ の圧力に関しては土圧計自体が真の土圧をあらわすが否かは未だ議論のあるところであつて、土圧計によつて土圧を測定する場合受圧板が変位することによつて土にアーチアクションが発生して土圧計の読みは常に真の土圧より小なる値を示すと考えられ、またこの模型実験桶の寸法関係によつて土と前面のガラ板及び後面の箱板との間の粘着力による抵抗を正確に見積り難い点などのために、土圧計の読みに対して補正する方法が不明確な点があるため、この $\sigma_y$ の理論値と実験値を比較したことから直ちに理論の妥当性はいえないかも知れないが、第3,1の図と第3,17の図に示されるようにトンネル側壁近傍の塑性状態の部分の $\sigma_y$ の圧力の分布の傾向は理論値と実験値とは相似した形をとるため、 $\sigma_y$ を求める理論は少なくとも定性的には妥当であることがいえる。

## 第4章 巻立トンネルの覆工に及ぼす土圧の模型実験<sup>84)</sup>

### 第1節 実験装置及び実験方法

第2編第2章及び第3章で研究したトンネル周縁の変位と巻立トンネル覆工に作用する土圧の関連性を調べたり、第2編第3章の理論より求められる土圧と実験による土圧との傾向を比較することにより、より一般的に巻立厚設計のためのトンネル覆工に作用する土圧の推定に役立てるため巻立円形トンネルの覆工に及ぼす土圧の模型実験を行った。この模型実験は次の2種類の実験よりなっている。

A 模型試験：— トンネル覆工用円筒を定位置に固定した場合の模型実験

B 模型試験：— トンネル覆工用円筒は地山荷重に応じて沈下しうる場合の模型実験

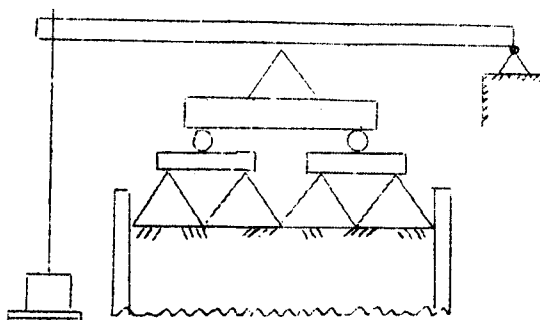
この両者の模型実験における差異はトンネル覆工用円筒の構造を上目的にあうようにかえてい、しかしこの円筒にとりつけた土圧計は何れも同じ Gold beck 型の構造のものである。

#### (1) A 模型試験

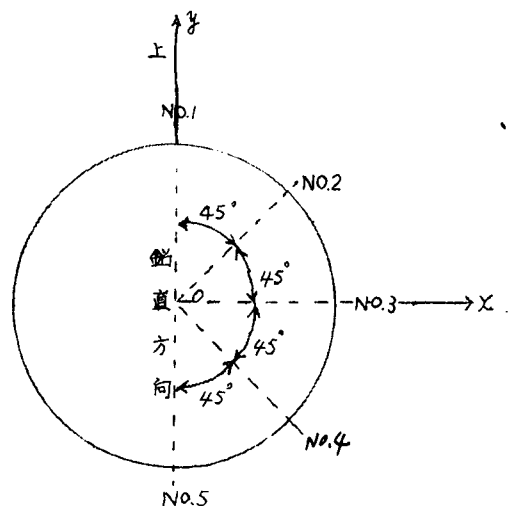
写真～3, 15に示すように内空容積  $70 \times 50 \times 10 \text{ cm}$  を有する木箱をつくり、 $10 \times 50 \text{ cm}$  の上方の面は載荷板装置(第3, 20図に示す)設置のため板をとりつけないものとする。 $70 \times 50 \text{ cm}$  の前面の板は取りはずしが出来る木の板の蓋とし、箱に土をつめてのちアングルとボルトで箱に固結出来る構造とする。前面、後面の  $70 \times 50 \text{ cm}$  の木板の中央に相対して直径  $16 \text{ cm}$  の円孔をあけ、この中に板と直交して外径  $16 \text{ cm}$ 、肉厚  $5 \text{ mm}$  の鉄製円筒を貫通して挿入できるようにしている。

このときはトンネル覆工となる鉄製円筒は地山荷重により移動しない構造とする。この鉄製円筒に Gold beck 型土圧計5ヶを取り付けている。その取り付け位置と土圧計番号を第3, 21図に示す。

この模型実験用木箱に土をつめるには、木箱を横倒にして  $70 \times 50 \text{ cm}$  の蓋を取りはずし、円孔に鉄製円筒を挿入して土をつめる。後で述べる実験用の土を所要の含水比にしてこねかえしたものを三層にわけつめ、  
各層毎に直径  $32 \text{ mm}$  の鉄棒で50回づつつき



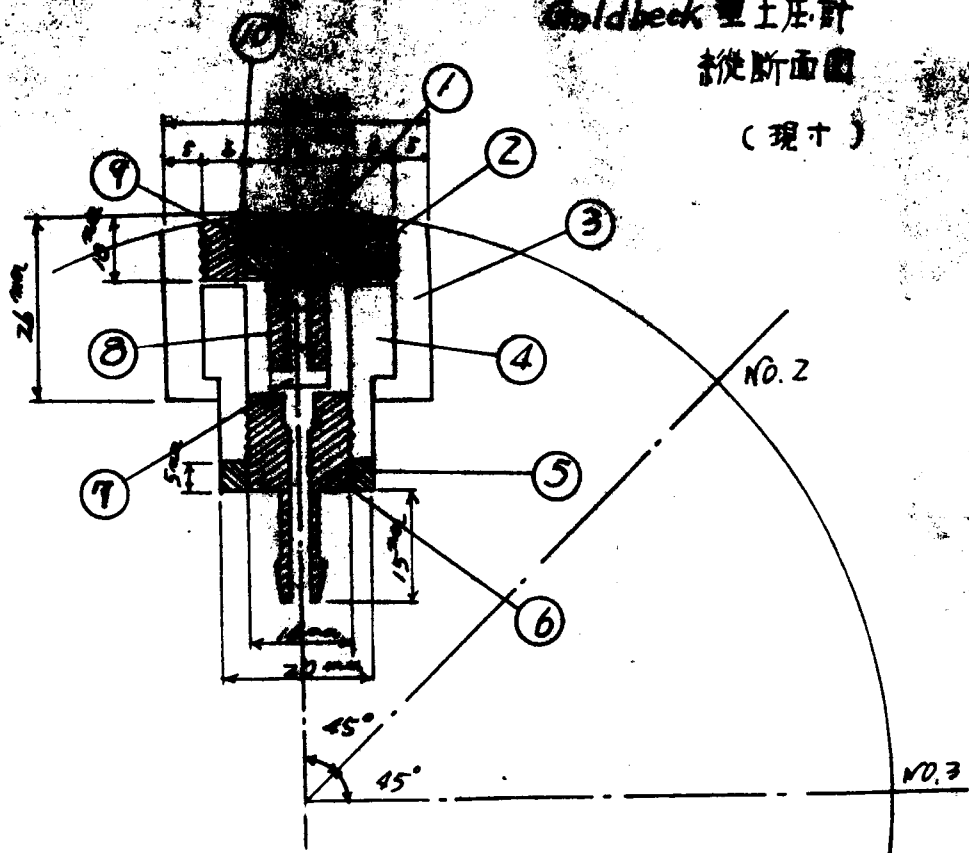
第 3. 20 図



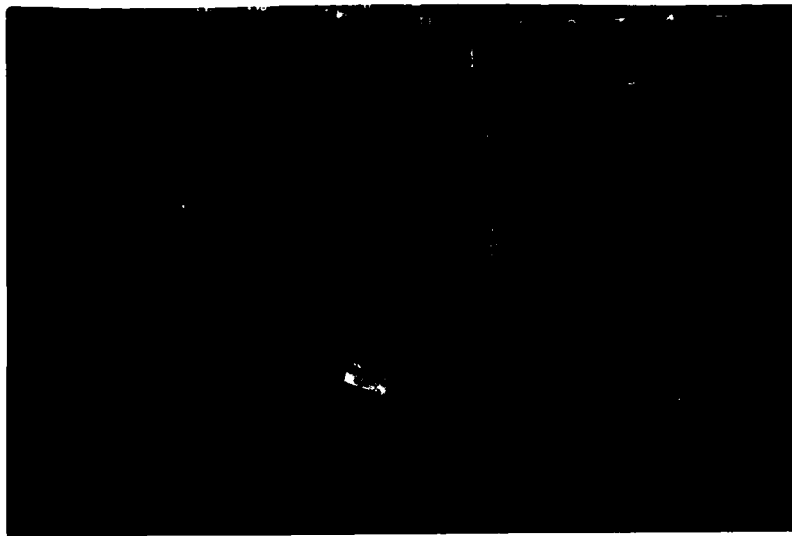
土 圧 計 番 号

第 3. 21 図

Goldbeck 型土圧計  
縦断面図  
(現寸)



第 3, 2 Z 図



XXXX-1110

写真 ~ 3.15

かため充分つまるようにして地山材料とした。その後70×50cmの蓋をしてアングル、ホルトで木箱に固結して写真〜3.15のように直立させる。

載荷装置は第3.20図に示すように等分布荷重をえられるようにし、Lever比 $\frac{1}{2}$ の下部懸吊式によって地山荷重に該当する荷重をのせる。使用した土は徳島市秋田町の土、大工町の土、豊浦標準砂であつて、秋田町の土、大工町の土の物理的性質及び粒度分析の結果は表〜3.16に示す。

表〜3.16 実験用土の性質

土の名称	物理的性質				粒度分析結果			
	真比重	LL	PL	PI	砂	シルト	粘土	三角座標による分類
徳島市秋田町の土	2.72	30.8%	23.9%	6.9%	16%	59%	25%	シルト質粘土ローム
徳島市大工町の土	2.69	61.8%	40.8%	21.0%	30%	60%	10%	シルト質ローム

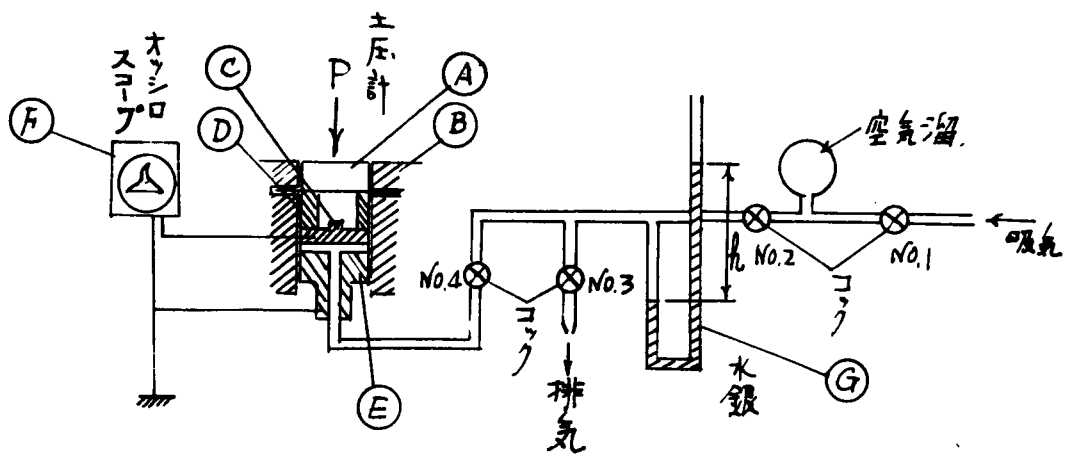
実験に使用したGoidbeck型土圧計の構造：一

鉄製円筒にとりつけた実験用土圧計の縦断面図を第3.22図に示す。この図の③は鉄製円筒に溶接された円筒状のものであり、①の受圧板が②の円筒の中で移動できるようになり、②と④との間にはさまれた厚さ0.05mmの燐青銅板の微少なねみにより①は移動するようになっている。⑧はベークライト製円筒で①と燐青銅板とにシャフトで連結して居り、①とともに燐青銅板のたねみとともに移動する。さうして⑦と①との間の電氣的絶縁をなすものである。④の円筒の内部に②がねぢ込まれ、⑦の金属と僅かな空間を残すよう調節して③のナットで④を定位置に固定する。⑦と⑥とは接触すれば電気回路を開閉するような構造とする。⑥の先の管にビニール管をつなぎ圧縮空気をこれより送入する。なおトンネル巻立にあたる直径16cmの鉄製円筒には実験中土の水が土圧計に浸入するのを防ぐためビニールをかかせている。

第3.23図は圧縮空気送入及び圧力調整装置及び電気回路、土圧計の関連を示したもので、⑩は第3.21図の7であり、⑪は第3.22図の⑥である。Goidbeck型土圧計の受圧板にPなる強度の圧力が働くとき⑬の燐青銅板にたねみを起させ①が移動して⑤と接触する。①と⑤とに電気回路が開ざされて⑩のオッシロスコープのsin曲線が直線となる。ただしオッシロスコープのVertical Inputにこの電気回路を接続し、またこれをearthしておく。外部よりのハムによる誘導電流により電気回路を開いたとき電圧がかかりsin曲線を描くが、電気回路を開すればearthしてその電圧が零となりオッシロスコープの示すsin曲線は直線となり、このようにして⑥と⑤との接触を認知することができぬ。

いま⑥を押上げてPなる圧力と平衡させるためにN0.1のコックを開け、N0.2のコックを閉ぢて圧縮空気を圧入して空気を溜める。つぎに排気圧力調整用N0.3のコックを閉ぢ、N0.4のコックを開け、N0.2のコックを徐々に開けると圧縮空気はN0.4を通り⑥を押上げる。このとき①と⑤との間の電気回路は切断されて、この瞬間の④のU字管の水銀マンメータによって空気圧力を測れば、これがPの圧力を測定したこととなる。

第3.22図の⑥と⑦との間隙を小さくするよう調節するのであるが、受圧板が燐青銅板に支えられて、この受圧板に320grの載荷したとき、受圧板の移動が $\frac{2}{100}$ mmあった。燐青銅板のたねみが荷重に比例するとして10grの荷重に対して $\frac{1}{1000}$ mmのたねみ量すなわち移動量となる。10grの力を受圧板にかけて電気回路が開ざされるように第3.22図の①と⑥との間隙を調節できたので、この間隙は $\frac{1}{1000}$ mmになしえたこととなる。この土圧計を鉄製円筒にとりつけたものを写真〜3.16に示す。また圧縮空気送入及び圧力調整装置を写真〜3.17に示す。



才 3,23 図

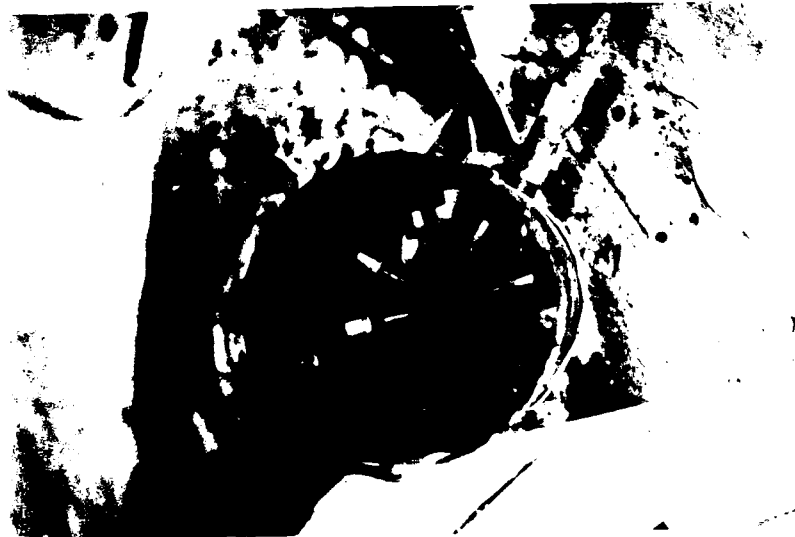


写真 ~ 3.16

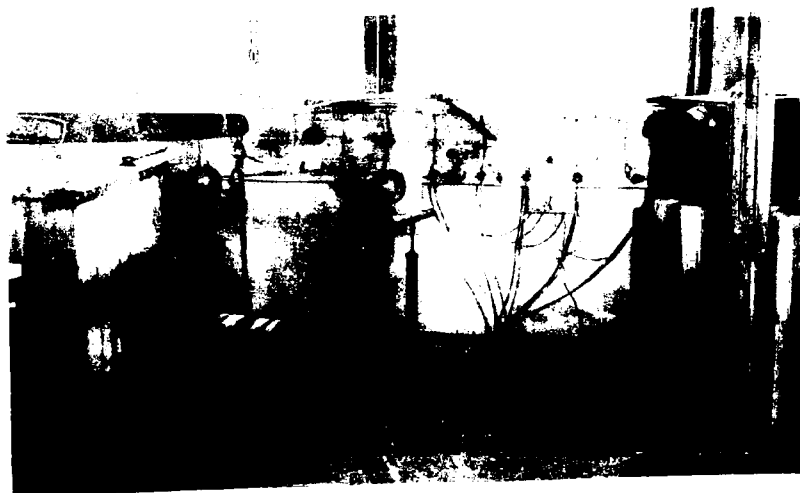


写真 ~ 3.17



写真 ~ 3.18

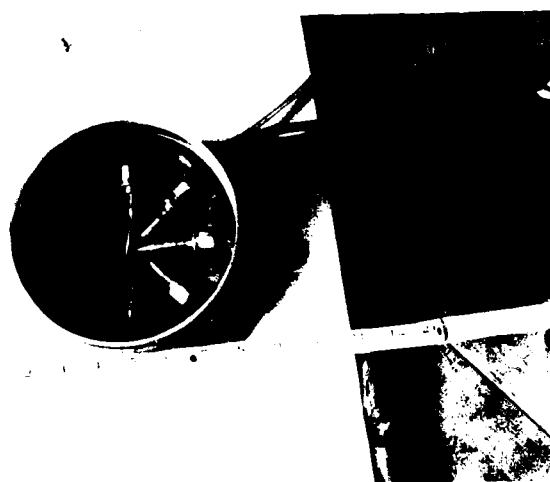


写真 ~ 3.19

トンネル覆工の圧力の測定において、上述のように模型実験箱に地山材料の土をつめ、覆工用の鉄製円筒を入れたものを直立させ、第3.20図の載荷装置によって地山荷重に該当する荷重を段階的に増加させ、その都度土圧計の読みをとるようにして地山荷重とトンネル覆工に作用する土圧の相関性を測定するのである。

## (2) B 模型試験

使用した実験用木箱、載荷装置、土圧計、圧縮空気送入装置、地山材料の土のつめ方及び載荷方法と載荷時の土圧計の読みとり方はA模型試験のときと同じである。

本実験においては、巻立トンネルの覆工全体が模型実験の地山荷重に該当する荷重をかけるに従って沈下移動する場合、覆工土圧分布が如何になるかを求めんがために行つた。第2編第8章の巻立トンネル周辺の応力分布を求める理論は円形巻立トンネルの覆工を地山にはめ込んで後重力という荷重を載荷した場合のものであるので、この理論の前提条件と同じにするために、この条件を満足する模型実験は巻立トンネルの覆工全体が地山荷重の載荷に伴い沈下移動できる構造とすべきである。巻立トンネルの模型の構造は外径 $16\text{cm}$ 、肉厚 $5\text{mm}$ の鉄製円筒の長さを $9.5\text{cm}$ にして、その両端に写真 $\sim 3.18$ に示すようにつば状の円形鉄板をとりつけたものである。この鉄製円筒全体が木箱の中に入り、木箱の $70 \times 50\text{cm}$ の直径 $16\text{cm}$ の円孔と同心になる位置に設置して、載荷の時この鉄製円筒が沈下移動しても木箱内につめた地山の土がこのつば状鉄板によって木箱の円孔より外にこぼれるのを防ぎ、且鉄製円筒が載荷に応じて自由に沈下移動させるようにしたものである。この鉄製円筒にはA模型実験と同じGoldbeck型土圧計5ヶをとりつけている。そのとりつけ方を写真 $\sim 3.19$ に示す。この装置で実験中の載荷の様子を写真 $\sim 3.17$ の左方に示されている。

この実験に用いた土は豊浦標準砂と徳島市市民会館前の土である。後者の土の物理的性質は真比重 $2.65$ 、 $L.L.$   $33.7\%$ 、 $P.L.$   $18.6\%$ 、 $P.I.$   $15.1\%$ で粒度分析の結果砂分 $56.0\%$ 、シルト分 $26.8\%$ 、粘土分 $17.2\%$ であつて、砂質ロームである。この土を含水比を種々かえてこねて木箱につめて地山の土とした。



## 第2節 実験結果及びその考察

### (1) A 横型試験

A 横型試験において地山の土として徳島市秋田町の土の含水比 41.0%、単位体積重量  $1.72 \text{ gr/cm}^3$  のときの地山荷重に該当する載荷荷重  $w$  の各段階における覆工土圧  $P$  の測定値の分布を第 3.24 図に示す。  $w$  を横軸、  $P$  を縦軸にして各土圧計毎にその測定値をプロットしたものが第 3.27 図である。

地山の土として徳島市大工町の土の含水比 55.8%、単位体積重量  $1.64 \text{ gr/cm}^3$  のときの  $w$  の各段階における  $P$  の測定値の分布を第 3.25 図に示す。  $w$  を横軸、  $P$  を縦軸にして各土圧計毎にその測定値をプロットしたものが第 3.28 図である。

地山の土として豊浦標準砂の乾燥状態のもので単位体積重量  $2.04 \text{ gr/cm}^3$  のものを用いたときの  $w$  の各段階における  $P$  の測定値の分布を第 3.26 図に示す。  $w$  を横軸、  $P$  を縦軸にとって各土圧計毎に測定値をプロットしたものが第 3.29 図である。

この実験結果によれば一般にトンネルの拱頂より側壁を経て拱底に何うに従い土圧は減少している。しかし粘性土の地山の場合は拱底にも土圧が作用するが、砂の地山のときは拱底の土圧は非常に小さな値となっている。粘性土地山では秋田町の土より大工町の土の方が含水比が相当大きく、後に述べるようにせん断強度は大工町の土の方が小とみられ、水圧的な土圧分布に近づいている。また同一荷重  $w$  に対する各土圧計の測定値は大工町の土の方が大となっている。この原因はこの実験において秋田町の土はせん断強度大きく、それだけ模型実験用木箱の内面の板と土との摩擦抵抗が大きく、多少アーチアクションも大きく作用するから土圧計の測定値は秋田町の土は小となり、大工町の土が大となったと考えられる。

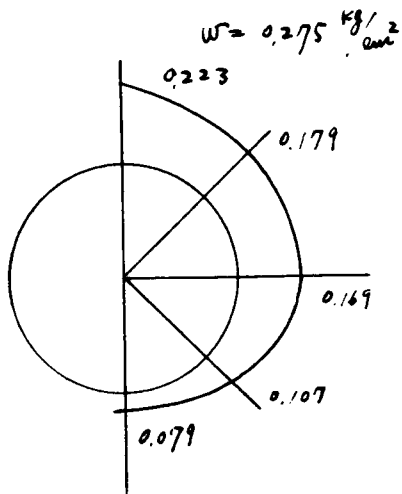
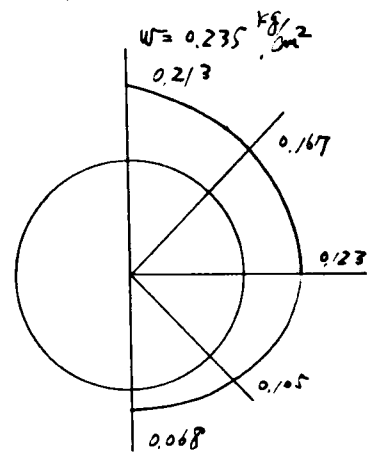
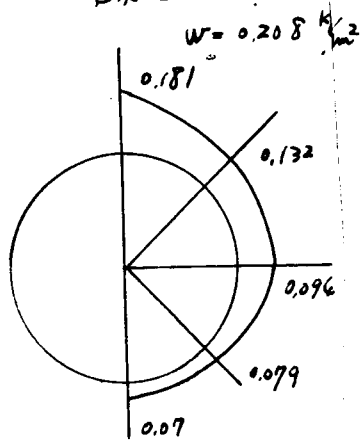
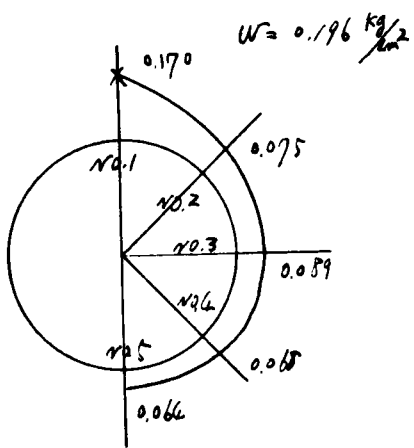
表 ~ 3.17 は拱頂土圧  $P_1$  と  $w$  との関係を示し、  $\frac{w-P_1}{w}$  の比の傾向を計算したものである。  $\frac{w-P_1}{w}$  はこの実験の木箱内面の板と土との間の摩擦抵抗によるアーチアクションの  $w$  の単位量に対する影響をあらわすか、何れも  $w$  が増加するに従って  $\frac{w-P_1}{w}$  も増加している。これは  $w$  の増加に伴い土のせん断強度の増加を示している。特に大工町の土で  $w$  の小なる

表 ~ 3.17 拱頂土圧  $P_1$ 、拱底土圧  $P_2$  と  $w$  との関係

徳島市秋田町の土	$w \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	0.200	0.220	0.240	0.260	0.280
	拱頂土圧 $P_1 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	0.175	0.188	0.202	0.216	0.230
	$w - P_1 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	0.025	0.032	0.038	0.044	0.050
	$\frac{w-P_1}{w}$	0.125	0.145	0.158	0.169	0.179
	$\frac{P_1}{w}$	0.875	0.855	0.842	0.830	0.821
	拱底土圧 $P_2 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	0.064	0.068	0.072	0.075	0.080
	$\frac{P_2}{P_1}$	0.366	0.362	0.357	0.347	0.348
徳島市大工町の土	$w \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	0.260	0.300	0.330	0.350	0.380
	拱頂土圧 $P_1 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	0.295	0.315	0.330	0.341	0.357
	$w - P_1 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	-0.035	-0.015	0	0.009	0.023
	$\frac{w-P_1}{w}$	-0.134	-0.050	0	0.026	0.061
	$\frac{P_1}{w}$	1.136	1.050	1	0.976	0.940
	拱底土圧 $P_2 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	0.159	0.169	0.177	0.182	0.190
	$\frac{P_2}{P_1}$	0.539	0.537	0.537	0.534	0.532

地山或秋田町の工場の場合 (単位  $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ )

含水比 41.0%



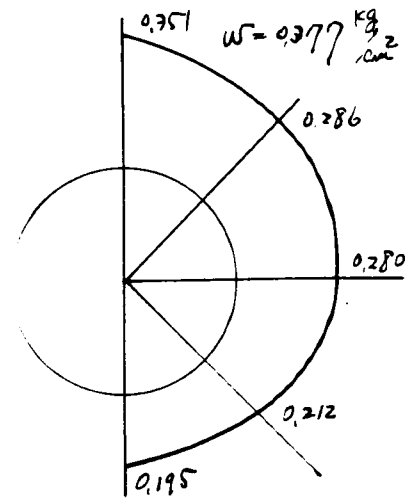
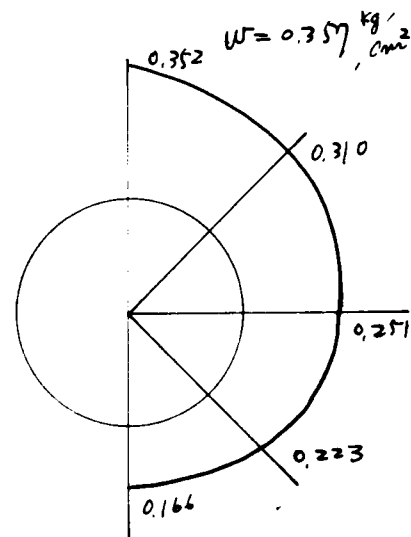
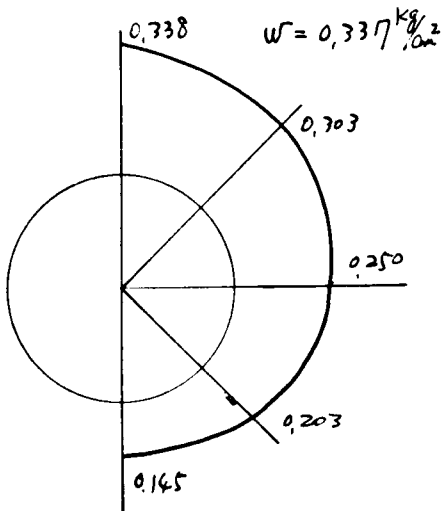
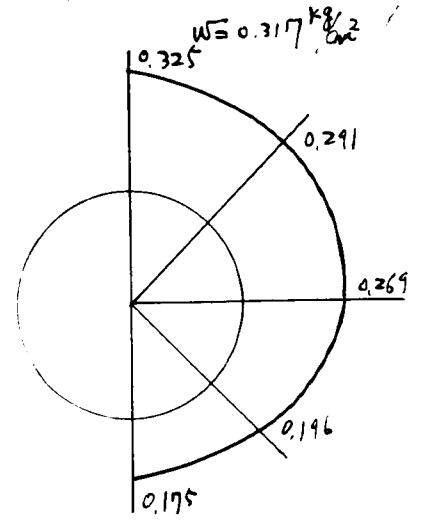
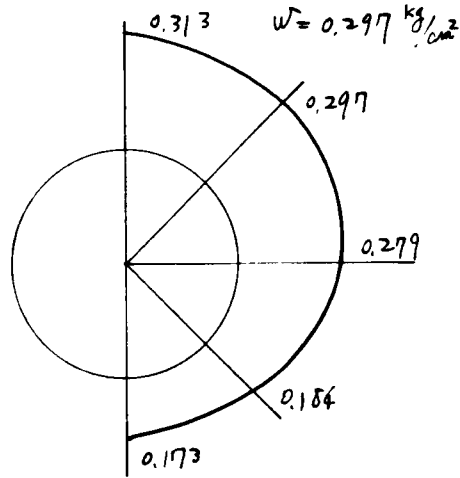
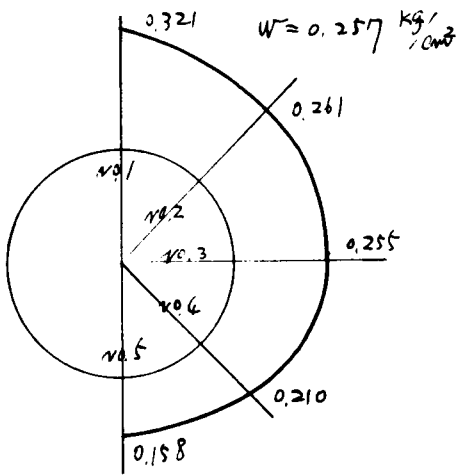
工場の縮尺

0 0.2 0.4 0.6 0.8  $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

才3,242

土地が大工町の工の場合  
含水比 55.8%

単位  $\text{kg}/\text{cm}^2$

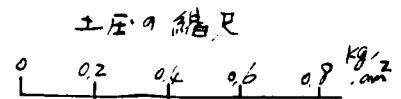
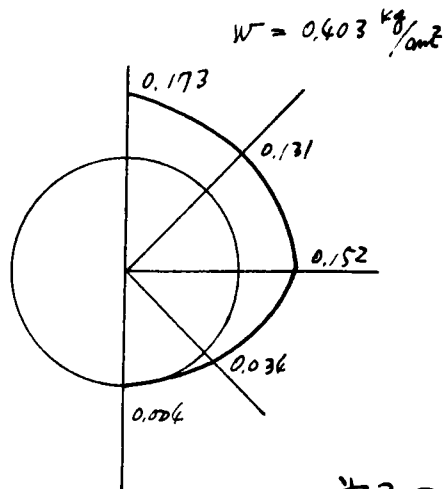
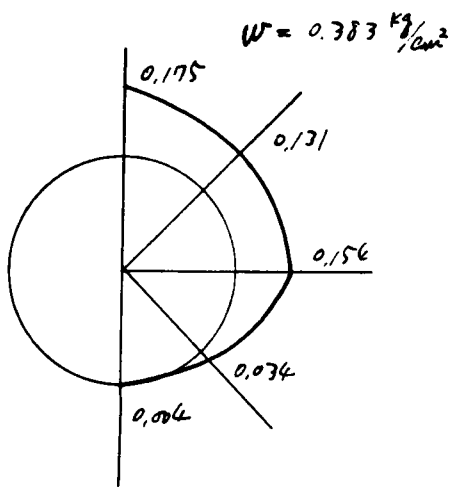
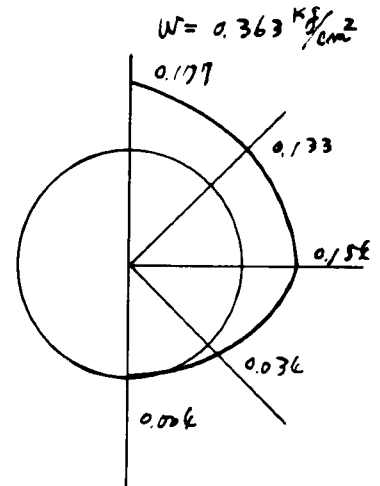
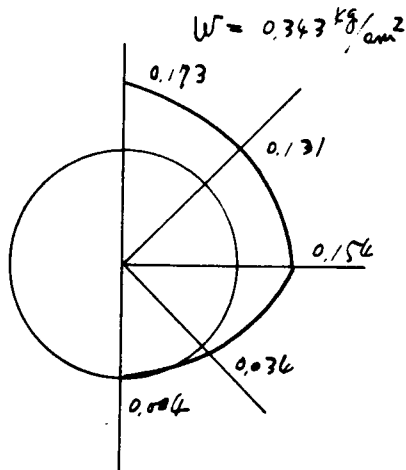
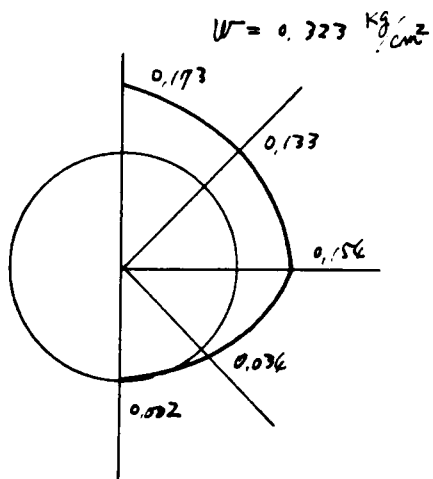
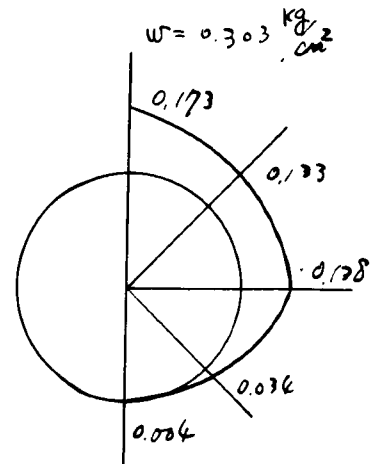
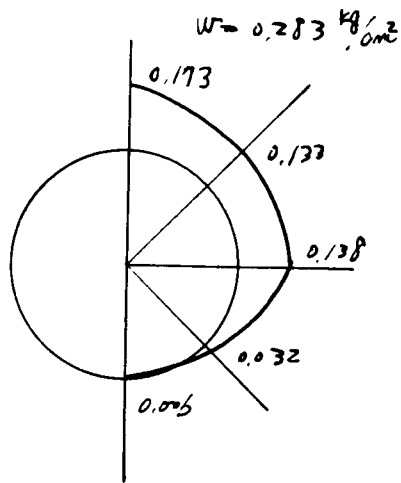
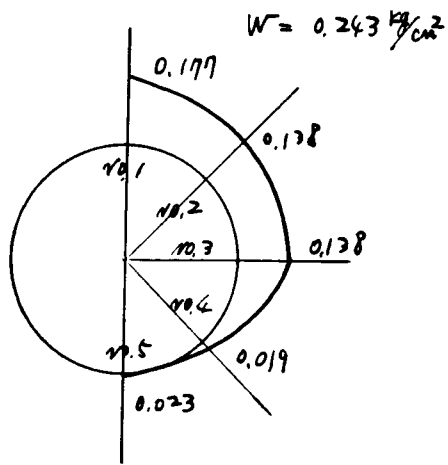


土圧の単位  
0 0.2 0.4 0.6 0.8  $\text{kg}/\text{cm}^2$

第3,25図

地山の普通標準砂の場合

単位  $\text{kg}/\text{cm}^2$



第3,26図

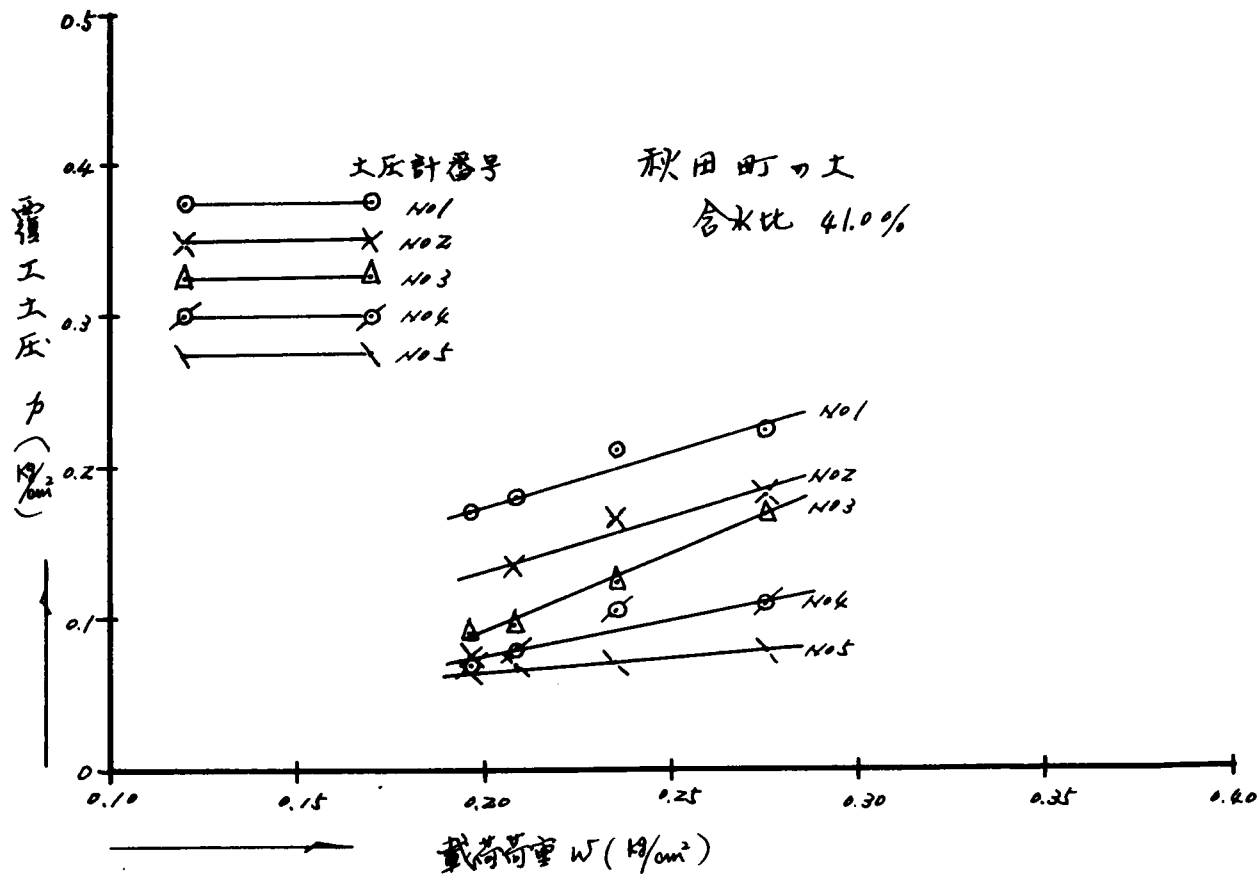


図 3, 27

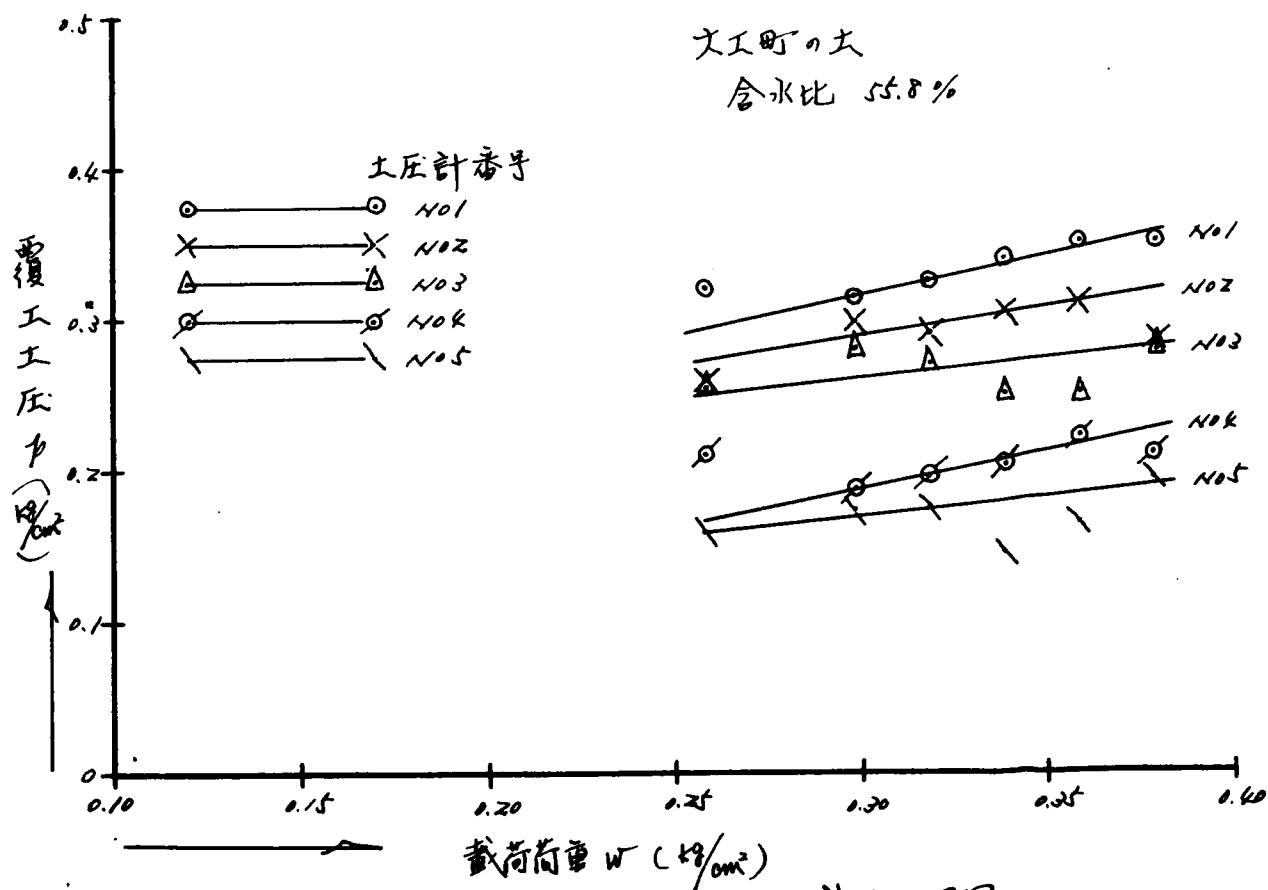
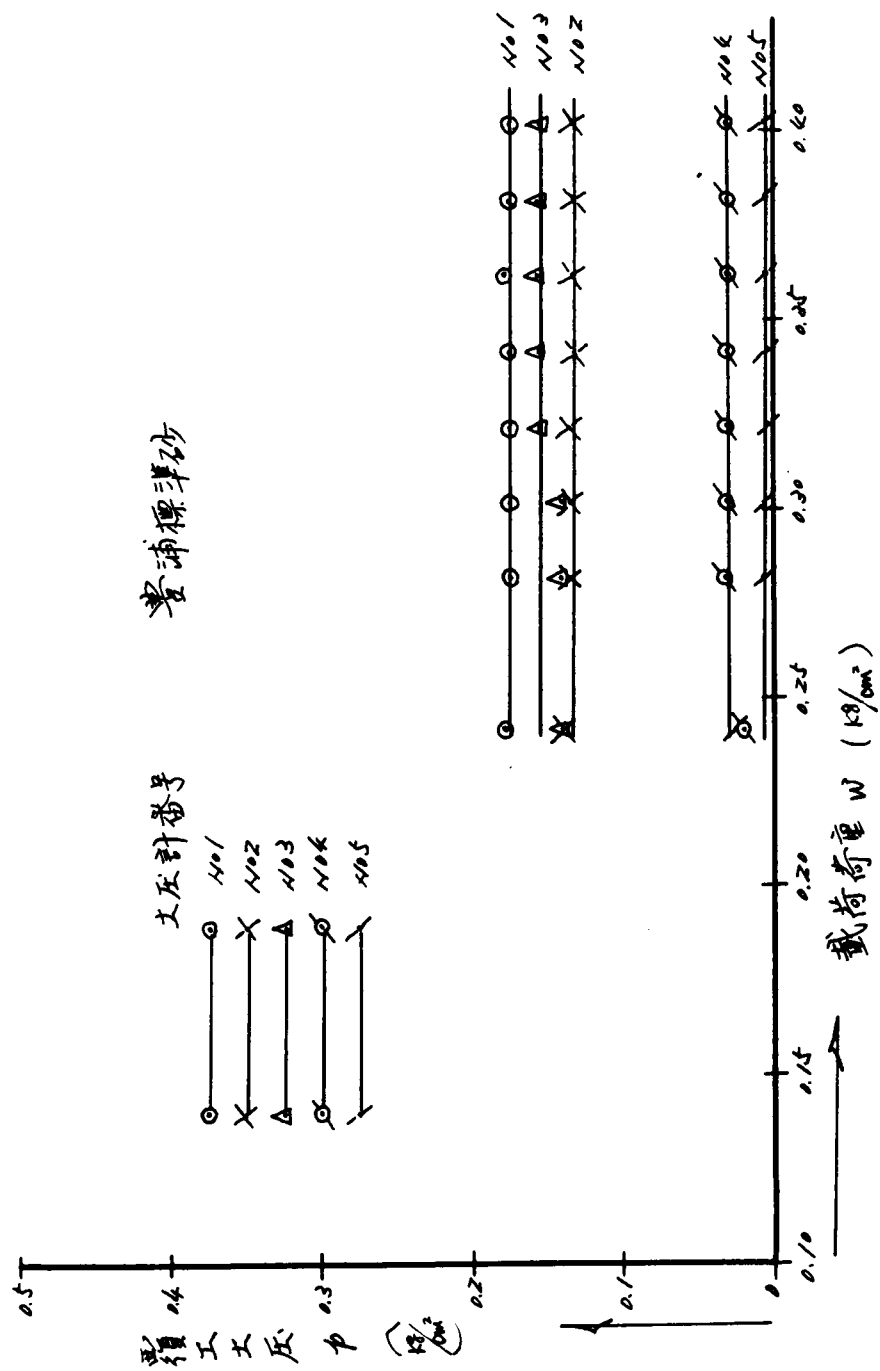


図 3, 28



中3,29図

とき、 $P_1 > w$  となっているのはせん断強度が少くアーチアクションの作用の影響はなく、大きな応力集中の結果と考えられる。 $P_1/w$  は  $w$  の増加とともに減少している。 $w = 0.260 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$  では秋田町の土は  $\frac{P_1}{w} = 0.830$ 、大工町の土では  $\frac{P_1}{w} = 1.136$  となり、大工町の土がせん断強度少でそれだけ拱頂の応力集中が大となっていることを示す。また拱底土圧と拱頂土圧との比  $\frac{P_2}{P_1}$  の値は秋田町の土では平均  $0.356$ 、大工町の土では平均  $0.536$  であって、せん断強度の大きいものが  $\frac{P_2}{P_1}$  の値は少となっている。

また第3.29図より判るように砂の地山の場合は各土圧計ともに  $w$  を増加しても  $P$  が一定の値となっている。これは砂の場合アーチアクションがトンネルの上方に発生して、トンネルの地表面よりの土被りの高さに関係せず、覆工土圧が変わらないで一定となることを示している。トンネル拱頂の土圧は豊浦標準砂を用いたとき  $0.175 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$  で、単位体積重量は  $2.04 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  なる故に換算土圧高さ  $h = \frac{0.175}{0.00204} = 86 \text{ cm}$  となり、トンネル直径  $16 \text{ cm}$  であるからトンネル直径の  $\frac{86}{16} = 5.38$  倍となっている。なおこの砂の安息角は  $32^\circ$  であつた。

## (2) B 模型試験

B 模型試験において地山土として徳島市市民会館前の土を使用した場合  $\alpha$  試料として含水比  $17.6\%$ 、単位体積重量  $1.35 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ 、間隙比  $1.30$  としたもの、 $\beta$  試料として含水比  $29.0\%$ 、単位体積重量  $1.06 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ 、間隙比  $0.83$  としたものを使用した。

$\alpha$  試料の実験結果として  $w$  の各段階における  $P$  の測定値の分布を第3.30図に示し、 $w$  を横軸、 $P$  を縦軸として各土圧計毎に測定値をプロットしたものが第3.33図である。 $\beta$  試料の実験結果としては  $w$  の各段階における  $P$  の測定値の分布を第3.31図に示し、 $w$  を横軸、 $P$  を縦軸として各土圧計毎に測定値をプロットしたものが第3.34図である。豊浦標準砂を地山の土として、単位体積重量  $1.38 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ 、間隙比  $0.90$  につめたものに対して  $w$  の各段階における  $P$  の測定値の分布を第3.32図に示し、 $w$  を横軸、 $P$  を縦軸にとって各土圧計毎にその測定値をプロットしたものが第3.37図である。

市民会館前の土の  $\alpha$  試料の含水比の少ない地山では、せん断強度は  $\beta$  試料より大と考えられ、巻立トンネルの鉄製円筒の沈下量が少く、拱頂土圧より拱底土圧が少く、側壁土圧は最少である。 $\beta$  試料の地山のときは含水比大で、せん断強度少で巻立トンネルの鉄製円筒の沈下量がきわめて大となり、拱頂土圧より拱底土圧が大で、側壁土圧は最少であるが、この試料土の方が土圧分布は水压分布に近くなっている。この原因は  $\beta$  試料土の場合の方がせん断強度少で、ポアッサン比が  $0.5$  に近くなり、塑性状態にあるためと考えられる。第3.35図は市民会館前の土の含水比を変えたとき巻立トンネルの鉄製円筒の沈下量と覆工土圧との関係を各土圧計毎にプロットしたものであつて、含水比が大となれば各土圧計の測定値の差は少くなって、しかも土圧は  $N.1$  のもの以外は増大しており、 $N.1$  の土圧は殆んど変わらない。これは含水比が大となればせん断強度少となりアーチアクションの影響が少くなって土圧が増加したと考えられる。第3.36図は鉄製円筒の沈下量が含水比の変化により変わる様子を示して居り、含水比が大となると沈下量が非常に大きくなることを示している。 $w$  と  $\sigma$  の関係は各含水比の場合とも直線的変化をなしている。 $\beta$  試料の地山土の場合巻立トンネルの鉄製円筒の沈下が大となると拱頂土圧より拱底土圧の方が大となり、第2編第8章の第2.58図の  $(\frac{P}{P_c})_p$  の分布に近くなっているが、模型実験の場合左右の木の根の所の制約があり、実際地山では左右が無限に拡がって居るため、実際地山の場合に比べて模型実験では側壁土圧が幾分少くなっていると考えられる。

表 ~ 3. 18 拱頂土圧  $P_1$ , 拱底土圧  $P_5$  と  $w$  の関係

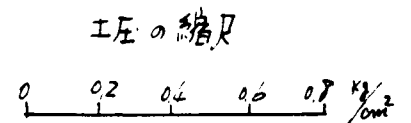
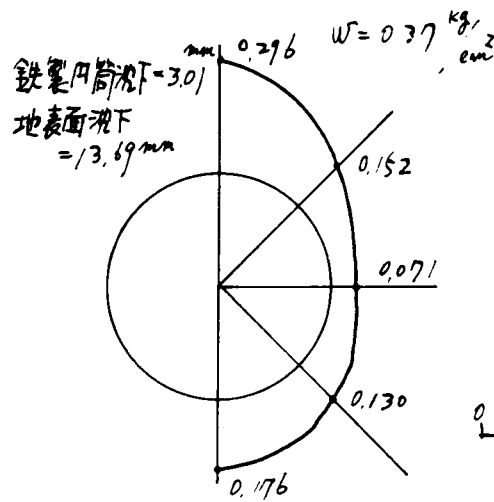
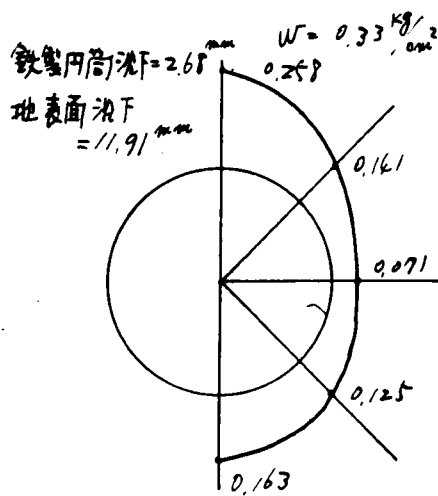
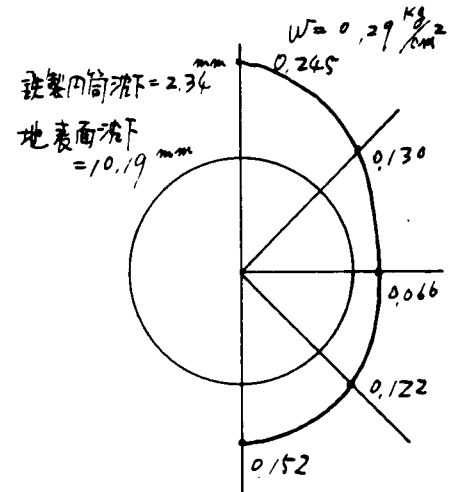
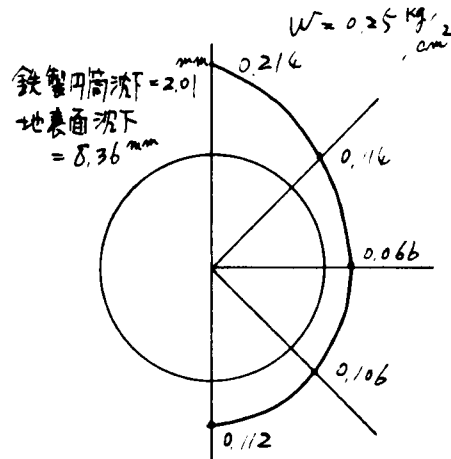
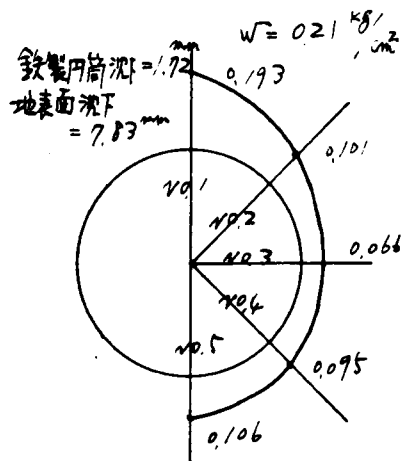
地山荷重としての荷重 $w$ ( $\text{kg/cm}^2$ )		0.220	0.260	0.300	0.340	0.380
徳島市 市民会館 別の土 (a 試料)	拱頂土圧 $P_1$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	0.195	0.220	0.247	0.273	0.300
	$w - P_1$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	0.025	0.040	0.053	0.067	0.080
	$\frac{w - P_1}{w}$	0.114	0.154	0.177	0.197	0.210
	拱底土圧 $P_5$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	0.128	0.140	0.153	0.166	0.180
	$P_5/P_1$	0.658	0.637	0.620	0.609	0.601
徳島市 市民会館 前の土 (b 試料)	拱頂土圧 $P_1$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	0.166	0.198	0.230	0.260	0.290
	$w - P_1$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	0.054	0.062	0.070	0.080	0.090
	$\frac{w - P_1}{w}$	0.246	0.239	0.233	0.235	0.237
	拱底土圧 $P_5$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	0.166	0.216	0.256	0.300	0.344
	$P_5/P_1$	1.000	1.090	1.112	1.153	1.187

表 ~ 3. 18 によって拱頂土圧  $P_1$ , 拱底土圧  $P_5$ , 及び地山荷重としての荷重  $w$  との関係を示したものであるが, a 試料では  $\frac{w - P_1}{w}$  が  $w$  の増加とともに増加しているのは A 模型試験の粘性土地山の場合と同様に  $w$  の増加と共にせん断強度が増加することにより木箱の内面の板と土との摩擦抵抗が増加することによる。b 試料の地山の場合では  $\frac{w - P_1}{w}$  は  $w$  の増加にかかわらずあまり変化はない。かつ a 試料のときより大である。これは b 試料は含水比大なる故せん断強度が小なる結果、巻立トンネルの鉄製円筒の沈下が大きくなり、木箱内面の板と土との間の摩擦抵抗が減少するにもかかわらず、沈下によるアーチアクションのきき方が大きく影響したためと考えられる。a 試料の地山のときは  $P_5/P_1$  は平均 0.625 であり、b 試料の地山のときは平均 1.108 となっているのは、a 試料の地山では鉄製円筒の沈下小で、b 試料の地山のときは鉄製円筒の沈下が非常に大きく、下盤を鉄製円筒が強くおしつけたため、ここに大なる応力集中が生じたためである。

豊浦標準砂を地山の土とした場合は拱頂土圧より拱底土圧が大で側壁土圧は最少であつて、巻立トンネルの鉄製円筒の沈下量は零となっている。拱頂土圧は前述の市民会館前の土の a 試料の地山の場合より小であるのはアーチアクションの影響が大きく及ぼしているためと考えられる。巻立トンネルの鉄製円筒が下盤を強くおしつけ拱底土圧は拱頂土圧より大となっている。このことはこの実験においては載荷面は沈下移動しトンネル上方は砂の移動を生じアーチアクションを生ずるが、トンネルより下方の砂地山は  $w$  を増加しても移動してないから、地山荷重が巻立トンネルの鉄製円筒を通じて下盤にかかつてきたためと考えられる。一般的にいつて砂地山のときは荷重の増加にともない巻立トンネルの鉄製円筒が沈下する場合、荷重載荷表面もこれに伴つて沈下しアーチアクションも大きく作用するが、 $w$  の増加に従つて  $P$  も幾分増加することが測定される。しかし砂の運動機構が複雑なため土圧の定性的な傾向はなお多くの実験により研究すべきで結論を下すことは当を得ないと考えられる。

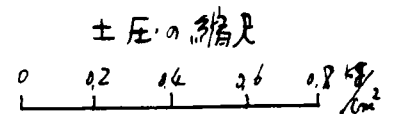
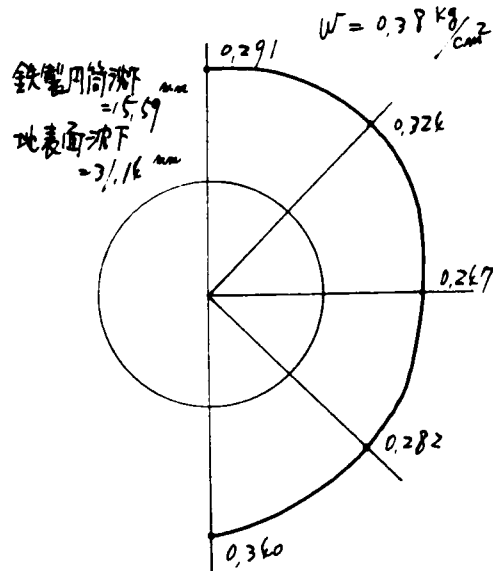
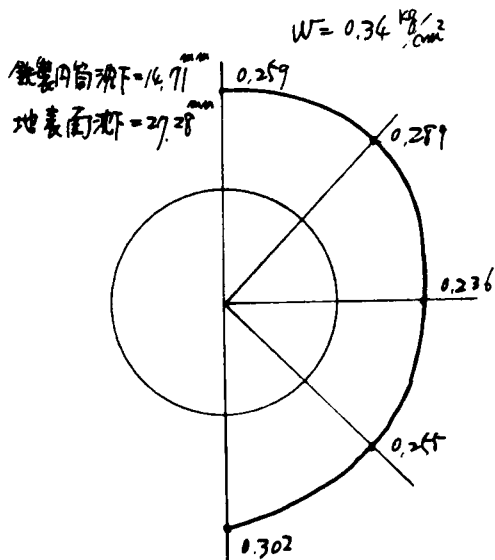
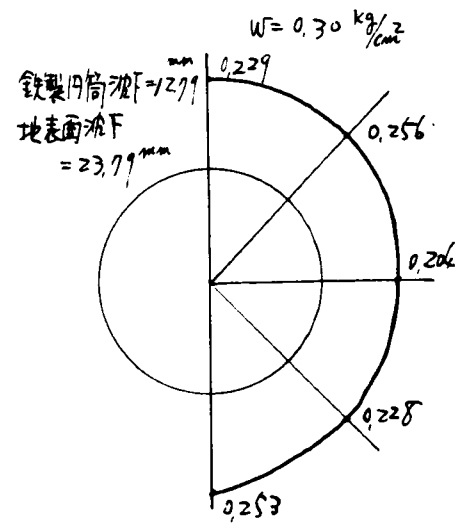
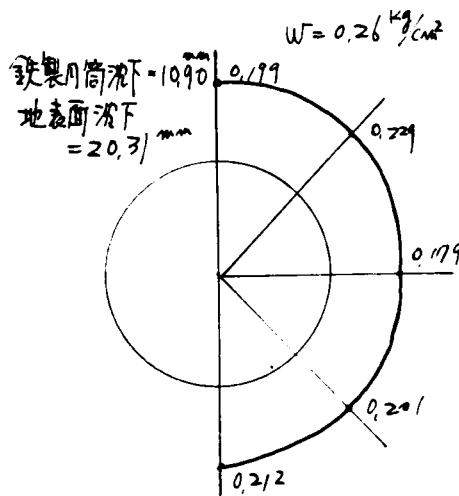
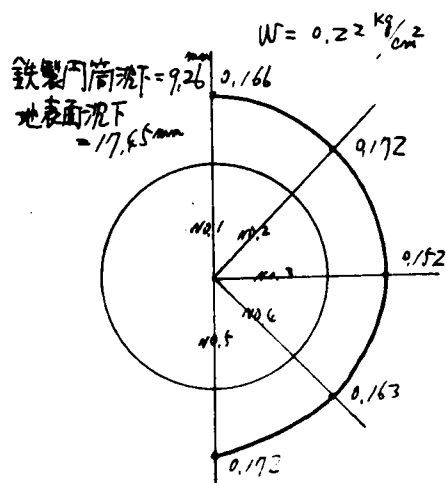


地山市民会館前の土（含水比17.6%）の場合（単位  $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ ）



才3,30図

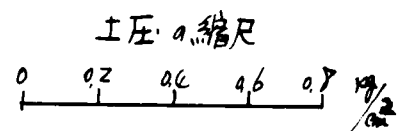
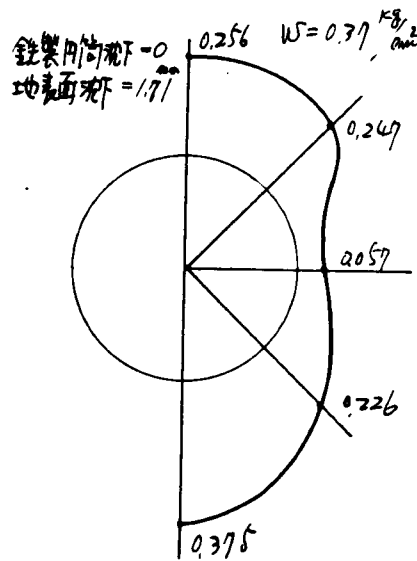
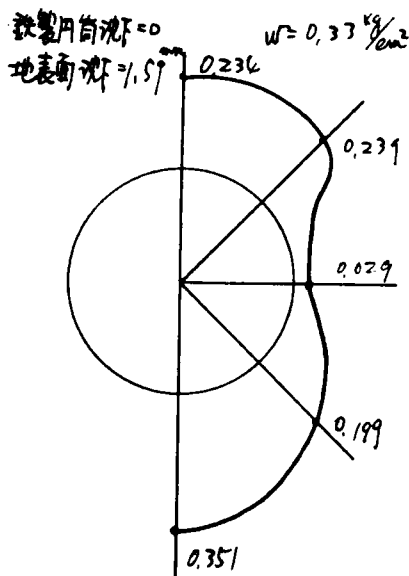
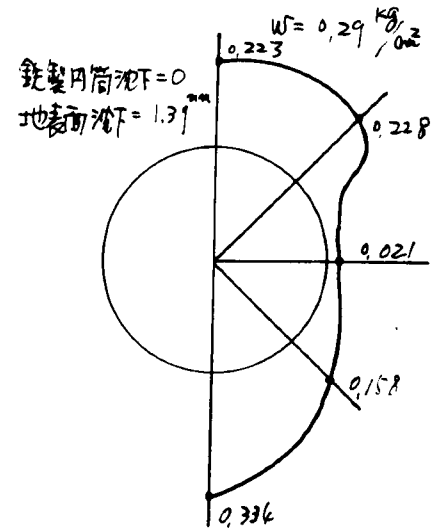
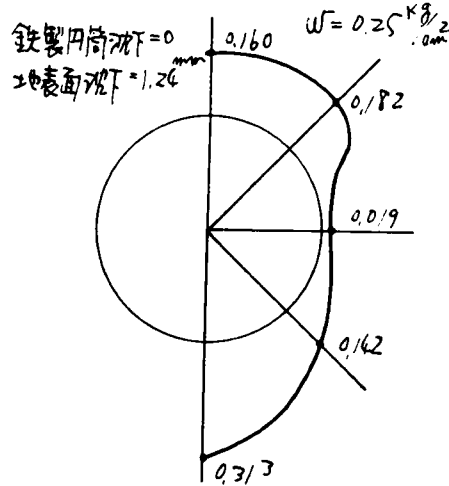
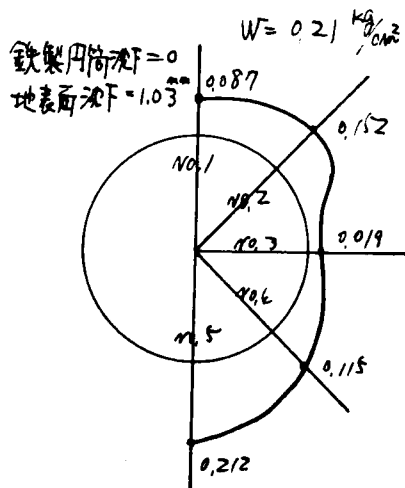
地山市民会館前の土(含水比29%)の場合 (単位  $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ )



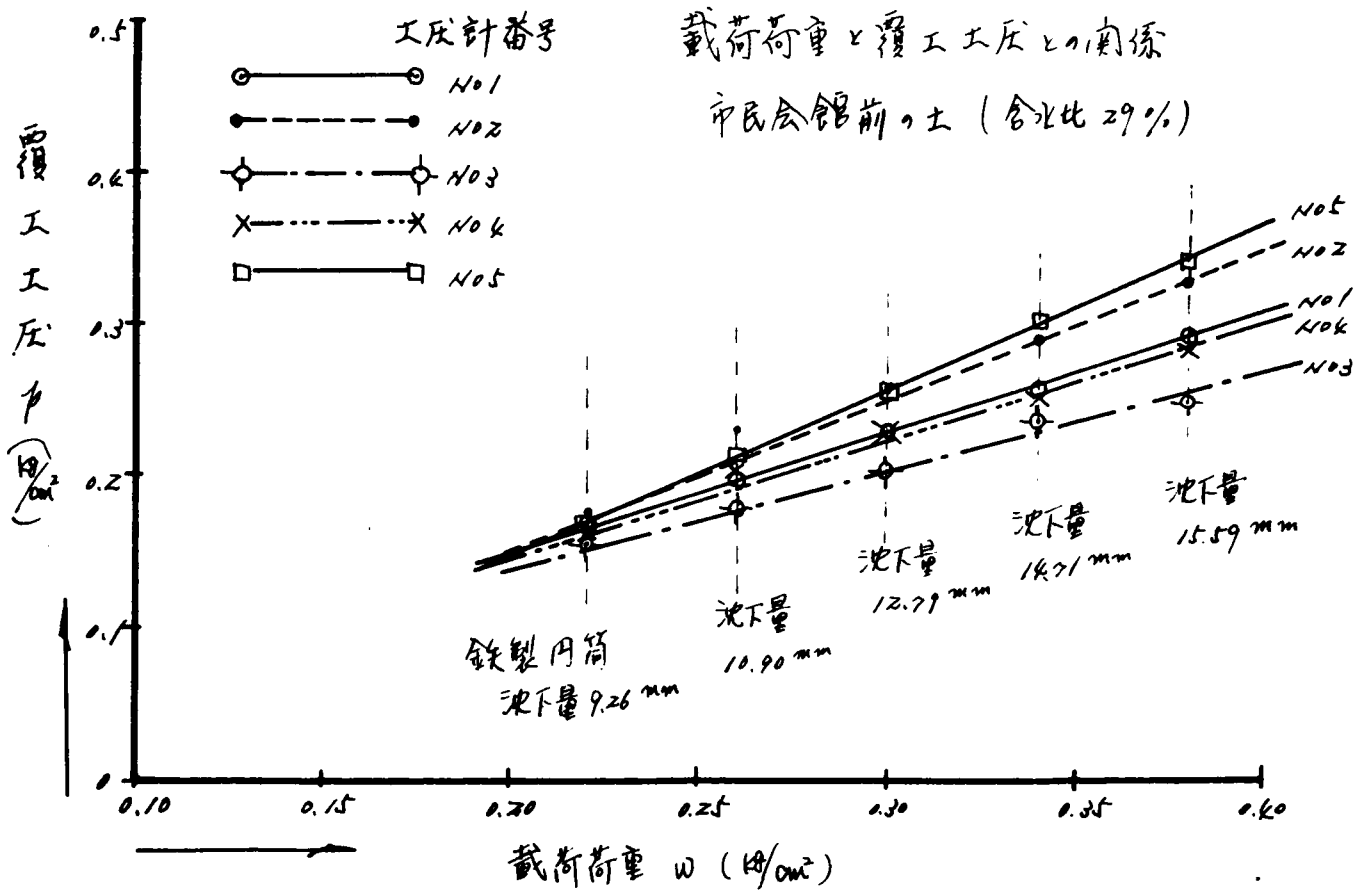
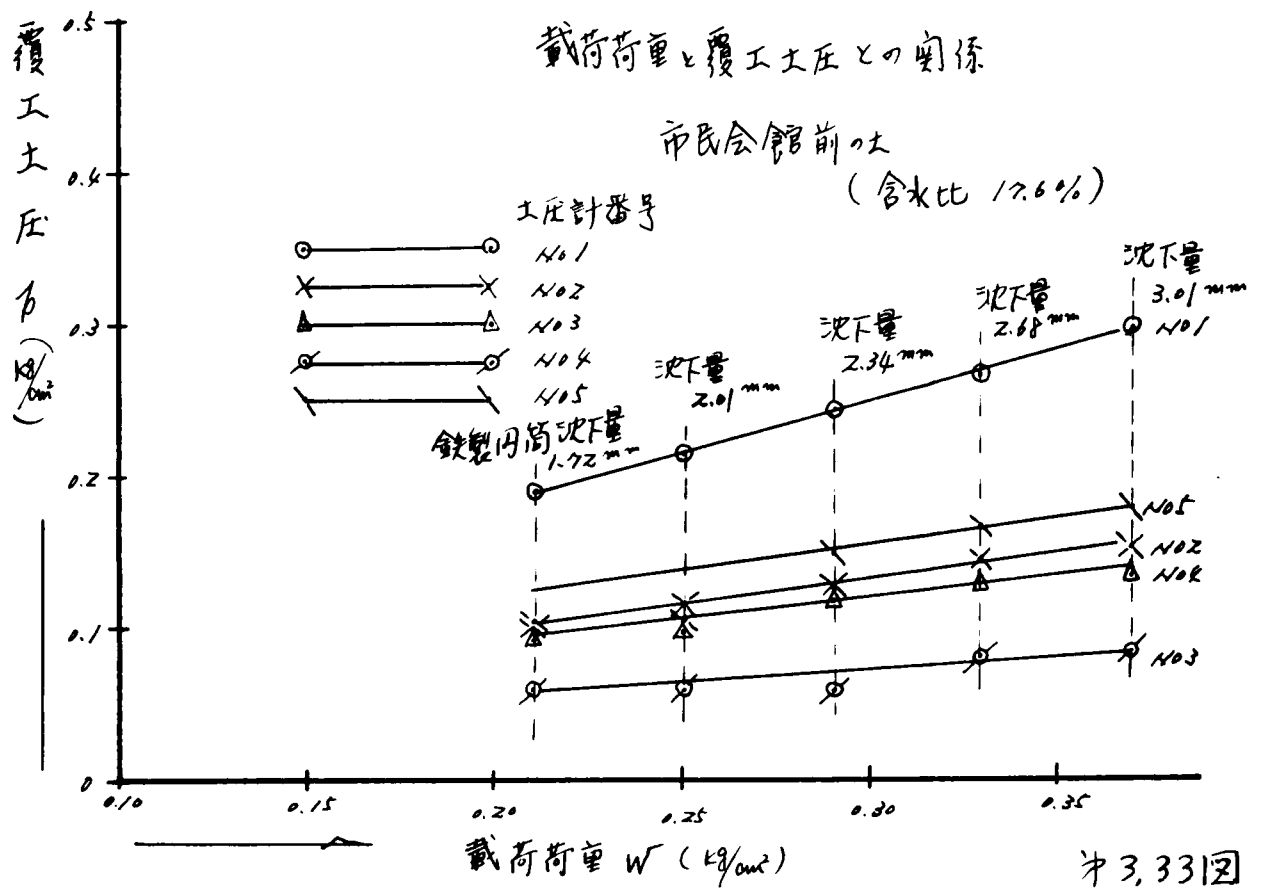
※3.31図

地山の豊浦標準砂の場合

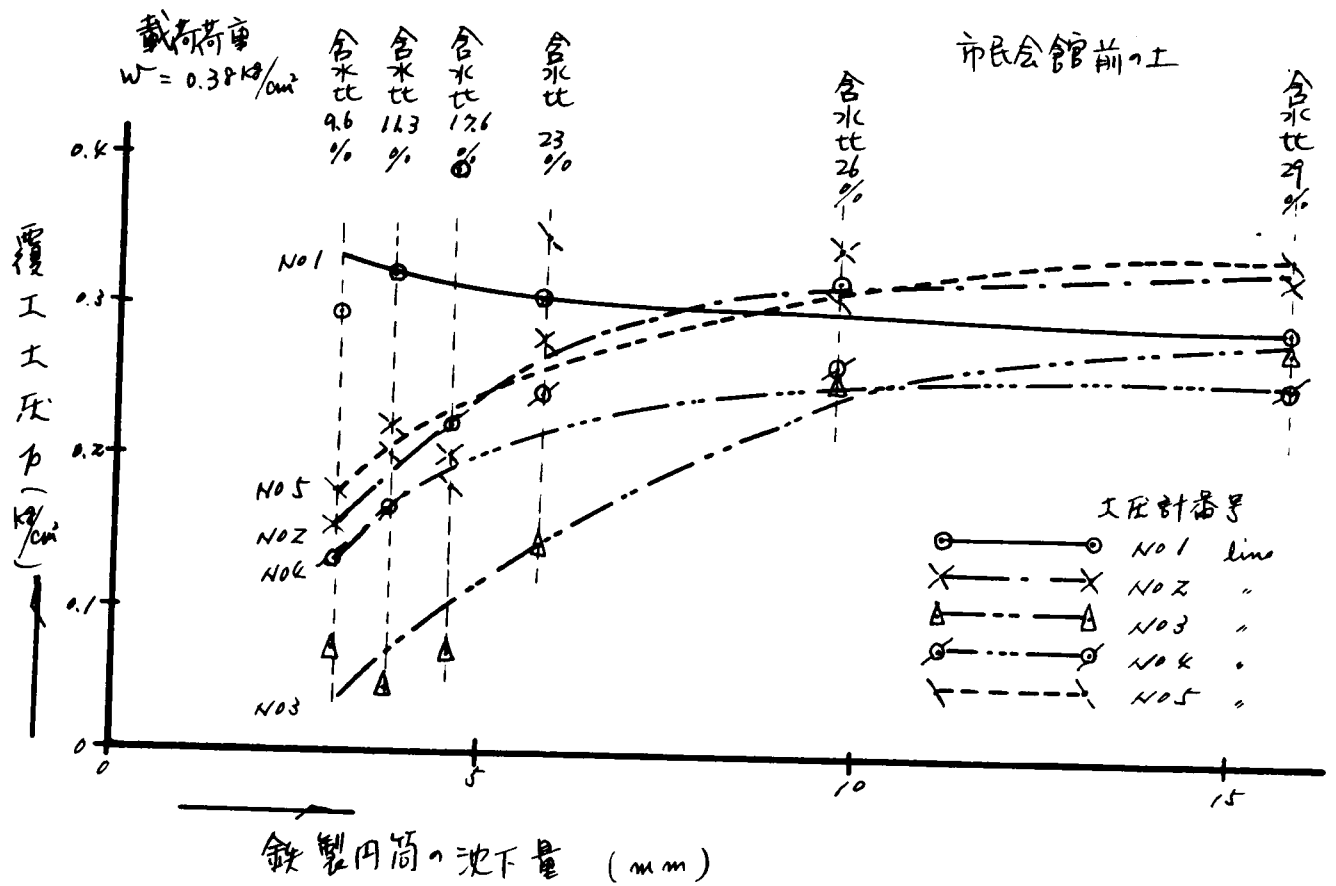
(単位  $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ )



第 3.32 図



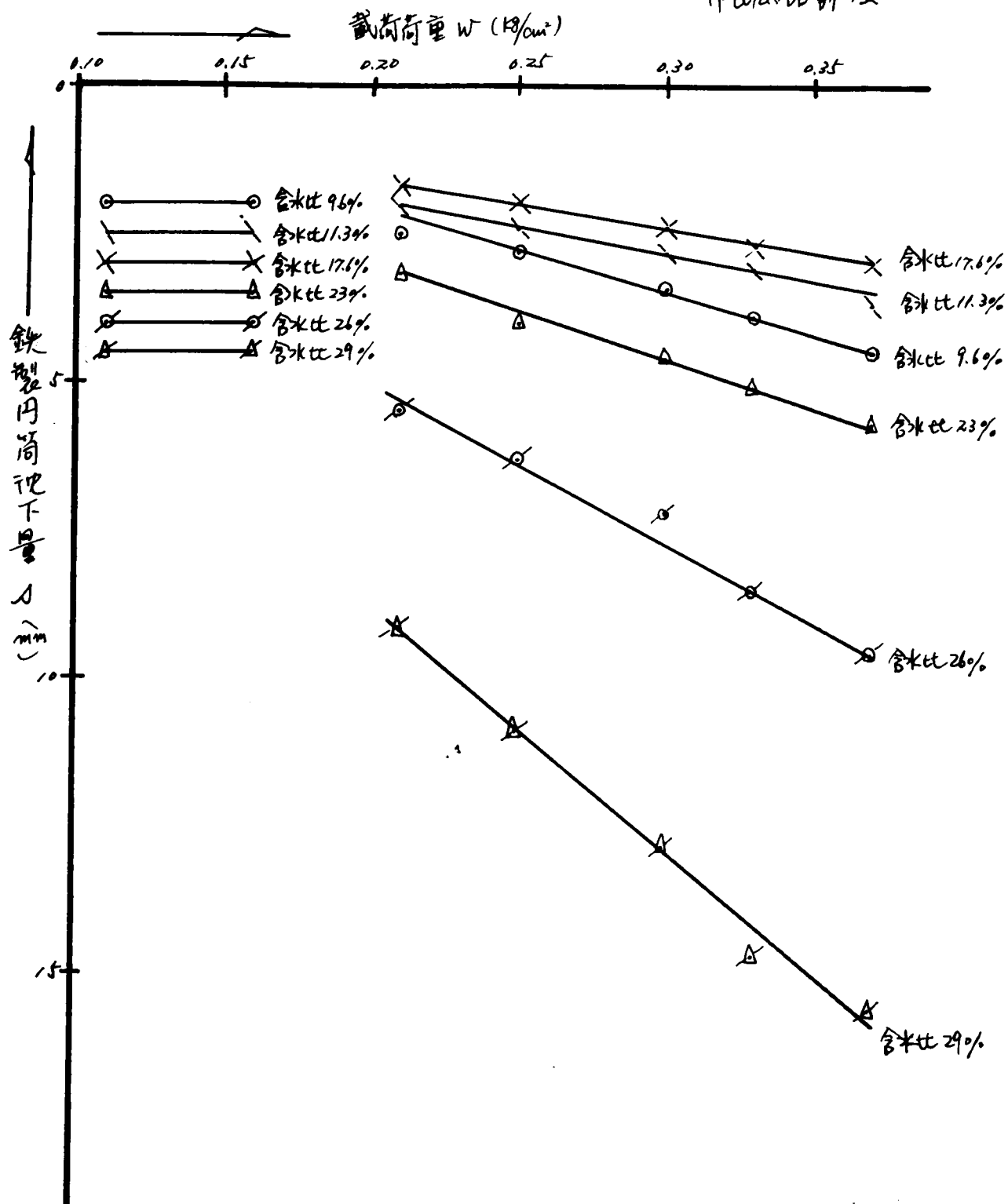
載荷荷重一定のとき鉄製円筒の沈下量と覆土工圧との関係



第3,351回

土の含水比が一定した時 載荷荷重と鉄製円筒の沈下量との関係

市民会館前の土



才 3, 36 図



### 第3節 結 語

本実験において模型実験箱内面と土との間の摩擦抵抗が相当きくために、地山荷重 $w$ と各土圧計の測定値との関連性を考えるとき、地山がトンネル軸方向に無限長に存在している実際の場合の状態のときの覆工土圧より本実験の土圧は少になると考えられ、その差が如何になるかを推定し難い故に、本実験結果より定性的に巻立トンネルの覆工土圧について考察することとする。粘性土の地山として徳島市秋田町土は $L/L$  30.8%, 含水比41.0%, 大工町土は $L/L$  61.8%, 含水比55.8%, 市民会館前の土は $L/L$  33.7%, その各試料の含水比29.0%となっていて、含水比が $L/L$ に近いときポアッサン比は0.50に近くなると考えられ、この場合について(2.1.43)式による円形素堀トンネル周辺の変位 $(u_r)_{el}$ と、(2.8.82)式による円形巻立トンネルの覆工土圧 $(\tau_{psc})_n$ の分布と本実験結果の覆工土圧の分布の比較を定性的に行う。

A模型試験においては巻立トンネルの模型の鉄製円筒が移動しないよう固定されている、実際に地山にトンネルを掘削して覆工する場合巻立トンネル自体が全体として沈下することはないから、覆工土圧分布はA模型試験の土圧分布になつてくると考えられる、事実ポアッサン比0.50のときの地山では第2編第2章の第2.4図に示すように円形素堀トンネル周縁の半径方向の変形量 $(u_r)_{el}$ は拱頂より側壁をへて拱底に向つて次第にその値が減少している、 $(u_r)_{el}$ はトンネル中心に向つて変形した量となつていて、A模型試験のときの覆工土圧 $p$ の分布も拱頂より側壁をへて拱底に向つて減少していて、理論による $(u_r)_{el}$ の分布と相似した形となつていて、同一地山で同一直径の円形トンネルでは $(u_r)_{el}$ と覆工土圧とは一定の関係が成立すると思へるから、A模型試験の場合が実際のトンネル覆工土圧をよく定性的に説明すると思へる。

B模型試験では巻立トンネルにあたる鉄製円筒が地山荷重にあたる載荷により自由に移動するような構造の試験であつたが、この鉄製円筒の沈下の $h$ のときはA模型試験のときの覆工土圧の分布と相似した傾向をもつて居り、拱頂より側壁をへて拱底に向つて覆工土圧は減少している、しかしこの鉄製円筒の沈下が非常に大になると覆工土圧分布は拱頂より側壁をへて拱底に向つて土圧が増加する傾向を示している、これは第2編第8章の $(\tau_{psc})_n$ の理論式(2.8.82)式は巻立トンネルを地山にはめ込んで後、重力を地山にかけたときのもので、このときの地山の土のポアッサン比0.50となつていて覆工土圧 $(\tau_{psc})_n$ の分布は第258図に示すように拱頂より側壁をへて拱底に向つて増加している、B模型試験の市民会館前の土の試料の地山のときの覆工土圧分布と相似した傾向となつていて、しかしこれは実際のトンネルにおいてはあまり起らない現象である、ただ特殊な例としてW. S. House<sup>85)</sup>がDetroitで地表面下約18mの下水渠を建設したときのトンネル土圧測定においてこれと同じ土圧分布傾向が観測されている、これはChicago粘土地山中に内径2.9m、厚さ45cmの円管をなすトンネルでGoldbeck型土圧計がコンクリート巻立外面にとりつけられ土圧を測定されたものであつて、トンネルは余堀とそれに伴う建物沈下を最小限に防ぐため圧縮空気工法を用いた、土圧は圧縮空気を抜いたときから測られ10年間測定が継続されたが、最初圧縮空気をトンネル内にかけて沈下をとめていたが、

急に減圧して空気圧を零としたため荷重条件がかわり、本実験のB模型試験と相似した地山荷重状態となつて、測定土圧分布も拱頂土圧より拱底土圧が大となつたと思へる。

砂地山についてはA模型試験ではアーチアクションの作用により覆工土圧が地山荷重すなわち地表面よりトンネル迄の土被り厚さに影響されないことが定性的によく示されている、このことは伊藤博士<sup>86)</sup>によつても理論づけられている。

以上述べたように本実験によつて巻立トンネルの覆工土圧について定性的ではあるがその分布の傾向が明らかにされたのである。



## 第5章 互層地山中の素堀円形トンネル周辺応力分析に関する実験

### 第1節 実験装置及び実験方法

第2編第7章において互層地山中の素堀円形トンネルの周辺応力分析について理論的研究を行なったが、互層をなす成層の厚さがトンネル断面の寸法に比べて小なるとき近似的に擬似均質異方性体としての地山中の素堀円形トンネルの問題としてトンネル周辺応力分布を求めたが、この理論を検証せんがためにつぎのような実験装置によってトンネル周辺応力分布を求めたが、この理論を検証せんがためにつぎのような実験装置によってトンネル円孔周縁上の接線方向直応力を測定して理論値と比較した。

理論は擬似均質異方性体の弾性理論より誘導されている故に、実験に使用する材料として、比較的この条件をみたすとみられるラワン材を用いた。このラワン材の繊維方向とこれと直交する方向の主弾性係数の比は第2節に述べるように相当大きくなっている。実験方法は次の二つの順で行った。

(1) ラワン材の主弾性係数、及び繊維の方向と荷重方向の角が異つたときの荷重方向の弾性係数の測定

(2) ラワン材の板にトンネル円孔にあたる円孔をあけて、地山荷重の載荷状態で載荷して円孔周縁の接線方向直応力を測定すること。

この測定のためにラワン材に荷重をかけたときの力と歪を測定する装置としては高橋氏、森田氏<sup>8)</sup>の考案された半月リング歪計を用いた。これは写真～3.20に示すように厚さ0.7mm、幅20mmの焼青銅板を半径16mmの半月に曲げて、その両端はラワン材にくりこみ設置できるように二ヶの突起を有したもので、この焼青銅板の中央の両面にSR-4電気抵抗線歪計をはりつけた。この詳細は第3.37'図に示している。このSR-4歪計は新興通信工業K.K.のS<sub>2</sub>型、標点距離3mm、電気抵抗120Ω、ゲージ率175のものである。この半月リング歪計の第3.37'図に示す両端の間隔ABの伸縮量をdial gage ( $\frac{1}{100}$ mm読み)で測定し、AB方向の歪を求め、このときのSR-4歪計の読みをインデキータによって測定する。5ヶの半月リング歪計のこの歪とSR-4歪計の読みによって検定線を作れば何れも直線関係が成立することが判った。写真～3.20はこの検定のための実験装置を示している。

(1) ラワン材の弾性係数の測定

厚さ2.8cm、10×10cmの大きさのラワン材で、繊維方向の載荷方向よりなす角 $\delta' = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ, 90^\circ$ をなす5ヶの材料を作り、これに前述の半月リング歪計の第3.37'図のAB方向が荷重方向と一致するようにとりつける。さうしてこの材料の荷重方向にアムスラー試験機により荷重を段階的に増加しながらかけて、半月リング歪計の読みを測定する。この実験より各単位面積当りの荷重に対するその材料の荷重方向の歪が前述の検定曲線より求められる。これによって繊維方向と載荷方向のなす角 $\delta'$ のそれぞれの値に対する弾性係数が求められる。なおポアッサン比はこの半月リング歪計と直交する方向にもう一つの半月リング歪計を設置して、その両者の歪の測定値の比によって求められる。

(2) トンネル円孔周縁上の接線方向直応力の測定

写真～3.21に示すように2.8cmの厚さのラワン材の30×30cmの正方形の中央に素堀トンネル円孔となる直径10cmの円孔をくりぬいて、この円孔縁に沿ってその円孔内面に半月リング歪計を設置した。その配置位置は第3.38図(a)、(b)に示す。(a)の場合は繊維方向と地山荷重が直交する場合であり、(b)の場合は繊維方向と地山荷重方向と一致する場合である。半月リング歪計の番号と位置を表～3.19に示す。なお地山荷重は等分布荷重となる

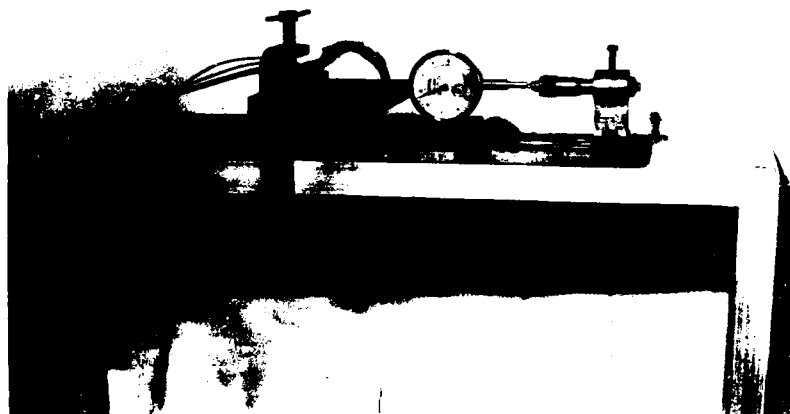


写真 ~ 3.20



写真 ~ 3.21



写真 ~ 3.22

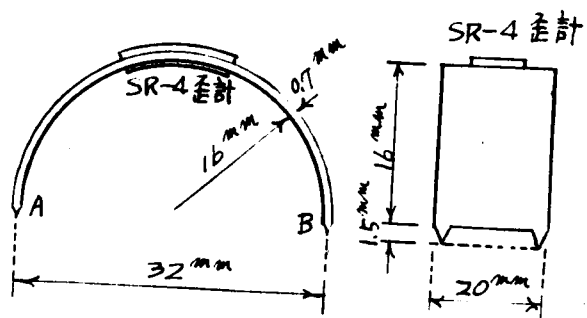
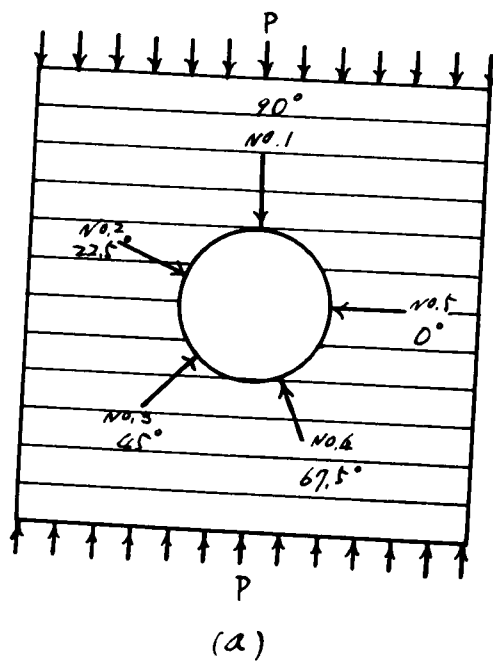
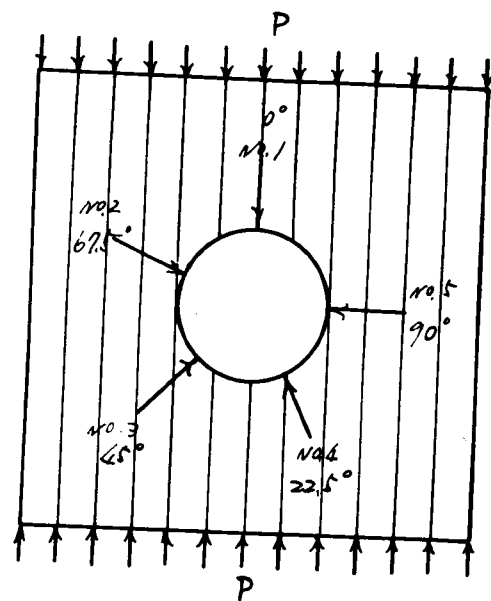


図 3, 37



(a)



(b)

図 3, 38

よう写真 ～ 3.21 の上方に示す装置とし 荷重はアムスラー試験機で段階的に増加し、その荷重ごとに半円リング歪計の読みをインデキータによって測定した、その全体の装置を写真 ～ 3.22 に示す。

表 ～ 3.19 半円リング歪計番号と円孔縁上の位置

半円リング歪計番号		N0.1	N0.2	N0.3	N0.4	N0.5
半円リング歪計の位置の繊維方向となす角	地山荷重方向と繊維方向とが直交するとき	90°	22.5°	45°	67.5°	0°
	地山荷重方向と繊維方向と一致するとき	0°	67.5°	45°	22.5°	90°

## 第2節 実験結果及びその考察

前節の(1)のラワン材の弾性係数の測定法によって測定された歪 $\epsilon$ と圧縮応力 $\sigma$ との間の関係を図示したものが第3.39図である。これより弾性係数 $E$ は $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$  によって求れば表～3.20に示すようになる。 $E$ と(荷重方向と繊維方向となす角) $\delta'$ との関係は第3.40図に示す。 $\delta' = 90^\circ$ のときは最小主弾性係数 $E_y = 6,750 \text{ kg/cm}^2$ となり、 $\delta'$ が零に近づくに従って急激に増加して、 $\delta' = 0$ のときは最大主弾性係数 $E_x = 170,000 \text{ kg/cm}^2$ となる。

表 ～ 3.20  $\delta'$  と  $E$  との関係

$\delta'$	0°	22.5°	45°	67.5°	90°
$E (\text{kg/cm}^2)$	170,000	30,000	16,000	9,250	6,750

つぎにラワン材に円孔をあけて載荷する前節の(2)の実験法において、(a)繊維方向と地山荷重方向とが直交する場合(第3.38図(a)参照)の半円リング歪計により円孔周縁上の点の歪 $\epsilon$ を測定し、 $\epsilon$ と $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ よりトンネル円孔周縁上の点の接線方向直応力 $\sigma_\theta$ を求めたものを表～3.21に示す。このときの $\delta'$ の値に対する弾性係数 $E$ の値は表～3.20のものを用いる。 $\sigma_p$ の分布を第3.41図に示す。ただし

表 ～ 3.21 地山荷重と繊維方向と直交する場合の  
トンネル円孔周縁接線方向直応力 $\sigma_\theta$ の測定値

半円リング歪計番号	N0.1			N0.2			N0.3			N0.4			N0.5		
$\delta'$	0°			67.5°			45°			22.5°			90°		
測定値 地山荷重 $p (\text{kg/cm}^2)$	歪 $\epsilon$ ( $10^{-2}$ )	$\sigma_\theta$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$\frac{\sigma_\theta}{p}$	歪 $\epsilon$ ( $10^{-2}$ )	$\sigma_\theta$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$\frac{\sigma_\theta}{p}$	歪 $\epsilon$ ( $10^{-2}$ )	$\sigma_\theta$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$\frac{\sigma_\theta}{p}$	歪 $\epsilon$ ( $10^{-2}$ )	$\sigma_\theta$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$\frac{\sigma_\theta}{p}$	歪 $\epsilon$ ( $10^{-2}$ )	$\sigma_\theta$ ( $\text{kg/cm}^2$ )	$\frac{\sigma_\theta}{p}$
1.190	-0.015	-25.50	-21429	0.038	3.515	2.954	0.027	4.32	3.630	0.003	0.9	0.756	0.070	4.73	3.975
2.380	-0.018	-30.60	-17000	0.078	7.215	3.032	0.048	7.68	3.227	0.003	0.9	0.378	0.121	8.17	3.424
4.762	-0.039	-66.30	-17000	0.156	14.430	3.030	0.097	15.52	3.259	0.006	1.8	0.378	0.233	15.73	3.303
7.142	-0.067	-113.90	-16999	0.234	21.645	3.031	0.136	21.76	3.047	0.003	0.9	0.126	0.342	23.09	3.233
9.523	-0.085	-144.50	-16999	0.319	29.508	3.099	0.176	28.16	2.957	0	0	0	0.448	30.24	3.175

(負の符号は引張応力なることを示す)

$p$  は地山荷重の単位面積当りの面積である。

(6) 繊維方向と地山荷重方向とが一致する場合 (第3.38図) 参照) の半円リング歪計により円孔周縁上の点の歪を測定し、 $\varepsilon = \sigma$  よりトンネル円孔周縁上の接線方向応力  $\sigma_\theta$  を求めたものを表 ~ 3.22 に示す。このときの  $\delta$  の値に対する弾性係数は表 ~ 3.20 の値を用いる。 $\sigma_p$  の分布を第3.42図に示す。

表 ~ 3.22 地山荷重と繊維方向と一致する場合の

トンネル円孔周縁接線方向直応力  $\sigma_\theta$  の測定値

半円リング歪計番号	No. 1			No. 2			No. 3			No. 4			No. 5		
$\delta'$	$90^\circ$			$22.5^\circ$			$45^\circ$			$67.5^\circ$			$0^\circ$		
測定値 地山 荷重 $P$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	$\varepsilon$ ( $10^{-2}$ )	$\sigma_\theta$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	$\frac{\sigma_\theta}{P}$	$\varepsilon$ ( $10^{-2}$ )	$\sigma_\theta$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	$\frac{\sigma_\theta}{P}$	$\varepsilon$ ( $10^{-2}$ )	$\sigma_\theta$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	$\frac{\sigma_\theta}{P}$	$\varepsilon$ ( $10^{-2}$ )	$\sigma_\theta$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	$\frac{\sigma_\theta}{P}$	$\varepsilon$ ( $10^{-2}$ )	$\sigma_\theta$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	$\frac{\sigma_\theta}{P}$
1.202	-0.024	-1.622	-1.349	0.016	4.80	3.993	0.009	1.440	1.198	-0.006	-0.555	-0.462	0.018	30.60	25.458
2.405	-0.042	-2.839	-1.180	0.022	6.60	2.744	0.015	2.400	0.998	-0.009	-0.833	-0.346	0.030	51.00	21.206
2.810	-0.070	-4.725	-1.681	0.041	12.30	4.375	0.018	2.880	1.025	-0.016	-1.480	-0.527	0.061	103.70	36.904
7.215	-0.085	-5.738	-0.795	0.055	16.50	2.287	0.018	2.880	0.399	-0.022	-2.035	-0.822	0.076	129.20	17.907
9.620	-0.106	-7.155	-0.744	0.069	20.10	2.152	0.018	2.880	0.299	-0.031	-2.868	-0.298	0.100	170.00	17.672

(負の符号は引張応力なることを示す)

つぎにポアッサン比の値については第2編第7章の理論計算に必要なものとして  $y$  方向の圧縮による  $x$  方向の伸びを示すポアッサン比  $\nu_y$  を求めることとする。ただし  $x$  方向は繊維方向の最大弾性係数の方向で、 $y$  方向はこれと直交する最少主弾性係数の方向である。このラワン材で  $y$  方向の  $P = 35.34 \text{ kg}/\text{cm}^2$  の荷重に対し  $y$  方向の歪  $0.698$ 、 $x$  方向の伸びの歪  $0.0242$  より、

$\nu_y = \frac{0.0242}{0.698} = 0.0346$  の測定値がえられた。表 ~ 3.20 より  $E_x = 170,000 \text{ kg}/\text{cm}^2$ 、 $E_y = 6750 \text{ kg}/\text{cm}^2$ 、 $E_x/E_y = 25.2$  となる。これを用いて第2編第7章の理論計算式 (2.7.22) 式によって計算した  $\sigma_\theta$  を図示したものが第2.54図であって、 $\alpha = 90^\circ$  の場合が繊維方向と地山荷重方向と

が直交する場合で実験の第3.41図にあたる。 $\alpha = 0^\circ$  の場合が繊維方向と地山荷重方向と一致する場合で実験の第3.42図にあたる。この理論計算値と実験の測定値とを比較すれば次のようである。

(a) の繊維方向と地山荷重方向が直交する場合、 $\frac{\sigma_\theta}{P}$  の値の理論計算値と実験測定値の比較を側壁中央の点と拱頂拱底中央においてなせば表 ~ 3.23 に示すようである。

表 ~ 3.23 繊維方向と地山荷重方向が直交する場合  
 $\frac{\sigma_\theta}{P}$  の理論計算値と実験測定値の比較

	理 論 計 算 値	実 験 測 定 値
側壁中央の $(\frac{\sigma_\theta}{P})_{\theta=0}$	2.192	3.175 ~ 3.975
拱頂拱底中央の $(\frac{\sigma_\theta}{P})_{\theta=90^\circ}$	-5.14	-12.857 ~ -21.429
$ \frac{\sigma_\theta}{P} _{\theta=90^\circ}$ / $ \frac{\sigma_\theta}{P} _{\theta=0^\circ}$	2.35	4.07 ~ 5.43 平均 5.25

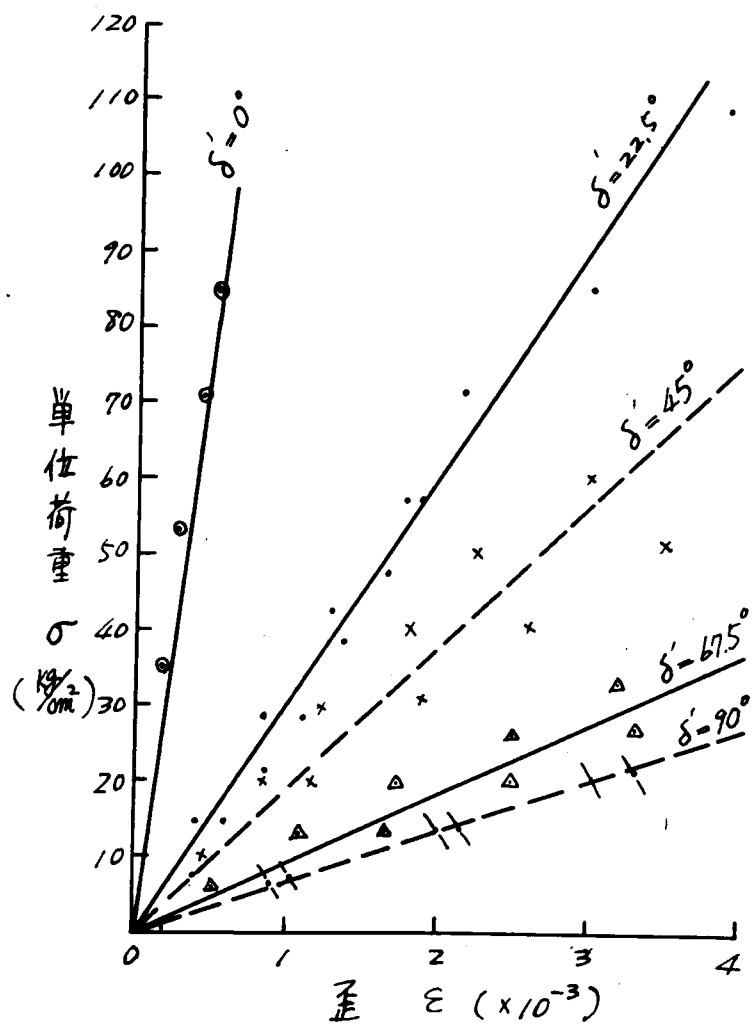
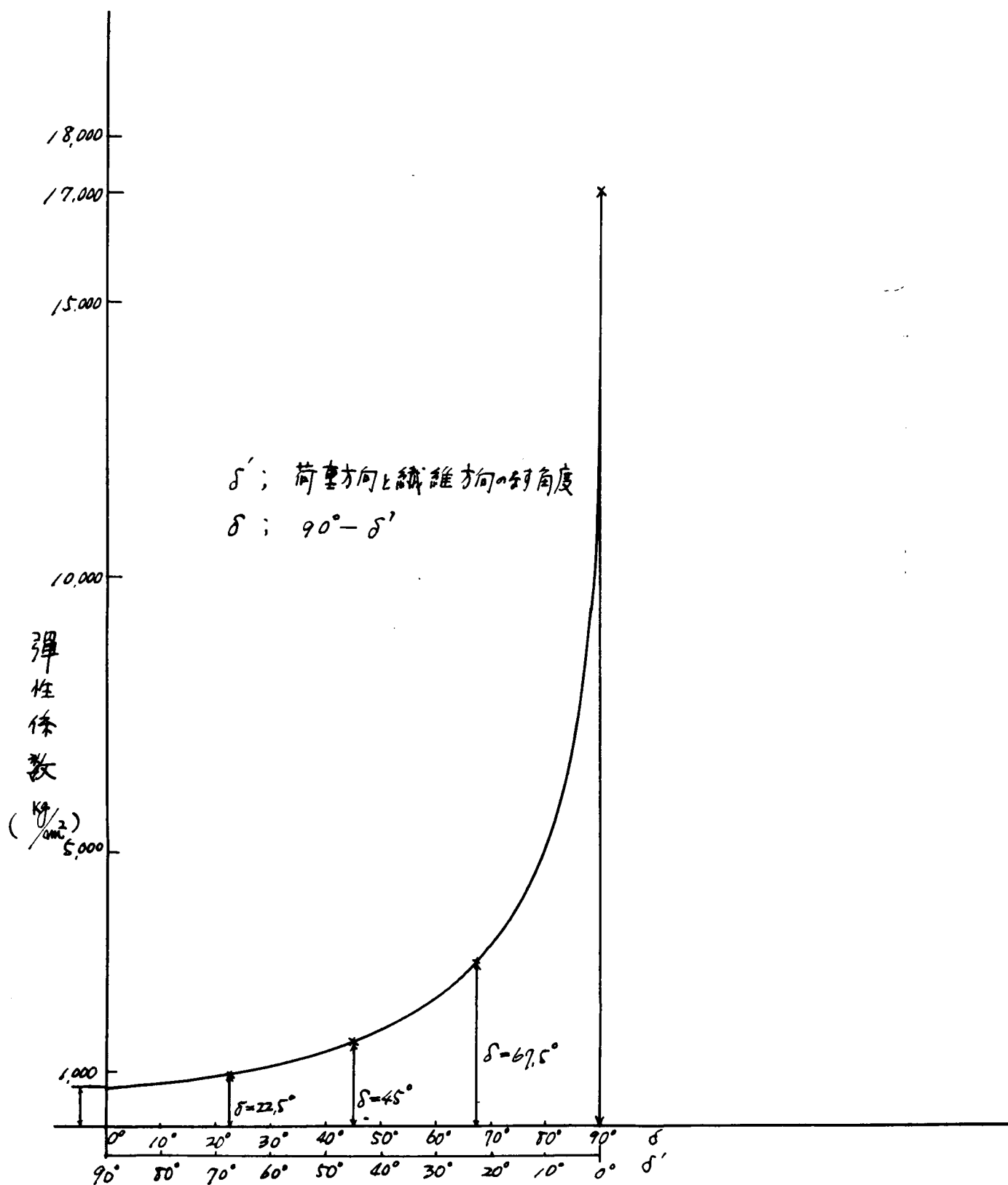
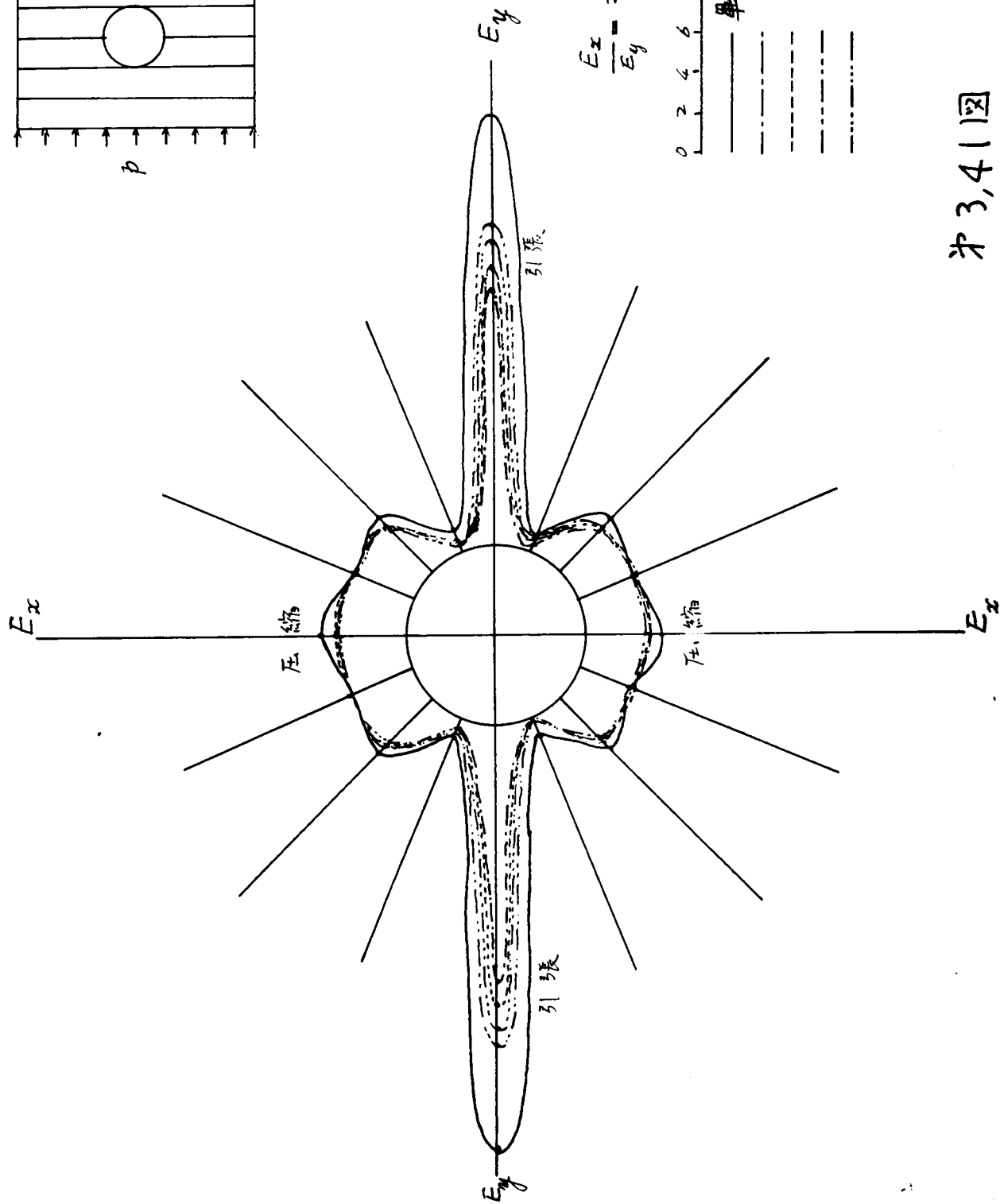
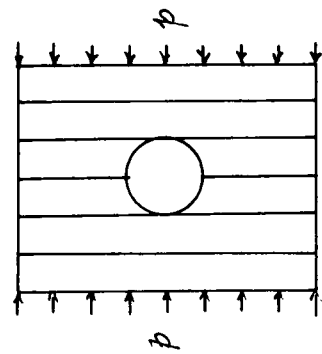


图 3.39



才3,40図

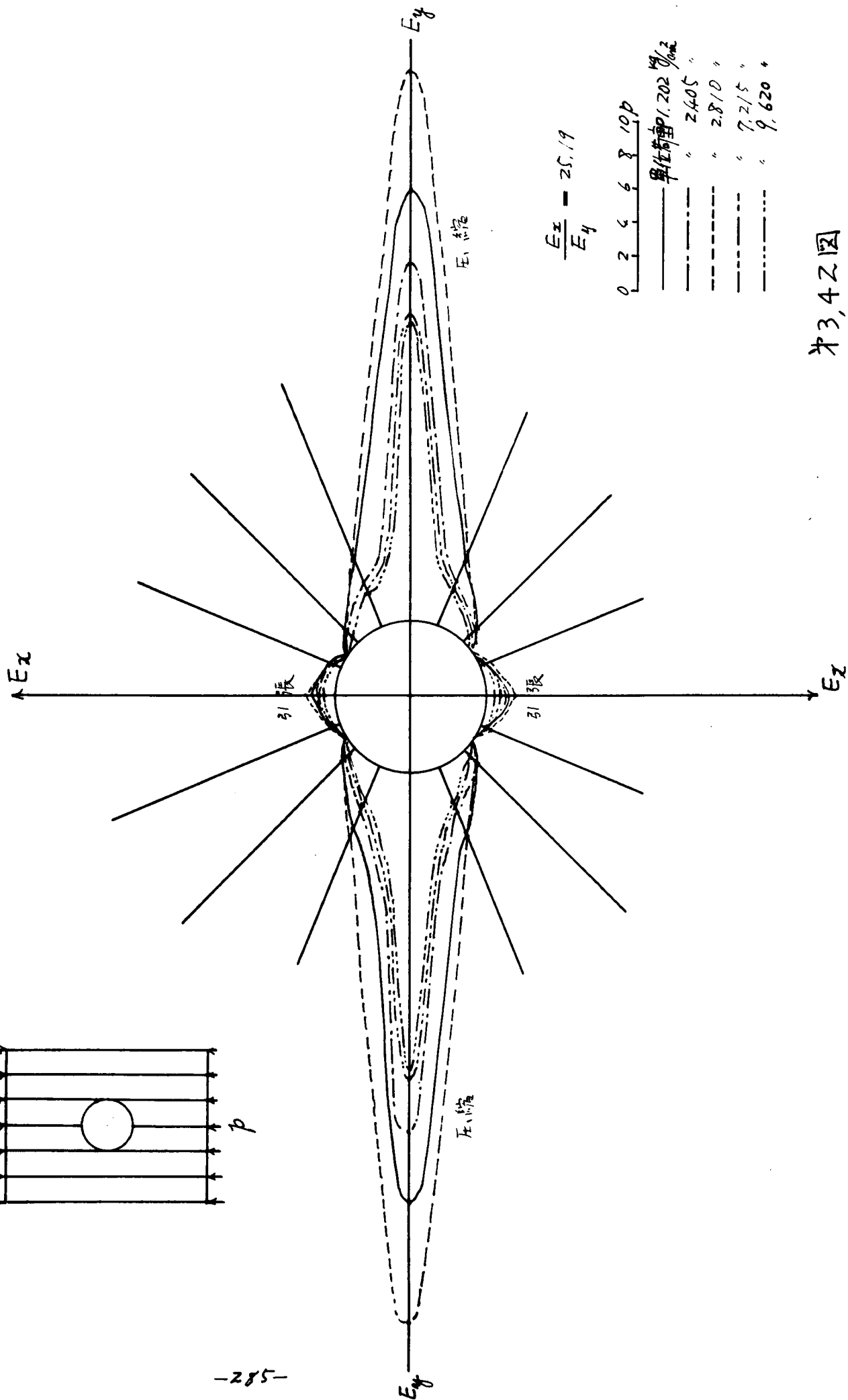
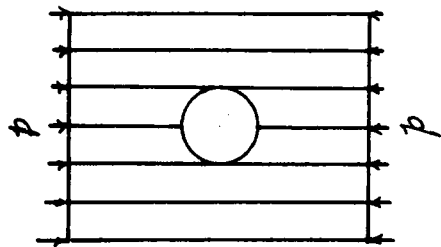


$$\frac{E_x}{E_y} = 25.19$$

0	2	4	6	8	10	$p$
—	—	—	—	—	—	單位荷重 $p = 1.190 \text{ kg/cm}^2$
---	---	---	---	---	---	" 2.380 "
---	---	---	---	---	---	" 4.762 "
---	---	---	---	---	---	" 7.142 "
---	---	---	---	---	---	" 9.523 "

第 3, 4 圖





$$\frac{E_x}{E_y} = 25.19$$

0	2	4	6	8	10	p
—	—	—	—	—	—	單位荷重 1.202 $\frac{kg}{cm^2}$
—	—	—	—	—	—	" " 2405 "
—	—	—	—	—	—	" " 2810 "
—	—	—	—	—	—	" " 7215 "
—	—	—	—	—	—	" " 9620 "

※3,42図

表 ~ 3.23 によれば拱頂拱底中央の引張応力が相当大きい値となっている。さうして理論計算値と実験測定値の差が相当ついているが、拱頂拱底中央の  $\frac{\sigma_{\theta}}{p}$  と側壁中央の  $\frac{\sigma_{\theta}}{p}$  との比をとつてみれば実験測定値は理論計算値の2.23倍となっている。

(b)の繊維方向と地山荷重方向が一致している場合、 $\frac{\sigma_{\theta}}{p}$  の理論計算値と実験測定値の比較を側壁中央の点と拱頂拱底中央においてなせば表 ~ 3.24 に示すようである。

表 ~ 3.24 繊維方向と地山荷重方向とが一致する場合

$\frac{\sigma_{\theta}}{p}$  の理論計算値と実験測定値の比較

	理 論 計 算 値	実 験 測 定 値
拱頂拱底中央の $(\frac{\sigma_{\theta}}{p})_{\theta=0^{\circ}}$	-0.21	-0.744 ~ -1.681
側壁中央の $(\frac{\sigma_{\theta}}{p})_{\theta=90^{\circ}}$	6.93	17.672 ~ 36.904
$\frac{(\frac{\sigma_{\theta}}{p})_{\theta=90^{\circ}}}{(\frac{\sigma_{\theta}}{p})_{\theta=0^{\circ}}}$	33.0	24.0 ~ 21.9 平均 23.0

表 ~ 3.24 によれば側壁中央の圧縮応力が相当大きい値となつていて、理論計算値と実験測定値の差が相当ついている。側壁中央の  $\frac{\sigma_{\theta}}{p}$  と拱頂拱底中央の  $\frac{\sigma_{\theta}}{p}$  との比をとつてみれば実験測定値は理論計算値の0.698となつて比較的近似している。この  $\frac{\sigma_{\theta}}{p}$  の比をとつたのは測定方法によつて入つてくる誤差を除いて理論計算と実験測定とを比較せんがためである。

第2.54図(d)の  $\sigma_{\theta}$  の分布状態と第3.41図の  $\sigma_{\theta}$  の分布状態とは比較的相似た形をとっている。また第2.54図(a)の  $\sigma_{\theta}$  の分布状態と第3.42図の  $\sigma_{\theta}$  の分布状態とは相似た形となっている。

### 第3節 結 語

この実験において半円リング歪計の両端の間隔が32mmもあり、トンネル円孔の模型の円孔の直径10cmなる故、トンネル円孔縁上の点の  $\sigma_{\theta}$  を測定したとしても、標点距離の少なむ何らか別の方法で測定できたとした時の正確な値とある差は生ずると考えられる。また理論計算値の  $\sigma_{\theta}$  と実験測定値の  $\sigma_{\theta}$  との差の生ずる原因としては、ラワン材の応力  $\sigma$  と歪  $\varepsilon$  との間に完全な直線性がなく、近似的に直線性があるとして歪を測定した値より応力を求めていることや、ラワン材の繊維の中には弾性係数の異なるものが並列して細かく互層をなして、その何れかの繊維に半円リング歪計が設置されているかは不明で測定された歪の値より応力を求めるとき、この補正のできないこと等である。また理論計算においてせん断弾性係数の値としては(2.74)式の近似式を用いたことによる原因も入つていていると考えられる。それ故に本実験の測定結果は定性的な  $\sigma_{\theta}$  の分布状態を示すものである。

以上のことより実験結果より定性的に論じて第2編第7章の理論はトンネル周縁上の応力について近似的であるが妥当のように考えられる。実際のトンネル円孔周辺の応力状態は以上のようにして求めた応力状態と幾分異なるところがある。それは圧縮応力は理論式による値となるが、引張応力が異なる場合がある。これは岩石地山の圧縮のときの弾性係数と引張のときの弾性係数とが異なることがある。実験において圧縮のときの弾性係数を求め、測定された歪から  $\sigma = \varepsilon E$

によって応力を求めている。また理論計算においても圧縮試験で測定された弾性係数を用いて応力を計算しているからである。故に実際のトンネル円孔周辺の応力状態を求める場合は岩石の圧縮・引張に対する弾性係数を測定して補正計算をしなければならない。

# 第4編 軟弱な地山中のトンネル 土圧に関する考察

## 第1章 軟弱な地山中のトンネルの最終土圧分布について

ポアッサン比が大きい $\phi$ に近くなるような地山は軟弱な地山であって、トンネル掘削前の地山中の重力による初期圧力は水圧的な土圧に近い応力状態となっている。このような地山にトンネルを掘削したときの巻立トンネル覆工に作用する土圧については、円形トンネルのときの理論として第2編第8章において述べた。この理論はトンネル素掘孔に密着する覆工をばねこんで後に地山に重力をかけたとき、この覆工に作用する土圧を求めたものである。弾性論に基づいて解いている故に覆工の変位も少で周囲の地山は相当軟弱でも剛なる覆工に変位を抑制されたときの土圧を求めることとなる。

また第3編第4章の実験において行ったA模型試験は実際の円形トンネルの覆工に作用する土圧分布に近いものを与えらるゝと考えられる。それはトンネル覆工に該当する模型の鉄製円筒を固定して地山荷重をかけていて、実際のトンネルにおいても覆工自体が全体的に沈下移動することは殆んどみかけられないからである。

実際のトンネルは已に初期応力として地圧が作用している地山中にトンネルを掘削する。この掘削によるトンネル周辺の応力集中の結果としてトンネル覆工に土圧を生ずるからである。故に第2編第8章の理論をそのまま用いるわけにはゆかず修正すべきである。この修正方法について次に論ずることとする。

第2編第8章において述べた円形巻立トンネルの覆工土圧 $(\tau_{pc})_r$ を求める理論式(2.8.83)式及びHanns Schmid<sup>26)</sup>の求めた素掘円形トンネル周縁の半径方向の変形量 $\{(u_r)_{e1}\}_s$ を求める理論式

$$\begin{aligned} \{(u_r)_{e1}\}_s = & \frac{1}{\mu_E} \left\{ -r \sigma_H (\mu_2 + \mu_0 q) + \left\{ \frac{1}{4} (2\sigma_1 \mu_2 + \sigma_2 \mu_0) \right. \right. \\ & - (\mu_1 + m \mu_2) w q \log \frac{r}{H} - \frac{\mu_0}{2} (m w + \frac{\sigma_2}{2}) q^2 \left. \right\} r^2 \sin \theta \\ & + \sigma_2 H \left\{ \mu_0 (1 - q^2) + 4 \mu_1 q \right\} r \cos 2\theta \\ & - \frac{\sigma_2}{4} \left\{ \mu_0 (1 + q^2 - 2q^3) + 4 \mu_1 q^2 \right\} r^2 \sin 3\theta \right\} \dots (4.1.1) \end{aligned}$$

(ただし、この式の各記号の説明は第2編第1章の(2.1.43)式に関する記号と全く同じものである。)とがある。この二式は何れもトンネル円孔を掘削した後に地山に重力をかけたものである。これは実際のトンネルにおいて重力による地山荷重の作用している不擾乱の地山にトンネルを掘削して後におこる変形量、土圧とは異なる。そこでいま(2.8.83)式によって求められる $(\tau_{pc})_r$ と(4.1.1)式によって求められる $\{(u_r)_{e1}\}_s$ との相関性を求める。この説明のため次に述べる計算例によることとする。

第2編第8章第7節の計算例の場合をとつてみると、(2, 8, 83) 式の記号の数値として地山の Lamé 常数は  $\lambda_g = \infty$ ,  $\mu_g = 20 \text{ kg/cm}^2$  としており、このとき

$$K_g = \frac{\lambda_g + 3\mu_g}{\lambda_g + \mu_g} = 1 \quad \text{地山のポアッソン比 } \nu_g = \frac{2(\lambda_g + \mu_g)}{\lambda_g} = 2 \quad \text{となる.}$$

地山の単位体積重量  $w_g = 0.0016 \text{ kg/cm}^3$ , 円形トンネル覆工の内壁の半径  $500 \text{ cm}$ , 巻立厚さ  $40 \text{ cm}$ , トンネル覆工外周の半径  $R = 540 \text{ cm}$ , トンネル中心の地表面よりの深さ  $d = 2000 \text{ cm}$  としている。これを用いて (4.1.1) 式の記号の数値は次のようになる。

$$H = 2000 \text{ cm}, \quad \mu = 2, \quad \gamma = 20 \text{ kg/cm}^2, \quad \rho = 540 \text{ cm}, \quad w = 0.0016 \text{ kg/cm}^3, \quad r = 540 \text{ cm}$$

$$\mu_0 = \mu + 1 = 2 + 1 = 3, \quad \mu_1 = \frac{1}{\mu} (\mu + 1)(\mu - 1) = \frac{1}{2} (2 + 1)(2 - 1) = 1.5$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\mu} (\mu + 1)(\mu - 2) = \frac{1}{2} (2 + 1)(2 - 2) = 0, \quad m = -\frac{\mu_2}{4\mu_1} = -\frac{0}{4 \times 1.5} = 0$$

$$\rho = 1, \quad \sigma_1 = 0.0016 \text{ kg/cm}^3$$

$$\sigma_2 = \frac{w}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu - 1}\right) = \frac{0.0016}{2} \left(1 - \frac{1}{2 - 1}\right) = 0, \quad E = 2\gamma \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = 2 \times 20 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 60 \text{ kg/cm}^2$$

この記号の数値を (4.1.1) 式に代入すれば

$$\{(u_r)_{ei}\}_s = -43.2 + 17.01 \sin \theta \quad (4.1.2)$$

となる。この式によって求めた  $\{(u_r)_{ei}\}_s$  の値と (2.8.83) 式によって求めた  $(\tau_{\theta\theta})_r$  の値として

$$(\tau_{\theta\theta})_r = -3.10 + 0.432 \sin \theta \quad (4.1.3)$$

によって求めた表 ~ 2, 3 / の値をまとめて表 ~ 4 / に示す。

さらに表 ~ 4 / に示すように、この計算例における  $\{(u_r)_{ei}\}_s$  の単位量に対する  $(\tau_{\theta\theta})_r$  の値、すなわち  $(\tau_{\theta\theta})_r / \{(u_r)_{ei}\}_s$  の比を求める。この比をとった理由はトンネル円孔を穿った円環状の覆工をばめこんで後に重力による地山荷重をかけたときの巻立トンネルの覆工土圧と素堀円形トンネルの円孔を穿つて後重力による地山荷重をかけたときのトンネル周縁の半径方向の変形量とは一定の同係数存在すると考えられるからである。この  $(\tau_{\theta\theta})_r / \{(u_r)_{ei}\}_s$  の比の  $\theta$  による変化の様子を第 4 / 図の突起の曲線で示す。(4.1.2) 式、(4.1.3) 式よりポアッソン比が 0.5 の地山では

$$\frac{(\tau_{\theta\theta})_r}{\{(u_r)_{ei}\}_s} = \frac{a + b \sin \theta}{A + B \sin \theta} \quad (\text{ただし } a, b, A, B \text{ は定数})$$

の関係があり、 $\theta$  についての函数となっている。

$(\tau_{\theta\theta})_r$  と  $\{(u_r)_{ei}\}_s$  とを対応させるのは、このような地山荷重のがかかる条件では素堀のままではトンネル周縁は自由に  $\{(u_r)_{ei}\}_s$  の変形をなすか、この変形を抑制するよう覆工を素堀円孔にはめこめば、トンネル覆工には  $(\tau_{\theta\theta})_r$  の土圧がトンネル半径方向に作用すると考えられるからである。

表 ~ 4. 1

$\theta$	$90^\circ$	$60^\circ$	$30^\circ$	$0^\circ$	$-30^\circ$	$-60^\circ$	$-90^\circ$
$\{(u_r)_{el}\} \text{ (cm)}$	-41.499	-41.727	-42.350	-43.200	-44.051	-44.673	-44.901
$(\tau_{psc})_r \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$	-2.67	-2.73	-2.88	-3.10	-3.32	-3.47	-3.53
$(\tau_{psc})_r \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} / \{(u_r)_{el}\}_s$	0.0644	0.0655	0.0682	0.0718	0.0754	0.0777	0.0787
$(u_r)_{el} \text{ cm}$	-85.72	-80.024	-64.460	-43.200	-21.940	-6.376	-0.680
$(\sigma_{rc})_r \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$	-5.52	-5.24	-4.40	-3.10	-1.65	-0.50	-0.05

(応力の負の符号は圧縮応力を表わし、変形量の負の符号はトンネル中心に向うものを表わす)

実際の素掘円形トンネル周縁の半径方向の変形量  $(u_r)_{el}$  は第2編第1章に述べたように(2.1.43)式で示されるものである。これは始めから重力による地山荷重のかかっている擾乱されない地山に円形トンネルを掘削して円孔をあけたことによりおこる変形量である。この計算例の数値を用いて、

$$(u_r)_{el} = -43.2 - 42.52 \sin \theta \quad \dots \dots \dots (4.1.4)$$

となる。そこでこの変形量  $(u_r)_{el}$  をおこさぬように地山材料に比べて剛な円形覆工で変形を抑制する。このような覆工は円孔に密着してはめこまれるような円形覆工であつて、このような構造物の覆工に作用する半径方向の土圧  $(\sigma_{rc})_r$  は(4.1.4)式で求めた  $(u_r)_{el}$  に比例すると考えられる。その比例係数が  $(\tau_{psc})_r / \{(u_r)_{el}\}_s$  となる。故に

$$(\sigma_{rc})_r = (u_r)_{el} \frac{(\tau_{psc})_r}{\{(u_r)_{el}\}_s} \quad \dots \dots \dots (4.1.5)$$

として実際の巻立トンネルの覆工土圧を求めることができぬ。この計算例の  $(u_r)_{el}$  及び  $(\sigma_{rc})_r$  を表 ~ 4.1に示し、 $(\sigma_{rc})_r$  の土圧分布を示したのが第4.2図である。これは第3編第4章のA模型試験のときの覆工土圧分布とも相似た形である。またこの  $(\sigma_{rc})_r$  の土圧分布は結論第1図の大野トンネルの覆工土圧分布と定性的に相似ている。大野トンネルは偏圧のため拱頂土圧より肩の方の土圧が大きいとなっているが、仰拱の土圧は少となっている。この計算例でも仰拱の土圧は少である。しかし第2編第2章第3節の計算例を用いるときは第2.4図のような  $(u_r)_{el}$  の分布となるから、仰拱も拱頂より少ではあるがなおかなりの土圧が作用する。これが盤膨の原因となると考えられる。日振トンネルの盤膨は軟弱な地山で、そのポアッサン比の0.5に近いとみられ、せん断弾性係数も小なるためにおこつたと考えられる。このトンネルでは地山は頁岩が大部分で吸水膨脹の原因はあまりみとめられないと報告されている<sup>22)</sup>。この実際の例より推論して実際のトンネル覆工の土圧は近似的ではあるが覆工材料が地山材料より相当剛な構造物のもののときは(4.1.5)式の仮定にたつて計算してよいと考えられぬ。

いま前述したものは地山材料の強度と比較して地山荷重が少で、トンネル周辺の応力より求めたMohrの応力円が限界線の内側にある弾性状態にある場合の変形量  $(u_r)_{el}$  と覆工土圧について論じたのであるが、弾性論より求めたトンネル周辺の応力状態より求めたMohrの応力円が限界線と交わる場合は、トンネル周辺近傍は降伏条件を満足しなければならない状態、すなわち塑性状態になる。このときの円形素掘トンネル周辺の応力については第2編第4章に述べた摩擦性塑性体とみなされる地山中の素掘円形トンネルの周辺応力分布の理論式によるべきである。これによれば弾塑性境界とトンネル円孔間の塑性領域の応力はトンネル周辺が弾性状態にあるときよりも少となり応力緩和の現象を呈している。さうして一般にトンネル拱頂より側壁を径て拱底に向つて応力は少となっている。ただしこの場合地山土がトンネルに向つてくる変形量を求める理論式は不明であ

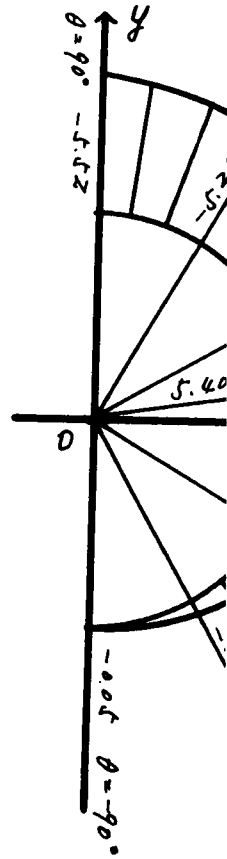
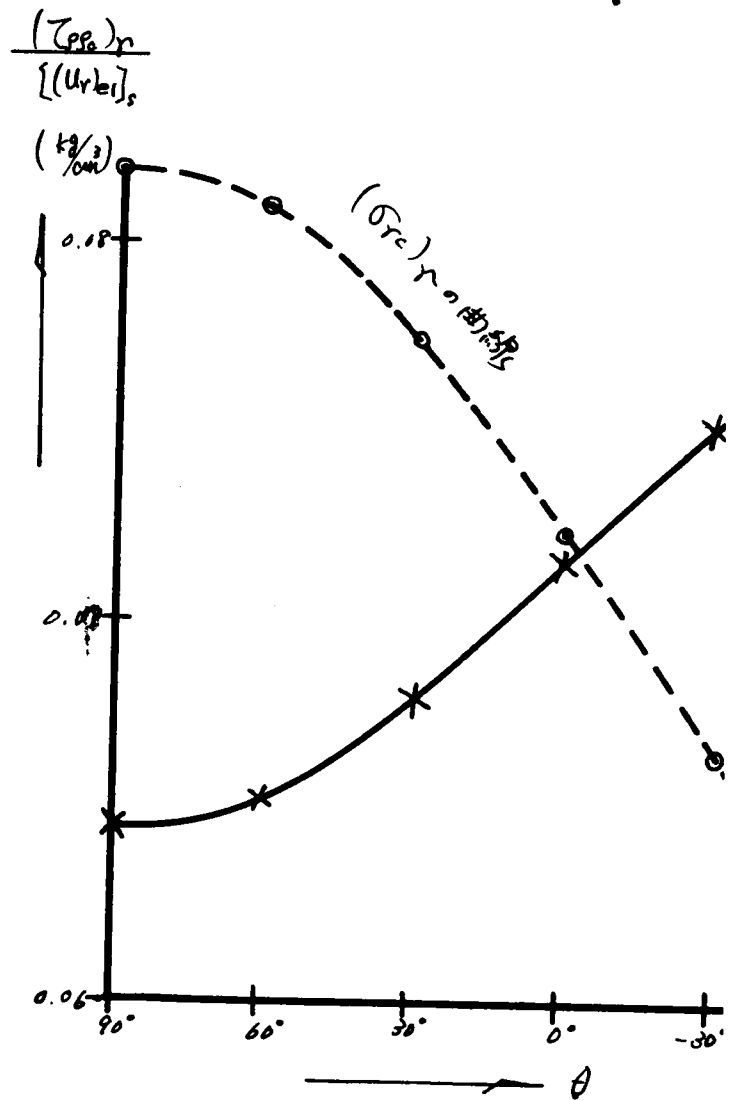


图4.2



るが、かなり大きな量と考えられる。第2編第4章の理論を応用して覆工土圧と弾塑性境界の大きさ及び塑性領域中の応力を求めることは出来るが計算が非常に手数を要することとなる。地山材料の土の内部摩擦角がなく粘着力のみある粘土であるとき、この地山中の円形トンネルの周辺の弾塑性問題として第2編第5章で述べた理論を導いたが、これによって覆工土圧 $P$ と弾塑性境界の大きさとの相関性が数値的に計算できる、すなわち $P$ が大となれば次に弾塑性境界は小さくなり、更に $P$ が大となると弾塑性境界は円形トンネルを包み、トンネル周辺の一部分のみが塑性領域となることを示す。また $P$ が大となれば塑性領域中の応力も大となるが、全領域が弾性状態のときの応力よりは小となっている、すなわち応力緩和を生じているからである。トンネル周辺が塑性状態となっているとき、押出してくる地山の量は相当大であるが、これを排除しながら塑性流動を許し、弾塑性境界は拡大し、このとき支保工圧力または覆工土圧 $P$ はそれにつれて減少する、その様子は計算例として第2.3.2図に示すようである。このことは日振トンネルにおいて数度の繰返し施工後やつと地圧を支えることのできた工事例<sup>89)</sup>をみれば、この理論の妥当性を認めることができると思われる。



## 第 2 章 軟弱な地山中のトンネル土圧の経時的变化について

前章で述べた最終土圧は円形トンネルを掘削して直ちにこの円孔にあてはまる円形覆工をはめ込んだ構造で、長時間経過した後には作用する覆工土圧である。第 2 編第 2 章及び第 3 章で述べたように地山材料が rheology の性質をもつときは、素掘円形トンネル周縁の半径方向への変形量  $u_r$  はトンネルを掘削した瞬間は零で、時間の経過に従って  $u_r$  は増大して長期間経過後  $(u_r)_{e1}$  の値に達する。但しこの場合はトンネル周辺の応力が上限降伏値以下の弾性状態になっている場合である。このときの  $u_r$  の経時的变化は地山が粘弾性体とみなされるときは第 2 編第 2 章第 3 節の計算例で示した第 2.6 図や、第 3 編第 1 章第 2 節の模型実験の第 3.3 図のようになる。しかしこの第 3.3 図でわかるようにある時間迄は急激に  $u_r$  は増加するが、その後もやはり徐々に  $u_r$  は増加している。このことは地山材料をより一般化した粘弾性体とみなして変形挙動を論じなければならぬことを示している。この理論については第 2 編第 3 章に述べている。この理論によって得られる変形挙動の様相は日振トンネルの例として緒論第 6 図で示す変形量の経時的变化の様相と相似している。

(2.3.25) 式及び (2.3.26) 式で示される理論式

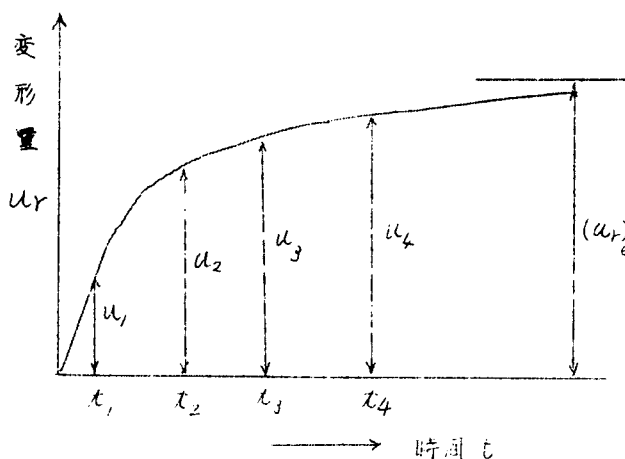
$$u_r = (u_r)_{e1} \bar{\psi}(t) = (u_r)_{e1} (a + b \log_{10} t) \quad \text{--- (4.2.1)}$$

によって説明される実例として日振トンネルに関して野沢氏<sup>88)</sup>が発表しておられるものがある。この説明としてこのような変形挙動を示すことは現場における測定と実験室で試料によって得た測定結果が同様な特性を示すことは、地山の膨張の原因が化学的なものや、吸水等によるものではなく、応力と歪の問題として考えることができる一つの根拠であると述べている。

(4.2.1) 式を模型的に図示したものが第 4.3 図である。これによればトンネルを掘削して直ちに支保工を施したときは素掘のときの変形量  $(u_r)_{e1}$  が長時間経過後生ずるのを始めから変形を抑制するのであるから (4.2.1) 式の  $u_r$  にみあう (4.1.5) 式の  $(u_r)_{e1}$  の代りに  $u_r$  を代入して得られる  $(\sigma_{rc})_{x1}$  の土圧が覆工に作用するから、 $(u_r)_{e1}$  にみあう覆工土圧を  $(\sigma_{rc})_{x\infty}$  とするとき、

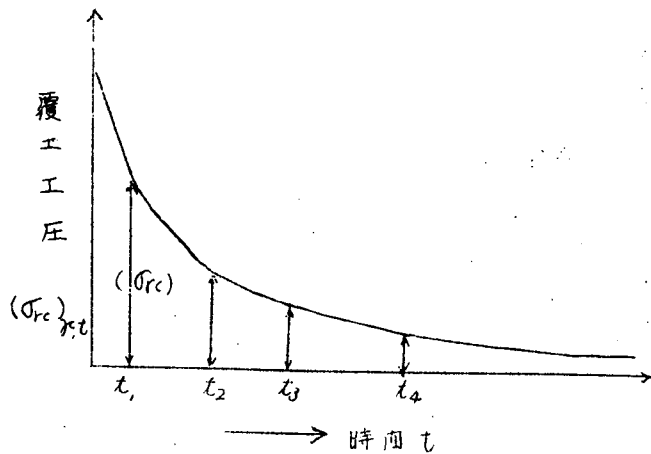
$$(\sigma_{rc})_x = (\sigma_{rc})_{x\infty} \bar{\psi}(t) = (\sigma_{rc})_{x\infty} (a + b \log_{10} t)$$

で示される覆工土圧の経時的变化を示し、第 4.3 図と相似した曲線で示される。このことを示す実例として日振トンネルの測定値として緒論第 7 図及び大野トンネルの測定値として緒論第 2 図がある。



第 4.3 図

つぎにトンネルを掘削後ある経過時間後入れた支保工土圧について (4.1.5) 式の考えを基にして求める方法について述べる。トンネル掘削後  $t_1, t_2, t_3, \dots$  経過後それぞれ素掘で  $u_{r1}, u_{r2}, u_{r3}, \dots$  なる変形を許して後支保工を施して、そのときの変形したトンネルの形にあうような支保工の形にして土圧を支えるようにすれば、支保工に終局においてかかる土圧を求めねば、それぞれ  $(u_r)_{e1} - u_{r1}, (u_r)_{e1} - u_{r2}, (u_r)_{e1} - u_{r3}, \dots$  の変形量を支保工によって抑制するのであるから、この抑制される変形量を (4.1.5) 式の  $(u_r)_{e1}$  の代りに代入して土圧  $(\sigma_{rc})_{x1}$  を求め



第 4.4 図

置した日とその示す最終土圧はある関係をもっていることが判る。堀削直後に設置した土圧計はほぼ地山のもっている最高土圧を示し、膨張の終り近くに設置した土圧計は極く小さな値しか示さない。この関係を実験式に表わしたのが土圧～時間曲線の第4.5図である。このうち実線部分は実測値から取ったものである。これはあくまで試験された区間の条件のもとで成立つもので膨張の極く小さいところや、草坑が閉塞するまで膨張して来るようなところでは定数は変ったものになる。

いずれにしても土圧は膨張量がある一定の条件のもとでは時間の函数として表わすことが可能であり。

$$(\sigma_{rc})_{y,t} = (\sigma_{rc})_{y,t=0} \cdot e^{-n} \quad \dots \dots (4.2.2)$$

の形で書くことができる。ここに  $(\sigma_{rc})_{y,t}$  : 堀削後  $t$  日後つてから設置された土圧計の最終指示土圧 (約50日後)。すなわち支保工、覆工の受ける土圧。  $(\sigma_{rc})_{y,t=0}$  : 地山の及ぼす最大土圧。  $n$  : 堀削後の経過日数。  $n$  : 測定によって決めることのできる定数。とすれば、この場合

$$(\sigma_{rc})_{y,t} = 21.07 \cdot e^{-0.866055} \quad \dots \dots (4.2.3)$$

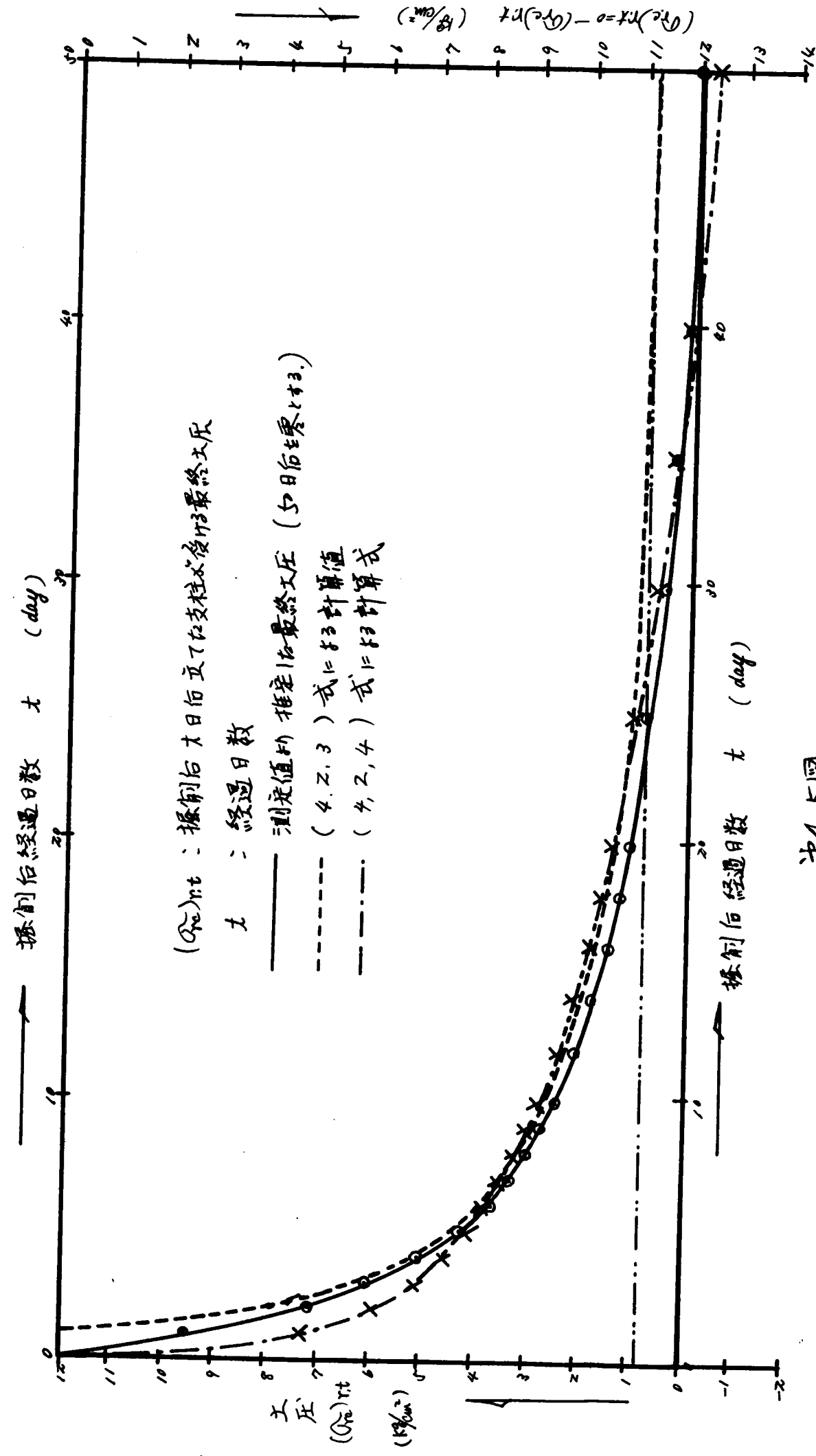
の形で実測値とよく一致する。この関係から堀削後覆工を構築するまでの余裕期間を推定することができる。それには覆工を受けるセントルの許容荷重を上式に入れて  $n$  を求めればよい。逆に余裕期日を  $n$  日おいて構築すると上式で  $(\sigma_{rc})_{y,t}$  なる最終土圧をうけることになる。地山の隠返しを行ったときは事情はやや変わってくる。また覆工完成後長期にわたって復元してくる地山圧力はこの式とは別である。

以上が野沢氏の述べている所である。これによれば地山の押出し量が多い箇所ほど土圧も大きいと考えられる。本装置のように押出しを阻止するようにして圧力を測定すれば押出しが進むに従って圧力は増大することになるか。事実ある程度押出せば自然落付くのであるから、実際の圧力強度は押出しの初期において最大で、押出しが進むに従って漸次減退し、充分押出してしまえば零となる。このことは (4.1.5) 式の成立することを示唆するものである。

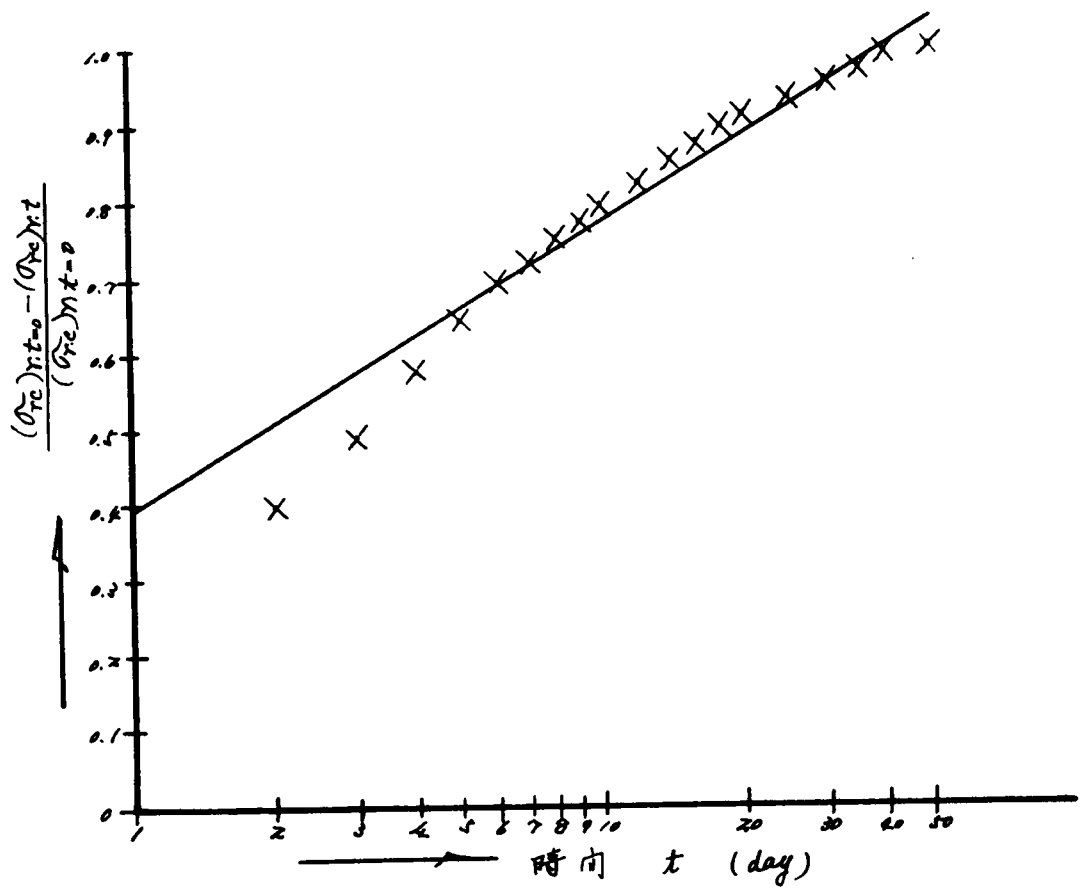
日振トンネルの土圧～時間曲線が第4.5図と第4.4図とは相似た形をしているが、第4.3図より第4.4図を導き出した考えに基づいて、日振トンネルの場合の第4.5図の実測に近似した実験曲線を求めてみる。(4.2.1)式と(4.1.5)式とを用いて

$$(\sigma_{rc})_{y,t=0} - (\sigma_{rc})_{y,t} = (\sigma_{rc})_{y,t=0} \cdot (a + b \log_{10} t) \quad \dots (4.2.4)$$

地圧の経過変化図



第4,5図



第4,6図

が成立する。(4.2.4)式の $a + b \log_{10} t$ の時間函数の $a, b$ の係数を求めるには第4.5図の実測値より表~4.2を作成する。 $t$ を対数目盛で横軸にとり、 $\frac{(\sigma_{rc})_{x,t=0} - (\sigma_{rc})_{x,t}}{(\sigma_{rc})_{x,t=0}}$ を目盛に縦軸にとって表~4.2の数値をプロットすれば第4.6図がえられる。

このプロットした点をほぼ通る実線の直線より第4.7図で説明した方法によつて  $a = 0.395$ ,  $b = 0.377$  が決定される。すなわちこの場合の時間函数は

$$a + b \log_{10} t = 0.395 + 0.377 \log_{10} t \quad \dots (4.2.5)$$

となる。(4.2.5)式を(4.2.4)式に代入して $(\sigma_{rc})_{x,t=0} - (\sigma_{rc})_{x,t}$ を求める。こ

表 ~ 4.2

$t$ (day)	$(\sigma_{rc})_{x,t=0} - (\sigma_{rc})_{x,t} \left( \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right)$	$\frac{(\sigma_{rc})_{x,t=0} - (\sigma_{rc})_{x,t}}{(\sigma_{rc})_{x,t=0}}$
1	2.40	0.200
2	4.80	0.400
3	5.90	0.491
4	6.90	0.575
5	7.70	0.642
6	8.30	0.692
7	8.60	0.717
8	9.00	0.750
9	9.20	0.767
10	9.50	0.792
12	9.90	0.825
14	10.20	0.850
16	10.50	0.875
18	10.70	0.893
20	10.90	0.909
25	11.20	0.934
30	11.50	0.958
35	11.65	0.971
40	11.85	0.989
50	12.00	1.000

の場合  $(\sigma_{rc})_{x,t=0} = 12.0 \text{ kg/cm}^2$  である。この計算結果を表~4.3に示す。この表に示す  $(\sigma_{rc})_{x,t=0} - (\sigma_{rc})_{x,t}$  を  $t$  に対してプロットしたものが第4.5図に示す鉛筆の曲線であつて、実線で示す測定値と殆んどよく一致する故に、(4.2.4)式の妥当なることが認められるのである。

つぎにトンネル周辺の地山の中で押出しなき点のトンネル周縁よりの深さ $r_b$ がトンネル掘削後の経過時間 $t$ の増大とともに増加して、無限時間後には $r_\infty$ におちつく様相は、(4.2.1)式の変形挙動の式より考へて

$$r_b = r_\infty (A + B \log_{10} t) \quad \dots (4.2.6)$$

表 4.3

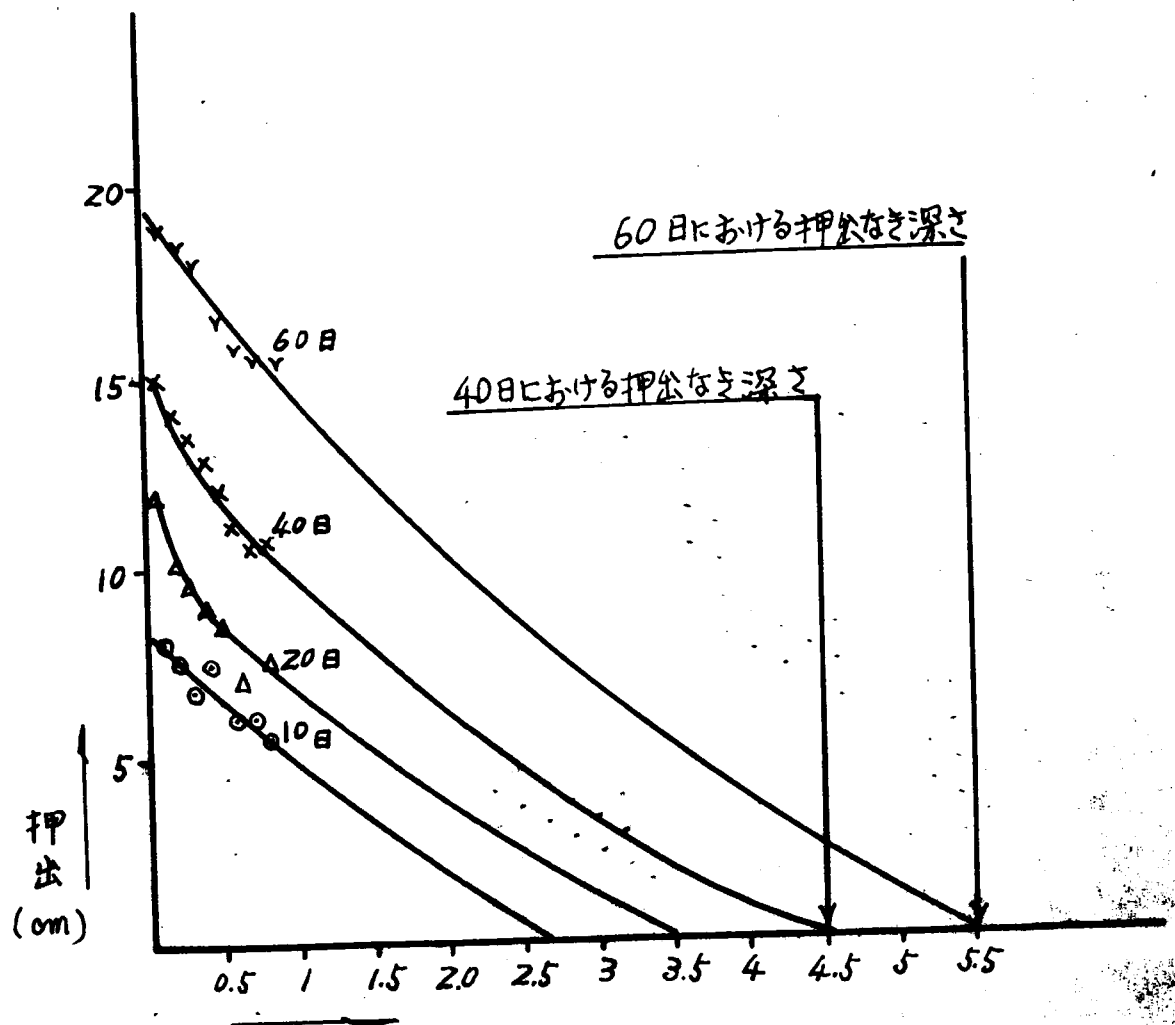
$t$ (day)	$a + b \log_{10} t$	$(\sigma_{rc})_{t=0} - (\sigma_{rc})_{t=t} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$
1	0.395	4.740
2	0.508	6.096
3	0.575	6.900
4	0.622	7.464
5	0.659	7.908
6	0.688	8.256
7	0.714	8.568
8	0.735	8.820
9	0.755	9.060
10	0.772	9.264
12	0.802	9.624
14	0.827	9.924
16	0.849	10.188
18	0.868	10.416
20	0.885	10.620
25	0.922	11.064
30	0.952	11.424
35	0.977	11.724
40	0.999	11.988
50	1.036	12.432

(ただし  $A, B$  は常数とする) となることが予想される。これを日振トンネルの実測結果より推定して図4.7図<sup>92)</sup>かえられている。この図は土平内部の膨脹と経日変化と押出しなき深さの推定を示している。この実測結果より時間  $t$  を横軸に対数目盛にとり、土平表面より押出しなき深さ  $Y_0$  を縦軸に普通目盛に描いてプロットすれば図4.3図に示すように直線を示される関係がえられる故に、(4.2.6) 式が成立することか判る。ただし  $t=0$  においては  $Y_0 = Y_0$  (トンネルの半径  $Y_0$  とする) である。

次に素堀トンネル周辺の応力状態よりえられる Mohr の応力円が限界線と交わるときは降伏条件が成立するときであって、このときの変形挙動は応力と歪の関係で示せば図1.20図において上降伏値より大なる  $P_2$  以上の応力のときの変形挙動と同様な変形挙動を示す。この応力が発生してある経過時間  $t$  すぎれば地山材料は破壊するのである。それ迄にトンネルとしては支保工を組まねばならない。さうしてこの場合トンネル周辺に塑性領域が生ずることは前章で述べたが、素堀トンネルを掘削して支保工圧力  $P$  で支えるまでの応力の経時的変化、弾塑性境界応力  $P$  の経時的変化を求める式は未だ不明であるが、図4.9図で示されるような経過をたどると思われる。すなわち素堀トンネルを掘削した当初はトンネル内周附近では接線方向直応力  $\sigma_{\theta}$  は弾性論で求められる (2.1.42) 式の値となり、トンネル掘削後の経過時間  $t$  が  $t_1, t_2, t_3, \dots$  と経過するにつれて弾塑性境界のトンネル中心よりの距離はそれぞれ  $r_1, r_2, r_3, \dots$  と増大し、これに伴ってトンネル中心に向い地山土は押出しが甚だしくなる。支保工圧力  $P$  で支えれば、これにみあう押出しを出現しなから  $t=\infty$  において図2.32図、図2.33図に示すような応力分布におちつくと考えられる。これが可塑性支保工の原理である。

# 土平内部の膨張の経日変化と

## 押出なき深さの推定



4,7回

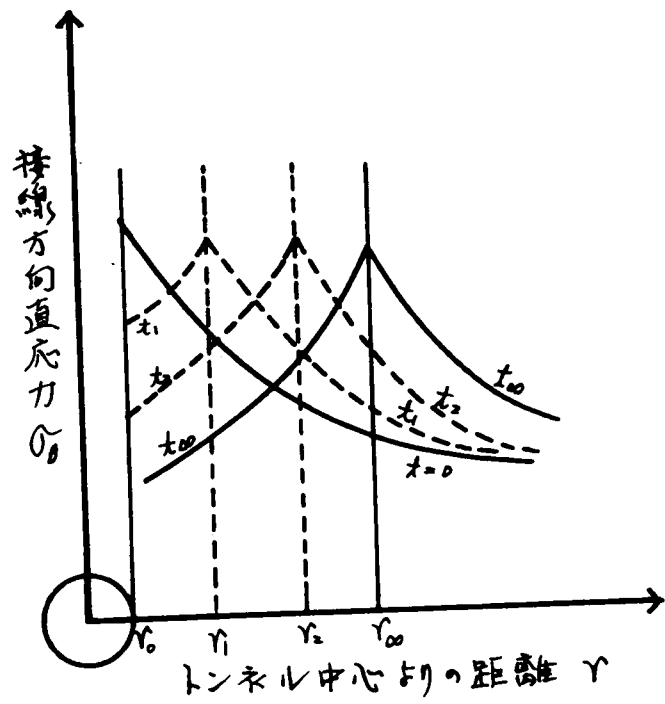


図4.9

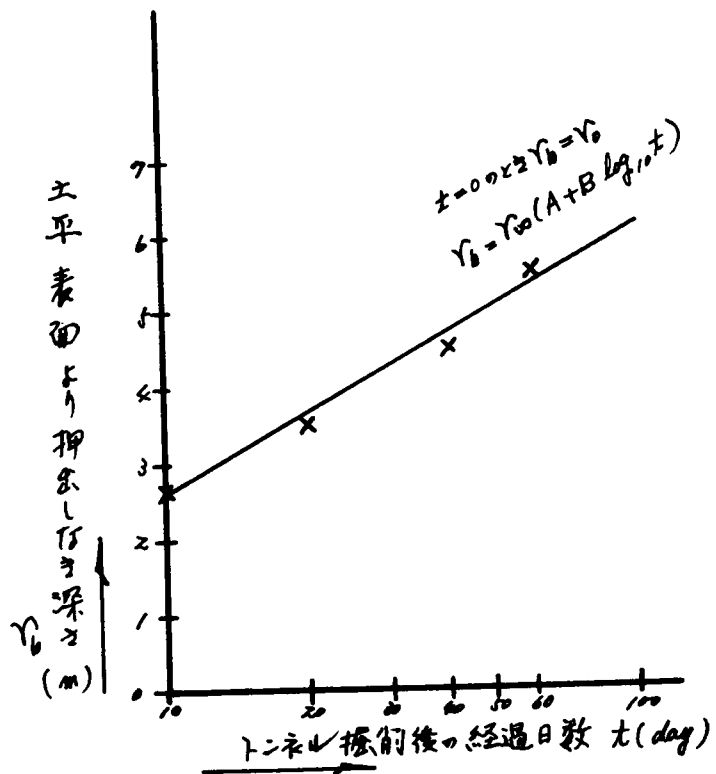


図4.8



### 第3章 トンネル工法とトンネル土圧との相関性について

一般に地山材料の強度が大なる場合、素堀トンネルを掘削しても崩壊しないのは、トンネル掘削による応力集中の結果生ずる周辺の偏差応力が上限降伏値にあたるもの以下ならば、崩壊しないで地山自体がその応力にたえられる。そうしてこれにみあう変形をおこすのに時間がかかる。しかし偏差応力が上限降伏値にあたるもの以上になるならば、支保工とはぶくときは遂に落盤する。破壊到達時間がかかなりある所では後普請で支保工をいれ、また破壊到達時間に余裕のないときは縫地支保工が必要となる。この後者のときは塑性領域がトンネル周辺におこり、偏差応力により塑性流動がおこる。これを支保工で支えれば地山の偏差応力は少となり、応力状態より求められる *mohr* の応力円は限界線の中におさまリ、弾性状態に復元し、それだけ支保工に土圧がかかることとなる。このことは村山博士<sup>23)</sup>によって言われている所である。

前章について述べた軟弱な地山中のトンネル土圧の経時劣化の原理よりみてトンネル工法とトンネル土圧との相関性について考察することとする。第4. 4図の説明で判るように、地山の押出し量の相当ある所ではトンネル掘削後すぐ支保工をすれば、これに最大土圧が作用し、掘削後支保工を建込む迄の経過日数が大となれば支保工にかかる終局土圧は軽減される。しかし現場において地山が均質な事少く、偏圧のかかることもあり、その他不測の原因で崩壊する心配もあるので一般に支保工を施すが、強烈な押出しのある所では可縮性支保工によって、ある程度押出しを許し土圧を緩和して、地山の運動がある程度緩慢になり、新しい応力の平衡状態をえて覆工するのが得策と考えられる。また可縮性目地を有する仮巻立をなし、ある程度の変形を許して後本巻立の覆工をすれば、その後長期間にわたり増加する土圧に対しても比較的龜裂を生ずること少く経済的な工法と考えられる。トンネル周辺がかなりの範囲において塑性状態となり、かなり押出しの続くような所では可縮性支保工である程度変形をゆるすとしても、尚且強烈な土圧の発生する場合は数度の縫返しによって所要の内空断面を保持するよう努め、第2編、第5章で述べた原理で説明される応力緩和を招来して、可縮目地を有する仮巻立の後本巻立の覆工するのが原則と考えられる。この数度の縫返しにおいて支保工で土圧を支えながら、相当量の押出した地山土の排除を行うから、弾塑性境界の範囲は相当大きく拡大する。塑性領域内ではトンネル掘削直後の応力状態から塑性状態の応力緩和の状態に移る様相は第4. 9図に示されるようになると考えられる。このような課程において塑性領域内の地山は相当変形が生じ、攪乱されることとなる。この領域で流動がますますつれて、せん断抵抗力が増加するから地山は多少流動させた方が、かえって地山の負担する地圧が多くなり、支保工がうける荷重を軽減するわけである。

上原要三郎博士<sup>24)</sup>のいわれる無応力破壊帯Aゾーン<sup>(74)</sup>の大きさ、その中の応力状態について理論式に示されていないが、志免成徳のトンネル工法経緯より無応力破壊帯Aゾーンの存在することと提唱されているが、これは著者が第2編第4章及び第5章で述べた塑性領域の応力緩和の発生する領域のことと考えられる。またさらに上原博士のいわれる保護波帯Bゾーン<sup>(75)</sup>の大きさ及び範囲について、その理論式は示されていないが、著者が第2編第4章および第5章で述べた弾塑性境界をはさんだある厚さのある環状の領域をさすと考えられる。この附近において接線方向の直応力が最大となって相当なエネルギーを保有する領域であると考えられる。第4. 9図に示すようにトンネル掘削後、接線方向直応力の大きな弾塑性境界が次第に拡大していき、これに含まれる塑性領域の応力が減少してゆくから、地山の押し出す弾性力が塑性領域の地山を押し出す運動に転換されてエネルギーを散发して応力緩和を招来する。それにつれてエネルギーの蓄積が弾塑性境界にのって一緒に地山深部に向って拡大してゆくこととなる。

いままで述べたことに關して強烈無損の地圧を経験した日振トンネルの工事の施工法を紹介して考察することとする。工事誌の記事を<sup>95)</sup>「」で示す。

『日振トンネルにおいて終戦後昭和21年1月工事は再開され、昭和23年6月まで5K713m0~5K600m2の118<sup>m</sup>8が施工された。この工事にあたって従来の経験より第3(底設導坑)を先進させることが危険があり、アーチコンクリートの変状を増加させることが判ってきたので、せいせい中肯盤の下で止め、頂設導坑を先進させて日本式の逆巻を行ったが、結果は良好であったが、進行速度は月進数米から十米程度であった。』

丸形を切抜けてからただちに畳築を行つと側圧が甚だしく、大きな変形をおこすので、これを如何に対処するかは一つの大きな課題であった。それにはまず側圧の原因をつきとめねばならない。掘削より覆工までの日数は3・4の丸形が3日、1・2の丸形が21日、頂設が22日である。掘削後3日ではこれからますます土圧が増加する時期であり、3週間も後では膨脹も終りそれ以上土圧は増加しない時期である。すなわち3・4の丸形部分だけが覆工に土圧を作用せしめるので若し3・4の丸形を掘削してから最大土圧に達し最早土圧が増加しない時期になってから覆工を行ったならば、この側圧は除去できるのではないか、この実験を行ったのが5K655<sup>m</sup>9~5K652<sup>m</sup>3である。

この実験の結果であるが、まず上木のセントルフランデへの喰込みは覆工後11日目に測定した時は殆んどみられなかった。セントル外しの際は多少の上木切を必要としただけで、セントル台梁と桁との間の違いパッキングは圧縮のみで破壊はみられなかった。勿論台梁の変形はみとめられず、セントル外しも従来の約半分の人天ですんだ。アーチの迫は特に入念に施工したのであるが亀裂は皆無であった。

この試験区間もやはり土圧の強い所で、中肯普請後約2週間で山手の2の後光梁の鰭口も裂け大立も変形し、そのため山手1の桁が50cm押下げられた。しかし大立後光梁を盛替えて3・4の丸形を抜けてからもはや1の桁は下がらなくなった。はじめは4の後光梁が中肯盤の膨出により損傷するのではないかと恐れていたが、8日間放置しておいたが異状なくまた全体の支保工の変形も見られなかった。アーチ覆工は昭和22年5月14~16日の間に施工したが各部の掘削より覆工までの日数は頂設が39日、1・2の丸形が34日、3・4の丸形が9日目である。先に押下げられた山手1の桁は覆工の際縫返しを行った。』

第42図に示すように一般には拱頂土圧が大きく側壁を経て仰拱に向つてトンネル土圧は減少するが、この工事の場合頂設導坑を掘削し、左右の丸形に切抜け中、頂設導坑の支保工は押し出しによる沈下と主じ、支保工を盛替えて土圧緩和をおこしている筈である。ところが丸形を切抜けて後、逆巻の覆工のコンクリートを打設するまでに側壁よりの土圧は未だ最大値に達せず土圧緩和の進行中である。この施工中最後に押出してくる所であるから、特に側壁土圧が大きく感じられたのではないかと考えられる。

頂設、丸形と掘削中は中肯盤の膨出の影響は僅かであり、これより地山の押し出し量の分布は第42図のようになると考えられるのである。また側壁土圧に対して免圧するため、逆巻の覆工作業と丸形掘削後押ししが完了するまでまっで行ったことは第44図において説明した原理の妥当なることを示すものである。

『昭和23年8月より5K576<sup>m</sup>7から5K425<sup>m</sup>0まで及び5K325<sup>m</sup>0より5K273<sup>m</sup>5までの間について工事が再開された。この工事で再び第3の先進が問題になり、新オーストリア式逆巻工法が採られることとなった。その意図は第3を先進することによって、弾性的地圧論というAゾーン、Bゾーンの生成を促進させ、免圧状態になったところで畳築を行い覆工の被害を免れようとするのと、押し出しの速度をあげることであった。しかしながら前述の純日本式工法と矛盾するもので

進行速度は所要の目的を達したが、アーチコンクリートの被害はかえって増大した。第3が土圧を弱化し、アーチコンクリートの沈下を招き好ましくない応力を発生させるからである。

丸形の切り抜きから畳築までの余裕期間は、これまでの経験を参考として、土圧と膨脹量の時間的変化を測定して3、4の丸形の切り抜きから2週間とした。畳築は逆巻工法によったが、アーチコンクリートの3の桁(約30°の位置)より上は地山と密着させ、それより下は側壁底部まで20cmの余裕を置いて側圧をさけ、仰拱完成後乾砂とモルタルを注入した。逆巻工法によったため、アーチ畳築後仰拱がつくまで1ヶ月から2ヶ月を要し、その間きわめて不安定な状態におかれたことは本工法の不利な点の一つであった。

この工法で側圧の時期まで覆工作業をまつという考え方は前節の第4、9図の考え方を利用したこととなるが、先進させる導坑を底設導坑としたために逆巻の覆工までに導坑周辺の地山の応力緩和を招来して、塑性流動を出現させたことにより、その周辺の地山の土は相当攪乱とされたことにより、二次的に地山の強度を減少し、この地山中に逆巻の覆工の鉄付けをなすことはアーチの沈下を招き、この工法の命取りになったと考えられる。故に土圧緩和をはかるため先進導坑を施工するとすれば、切抜き及びその後の覆工にあまり支障を来さない頂設導坑を施工する方法をとる方が、このような軟弱な押出しの大なるトンネル工事では得策であると考えられる。

『この工事の最終区間において半断面可縮アーチ支保工を採用した。この材料はV型鋼の20〜29kg/mのものである。ある値以上の土圧がかかると、接手が滑りずい道の内空断面を縮小して土圧を軽減する。従って挫圧や倒かいによって急激に支持力を失うようなことはない。

また5<sup>kg</sup>295<sup>m</sup>4〜5<sup>kg</sup>297<sup>m</sup>8のアーチコンクリート施工区間には目地の位置は右側、左側ともに30°、60°の位置とし、4.5cmの松板を並べて可縮材料とし厚さ10cmのコンクリートブロックではさんで半径方向に入れた。施工後の状況をみると、目地は1/2以上も圧縮されて応力緩和に相当役立っている。しかしコンクリートが場所打ちであったため毛細亀裂がいくつも入り、かつ断面が縮小してその区間だけ半径が小さくなった如く見える。今後目地として用いた松板の腐蝕に伴い覆工はさらに圧縮される可能性がある。』

この報告の記事によって第2編第5章の第2、32図、第2、33図及び前章の第4、4図で説明した原理をみとめることができ、この場合結局ブロックの代りに場所打ちコンクリートを用いたので小さな亀裂が入ったと考えられ、1枚巻のブロックに松板をはさんで一次覆工とし、着いたときに内側を巻くのが現実に則した工法と考えられる。

#### 第4章 軟弱な成層を有する互層地山中のトンネル土圧分布について

地圧という語には二つの意味がある。通常現場などでトンネルに地圧があるといっているのは、地山がトンネルに向かって押してきて支保工や覆工が押される圧力をさしている。故にこの地圧ははっきりいえば支保工にかかる荷重である。他の意味の地圧は地山内の岩石に発生する応力である。岩石が堅固なときは地山の岩石に発生する応力は大きくなるが、支保工のうける荷重は減少する。ここでは後者の岩石中に発生する応力について述べる。

均質な岩石は実際には比較的少く、多くの岩石には岩目が発達している。岩目で岩石が切れているから方に弱い上に、岩目の部分の岩石は風化して軟弱となり、ときには岩目の中に粘土がつまっている。故に岩目の方向に力を加えれば小さい力で岩石は滑動するが、岩目と直角の方向には岩石は破壊されない限りの大きな力を加えることができる。このように一方向に岩目のある岩石は、岩目の方向とそれに直角な方向とでは力学的特性が異なり、いわゆる直交異方性体である。一方向に岩目のある岩石では、岩目と直交する方向は比較的弾性に近いが、岩目の方向はむしろ塑性に近い特性をもっている。ゆえにきわめて複雑な性質となるため、従来このような場合の研究は殆んどされていないようである。

そこで着者は地山が直交異方性体としての弾性体とみなされるときの変形円形のトンネル周辺の応力を求めてみることにする。この場合成層をなす互層の厚さがトンネル断面に比較して小なるとき擬似均質直交異方性体とみなし、互層間には摩擦抵抗が充分あって滑動変位を生じないものとして、第2編第7章で述べた理論を導いた。このときの計算例として鉛直方向のみより地山荷重が作用した場合について述べたが、実際の自然地山では鉛直方向の地山荷重に対して直交異方性で表されるポアッサン比に応じて水平方向の圧力がトンネル掘削以前に作用している。そこで鉛直、水平両方向より地山荷重の作用する場合を次の計算例によってトンネル周辺応力分布について研究することとする。この種の研究も今まであまりみないようである。そうして軟弱な成層を有している互層地山では、成層の方向xの主弾性係数 $E_x$ とこれと直交する方向yの主弾性係数 $E_y$ との比が非常に大となるから、このような $E_x$ 、 $E_y$ の値を用いてトンネル周辺の応力集中を調べることにする。しかしこのようにして求めた応力分布は軟弱な成層が滑動する場合のものとは別であるが、滑動を開始する直前の応力分布を示すと考えられ、滑動を起す要因を調べるため上述の場合の応力分布の研究が前提となると考えられる。そこで次に第2編第7章第4節の計算例の(2)  $E_x/E_y$  の値の大なる場合で述べた地山の力学的性質を表わす数値をそのままここに用いることにする。

この場合の地山の力学的性質は次の数値となる。

$$E_x = 170,000 \text{ kg/cm}^2, \quad E_y = 6750 \text{ kg/cm}^2, \quad E_x/E_y = 25.2 \quad \nu_y = 0.0346 \\ \nu_x = 25.2 \times 0.0346 = 0.872, \quad G_{xy} = 6492 \text{ kg/cm}^2$$

いま自然地山の鉛直方向の荷重を $P_v$ とすれば、これによって生ずる水平方向の圧力を $P_h$ 、ポアッサン数を $m$ とする。

$$P_h = \frac{1}{m-1} P_v \quad (4.4.1)$$

が成立する。

(1)  $\alpha = 90^\circ$  のとき

x方向の圧縮によるy方向の伸びの生ずるときポアッサン比 $\nu_x = 0.872$ を用いて

$$m = \frac{1}{\nu_x} = \frac{1}{0.872}$$

(4.4.1)式より

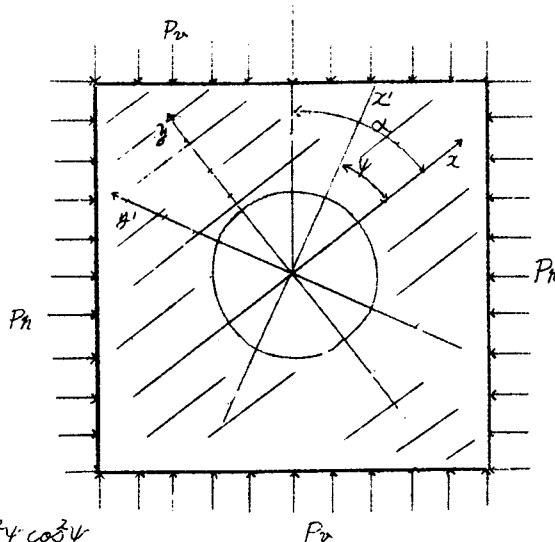
$$P_h = 6.850 P_v$$

となる

(2)  $\alpha = 45^\circ$  のとき

第4.10図において主弾性係数  $E_x$  の方向より反時計方向に  $\psi$  の角をなす方向  $z$  の弾性係数を  $E_z$  とし,  $z$  の方向と直交する方向  $y'$  の弾性係数を  $E_{y'}$  とする。  $z$  の方向の圧縮による  $y'$  方向の伸びを生ずるときのポアッサン比を  $\nu_x$  とすれば, G. Sonntag<sup>96)</sup> によれば,

$$\frac{1}{E_{z'}} = \frac{\cos^4 \psi}{E_x} + \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_x}{E_x} \right) \sin^2 \psi \cos^2 \psi + \frac{\sin^4 \psi}{E_y} \quad (4.4.2)$$



第4.10図

$$\nu_x = E_x \left[ \frac{\nu_x}{E_x} - \frac{1}{4} \left( \frac{1 + \nu_x}{E_x} + \frac{1 + \nu_y}{E_y} - \frac{1}{G_{xy}} \right) \sin^2 2\psi \right] \quad (4.4.3)$$

となる。 $\alpha = 45^\circ$  の場合は  $\psi = 45^\circ$  とすれば  $z$  の方向は鉛直方向となる。故に  $\nu_x$  は鉛直方向の圧縮による水平方向の伸びを生ずるときのポアッサン比となる。(4.4.2) 式, (4.4.3) 式によって

$$E_x = 13,430 \text{ kg/cm}^2, \quad \nu_x = 0.498, \quad m = \frac{1}{\nu_x} = \frac{1}{0.498}$$

となり, (4.4.1) 式より

$$P_h = 0.790 P_v$$

となる。

(3)  $\alpha = 90^\circ$  のとき

$y$  方向の圧縮による  $x$  方向の伸びの生ずるときのポアッサン比  $\nu_y = 0.0346$  を用いて

$$m = \frac{1}{\nu_y} = \frac{1}{0.0346}$$

(4.4.1) 式より

$$P_h = 0.0358 P_v \text{ となる。}$$

$P_v$  と  $P_h$  の地山荷重が同時に作用したときの素堀円形トンネル周辺の接触方向直応力  $\sigma_a$  は第2編第7章の理論の諸式を用いて計算すれば表4.44のようになり  $\sigma_a$  の応力分布を図示すれば第4.11図の(a), (b), (c) となる。

$\alpha = 0$  のときは成層方向が鉛直方向であって,  $P_v$  による  $P_h$  が相当大きいために  $P_h$  による  $\sigma_a$  の値が大きな影響を与え, 側壁に大きな引張応力が発生し, 拱頂拱底中央では最大圧縮応力を生じ何れも  $\alpha = 0$  以外の場合よりも相当大的な値を示すこととなる。このような地山では側壁の引張破壊を生じ易く, また側壁附近の地山内部の引張応力の生ずる領域はかなり広い。しかし側壁の引張応力も地山深く入るにつれて急に減少する。拱頂拱底の圧縮応力の減少率は少である。

$\alpha = 45^\circ$  のときは成層方向が鉛直に対して  $45^\circ$  傾斜しているときであって, トンネル周辺の応力は比較的等しく圧縮応力のみが生じ, この値は  $\alpha = 0$  のときの圧縮応力と比べればかなり少である。またトンネルより地山深部に入るに従って減少率は少である。

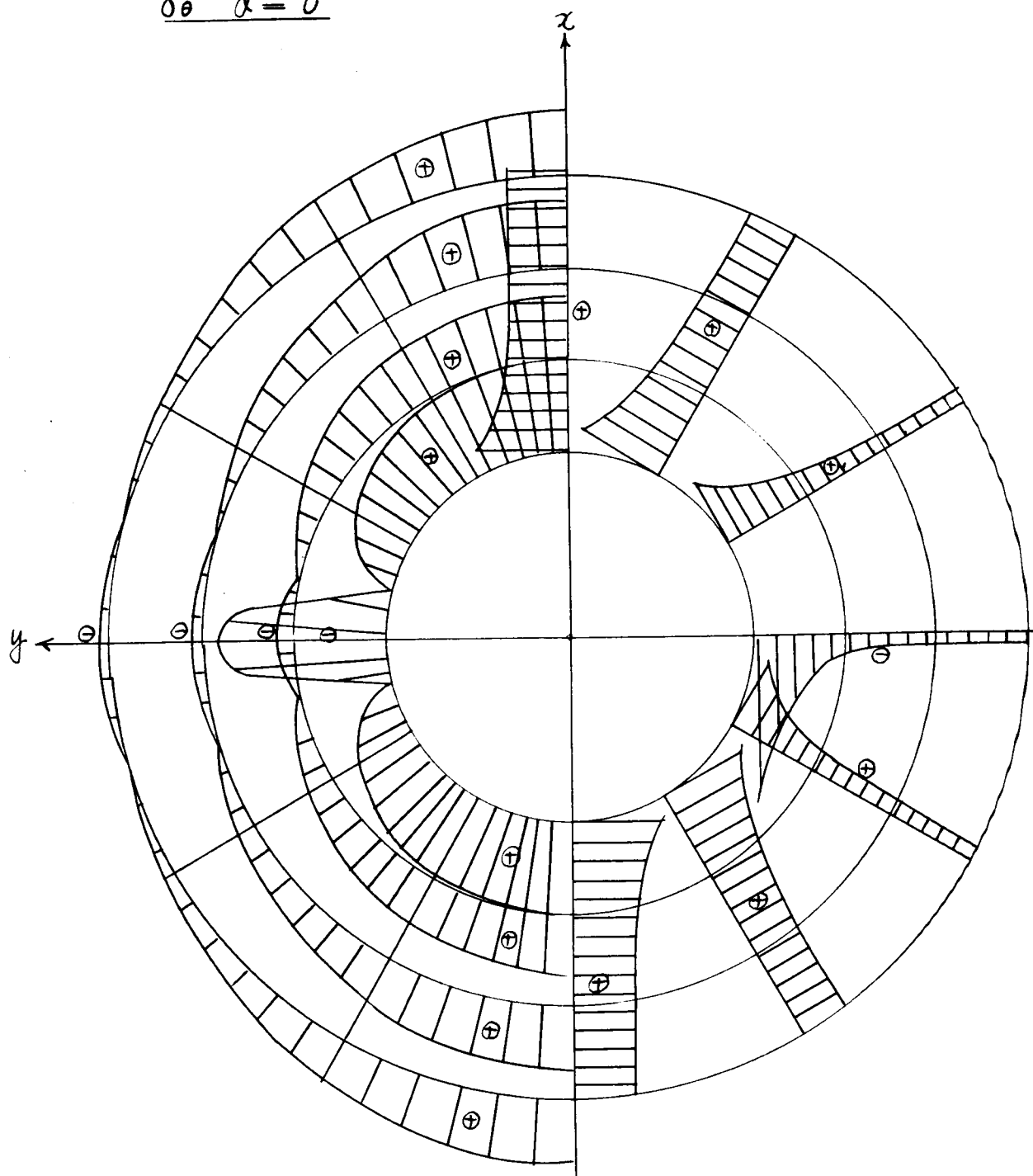
表 ~ 4.4  $\sigma_0$  の 値(単位  $P_v$ )

$\rho$	$\alpha_{(0)}$	0			45			90		
		$P_0$ のとき	$P_h$ のとき	$P_0$ と $P_h$ と作用する時	$P_0$ のとき	$P_h$ のとき	$P_0$ と $P_h$ と作用する時	$P_0$ のとき	$P_h$ のとき	$P_0$ と $P_h$ と作用する時
1	0	-0.200	15.362	15.162	0.969	0.960	1.929	2.243	-0.007	2.236
	30	-0.110	14.225	14.115	1.777	0.215	1.992	2.077	-0.004	2.073
	60	0.580	9.979	10.559	3.151	-0.967	2.184	1.457	0.021	1.478
	90	0.6878	-34.457	-27.579	0.926	0.917	1.843	-5.031	0.249	-4.782
	120	0.580	9.979	10.559	-0.976	3.121	2.145	1.457	0.121	1.478
	150	-0.110	14.225	14.115	0.217	1.760	1.977	2.077	-0.004	2.073
	180	-0.200	15.362	15.162	0.969	0.960	1.929	2.243	-0.007	2.236
$\frac{1}{1.5}$	0	-0.086	10.397	10.311	0.338	0.335	0.673	1.518	-0.003	1.515
	30	0.121	9.089	9.210	1.318	0.054	1.372	1.327	0.004	1.323
	60	1.001	3.103	4.104	1.812	-0.492	1.320	0.453	0.036	0.489
	90	2.203	-5.294	-3.091	0.280	0.277	0.557	-0.773	0.070	-0.703
	120	1.001	3.103	4.104	-0.497	1.795	1.298	0.453	0.036	0.489
	150	0.121	9.089	9.210	0.055	1.305	1.360	1.327	0.004	1.323
	180	-0.086	10.397	10.311	0.338	0.335	0.673	1.518	-0.003	1.515
$\frac{1}{2.0}$	0	-0.047	10.390	10.343	0.375	0.371	0.746	1.517	-0.002	1.515
	30	0.212	8.048	8.260	1.156	0.048	1.204	1.175	0.008	1.183
	60	0.927	1.801	2.728	1.397	-0.201	1.196	0.263	0.033	0.296
	90	1.564	-3.849	-2.285	1.376	0.372	0.748	-0.562	0.056	-0.506
	120	0.927	1.801	2.728	-0.203	1.384	1.181	0.263	0.033	0.296
	150	0.212	8.048	8.260	0.048	1.145	1.193	1.175	0.008	1.183
	180	-0.047	10.390	10.343	0.375	0.371	0.746	1.517	-0.002	1.515
$\frac{1}{2.5}$	0	-0.030	10.452	10.422	0.459	0.455	0.914	1.526	0.001	1.527
	30	0.215	7.561	7.776	1.078	-0.093	0.985	1.104	0.008	1.112
	60	0.875	1.219	2.014	1.213	-0.087	1.126	0.178	0.031	0.209
	90	1.332	-3.335	-2.003	0.420	0.416	0.836	-0.487	0.048	-0.439
	120	0.875	1.219	2.014	-0.088	1.201	1.113	0.178	0.031	0.209
	150	0.215	7.561	7.776	-0.094	1.068	0.974	1.104	0.008	1.112
	180	-0.030	10.452	10.422	0.459	0.455	0.914	1.526	0.001	1.527

(正の符号は圧縮応力を示し、負の符号は引張応力なることを示す)

(a)  $p_r$  と  $p_h$  と同時に作用する場合

$\sigma_\theta$   $\alpha = 0^\circ$

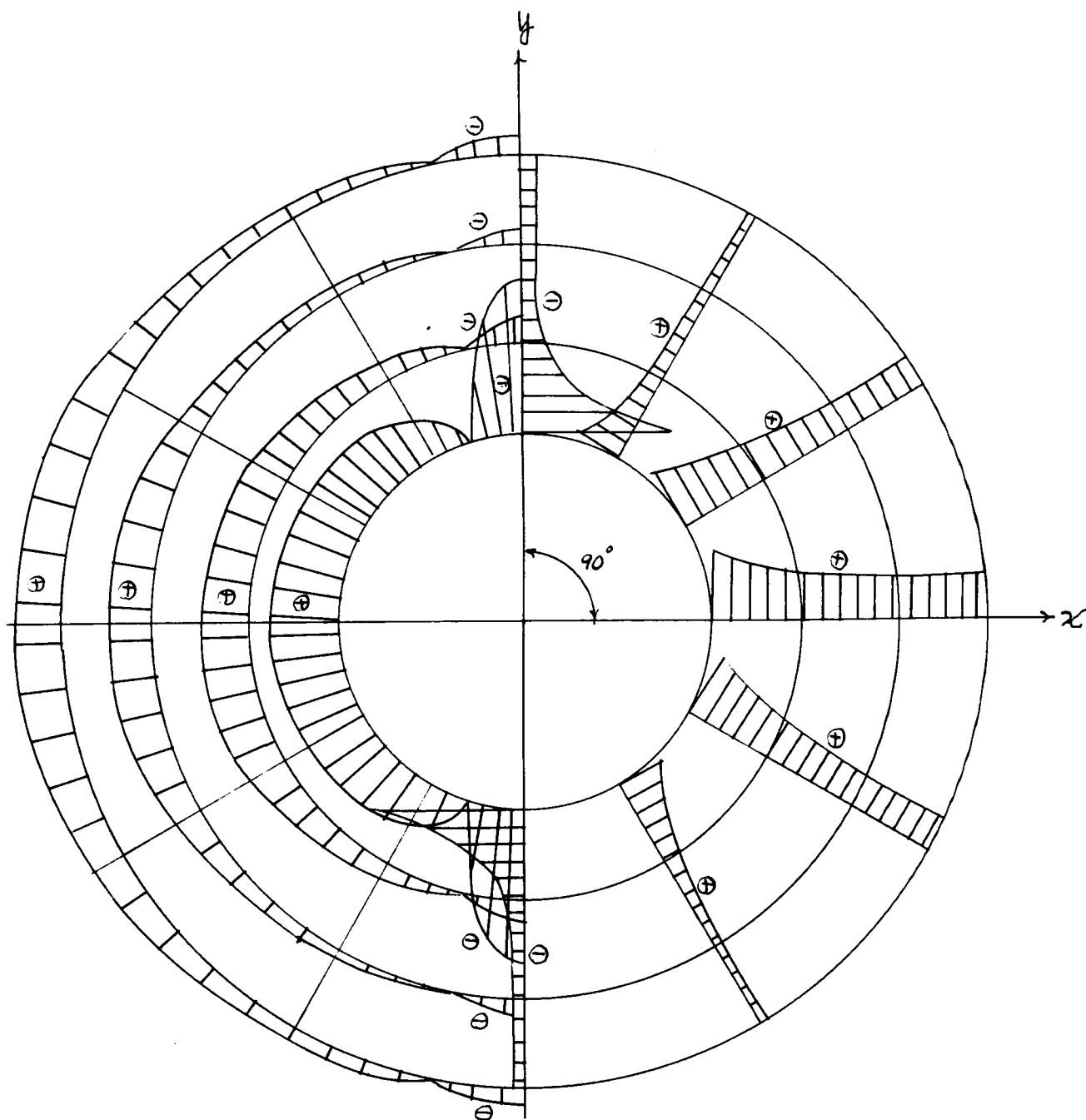


0 10 20 30 40 50 60  $p_r$

第4, 11図

(c)  $P_v$  と  $P_h$  と同時に作用する場合

$\sigma_\theta$   $\alpha = 90^\circ$



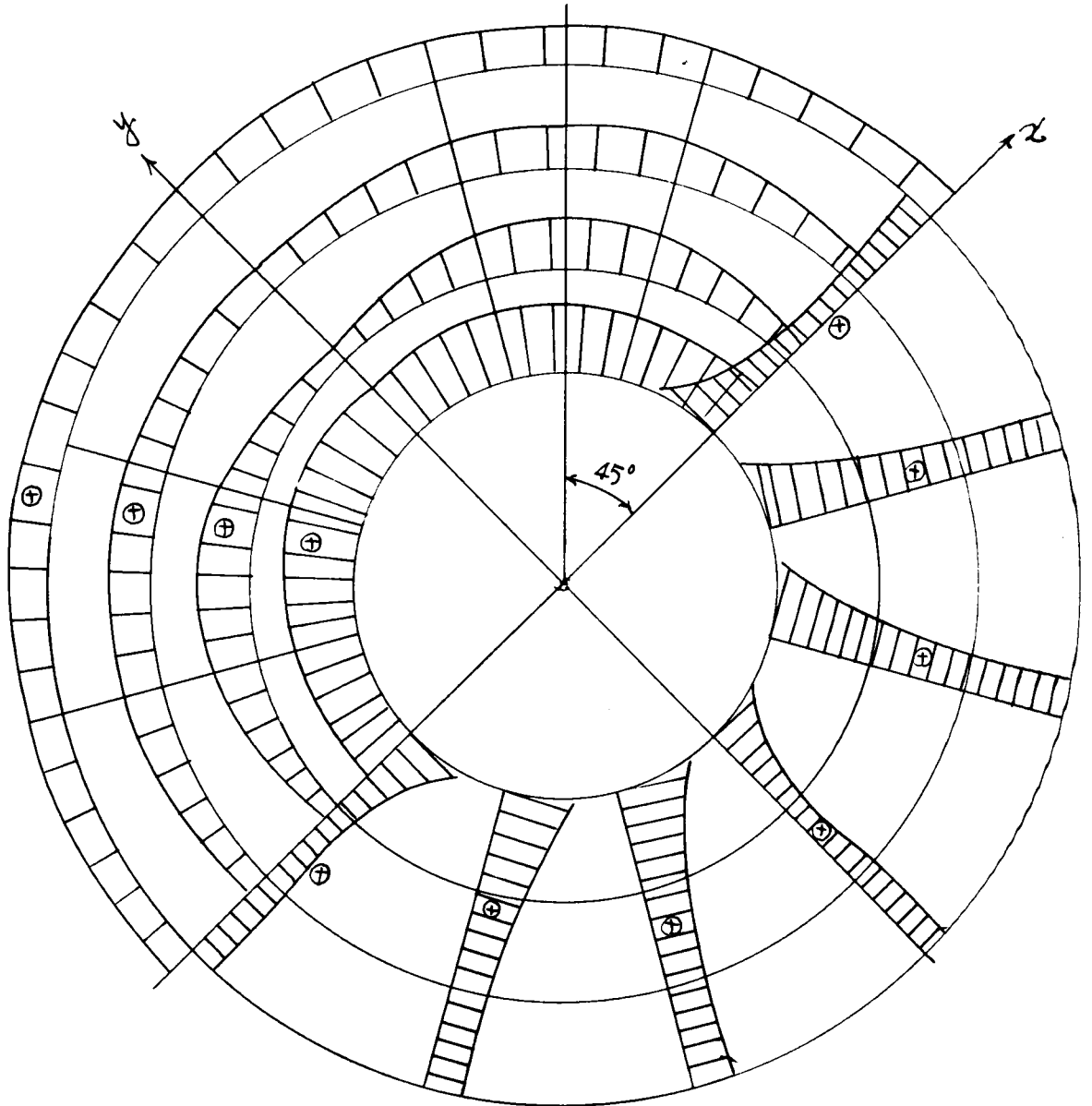
0 2 4 6 8 10  $P_v$

第4.11図



(b)  $p_r$  と  $p_h$  と同時に作用する場合

$\sigma_\theta$   $\alpha = 45^\circ$



0 2 4 6 8 10  $p_r$

第4,11図

$\alpha = 90^\circ$ のときは成層方向が水平のときであるが、側壁附近は圧縮応力で、その値は $\alpha = 0$ のときの圧縮応力に比べればかなり小である。側壁中央で最大圧縮応力が生ずる。拱頂拱底中央では最大引張応力が生ずるが $\alpha = 0$ のときの引張応力に比べればかなり小であり、また拱頂拱底附近の地山中の引張応力の領域は狭く、引張応力は地山深部に入るに従い急に減少する。

これより成層が鉛直方向のとき応力集中のおこることが甚だしく、側壁の引張破壊によって側壁部分が崩壊し、これによって二次的にアーチクラウンが落下して大規模な落盤が発生することとなる。故に細目で鉛直に成層のある地山では、トンネル支保工としては鉛直にかかる荷重をささえることは勿論必要であるが、同時に側壁の破壊を防ぐ横方向の支保工もあわせて使うことが望まれる。

## 結 論

軟弱な地山中のトンネル土圧に関して研究を行ったのであるが、そもそもトンネル土圧という言葉には二つの意味があり、一つは一般にいわゆる支保工や覆工に作用する土圧であって、他の一つはトンネル周辺の地山の中に発生する応力のことをいう。この二つの意味の土圧を研究したわけであるが、従来より多くの権威者によってこの問題について研究されてきたのであるが、着者がとりあげた問題は地山の強度が小なる軟弱な地山中にトンネルを掘った場合であるが、元来地山が軟弱なことは一般的には粘性土、砂及び風化した岩石などがこれにあてはまる。しかし詳しくは地山荷重によるトンネル周辺の応力の値と地山の力学的性質の相対的な関係より軟弱な地山を説明すべきであって、この意味においてトンネル周辺の応力分布の研究と地山土の力学的研究と分け、それぞれの本質を調査し応力分布と地山土の力学的性質との相対的な関係を新しい二次的な応力分布が発生する問題もある故に、応力分布の研究としては軟弱な地山という問題から一応切離して弾性論的に研究すべき点がある。しかし地山土の力学的性質と応力分布との相対的な関係より二次的に発生する応力分布は塑性論によるべきで事態は複雑となる。このような問題は地山荷重によるトンネル周辺の応力集中に比べて地山土の力学的強度の小なる地山の場合におこり、軟弱な地山中のトンネル周辺の応力問題であってこの点に着目して研究を進めてきたわけである。また難工事となるトンネル工事はこのような地山のトンネルに多く、この研究はトンネル施工上重要な問題であり、未解決の点が非常に多く、これに関する基礎的研究をなすことはトンネル工事に被益する所大である。

この点に鑑みて着者は結論において従来難工事であった実例と軟弱な地山の説明を述べ、第1編において従来より遭遇した難工事トンネルの地山が一般的にもつ力学的特性を調べた。第2編においてトンネル周辺の応力分布と変形挙動に関する理論的考察を行ったが、この中で一次的な応力分布としては弾性論より研究し、二次的な応力分布に関しては塑性論より研究した。なおトンネル周辺の経時的変形量の変化すなわち変形挙動に関して研究し、トンネル施工に必要な基本的な理論の追究をなした。第3編においては第2編の理論の検証に重点をおいた実験について述べた。第4編において理論と実験より帰結される事柄について考察をなして、軟弱な地山中のトンネル土圧に関する結論を導き出して甚だ示唆に富む資料とすることができた。つぎに本研究の概要とその注目すべき若干の成果を掲げれば次のようである。

第1編 において軟弱な地山の土質力学的特性に関する考察を行い、まず一般にトンネル掘削による応力集中のときの応力分布に比べて、比較的力学的強度の小なる、または変形量の大きく現われる地山土の *rheology* 的性質を研究した。この問題は一般的には土質力学で研究されているフリップ問題、せん断破壊の問題と本質的に変らないが、これをトンネル周辺の地山の变形挙動、応力分布に関連させるに必要な理論式の誘導と力学的諸性質の測定法について主として研究したのである。その第1章においては地山土を簡単な粘弾性体と仮定できる地山として、地山土の力学模型を *Voigt Model* と仮定し、その基本式よりトンネル周辺の変形の式を導くために、応力偏差、歪偏差をこの力学模型に適用してえられる変形挙動の式を求め、これより粘弾性諸係数を求める理論を導いた。このようにして求めた粘弾性係数を用いてトンネル周辺の変形挙動の計算が行えるようになった。第2章においては更に地山をより一般化した粘弾性体の地山と仮定できる場合、地山土の力学模型を1個のバネと下限降伏値に相当するスライタを並列に加えた *Voigt* 要素とを直列に組合わせたものとする。ただし *Voigt* 要素の粘性係数は単純な *dash pot* でなく *Eyring* の粘性理論を拡張展開して統計力学的に求めた構造粘性式で示されるものである。この力学模型に応力偏差、歪偏差を関係づけて変形挙動の式の中の *rheology* 的常数を求める測定法を述べ、

この係数はそのままトンネル周辺の变形挙動を求める計算式に使用できることを述べた。第3章においては従来よりいわれている土の破壊理論を紹介してトンネル破壊のときの研究にはせん断試験法はどうあるべきかを述べたのである。第4章、第2章で扱った事柄はトンネル周辺の变形挙動を研究する手がかりを与えるものであり、今迄その方法があまり研究されていなかったものである。

第2編 において軟弱な地山中のトンネル周辺の応力分布及び变形挙動に関する理論的考察をなしたものであって、この問題を扱うには前述の如く応力分布に関して本質的に研究する第一歩として、トンネル掘削後の一次的な応力分布を取扱うために第1章で弾性論の立場より研究した。この問題に関しては多くの権威者によって取扱われてきているので、著者は今まであまりいわれていない応力分布に関連した変形量計算において *rigid body displacement* の量を明かにし、実際現場のトンネルで観察される変形量は *N. Schmid* の求めたものに対して *rigid body displacement* の項をなくすればよいことを説明した。変形の問題は第4編において述べる覆工土圧の計算に役立つことを後に述べることによりその重要性が判った。

第2章において簡単な粘弾性体とみなされる地山中の素掘円形トンネルの变形挙動に関する理論式を導き、この理論式に現われる粘弾性係数は第1編第1章で述べた方法で得られる粘弾性係数を用いて計算できることを証明した。これによってこのような地山のトンネルの变形挙動と予想することが出来る。第3章においてより一般化した粘弾性体とみなされる地山中の素掘円形トンネルの变形挙動に関する理論式を導き、この理論式に現われる *rheology* 的係数は第1編第2章で述べた方法で得られる *rheology* 的係数が用いられることを証明し、このような地山のトンネルの变形挙動と予想することが出来るようになった。しかし第2章、第3章で取扱った場合は地山の応力分布があくまで弾性的な状態の場合であって、応力の上限降伏値にあたるものより大きい場合はその变形挙動と説明する理論式は未だ不明であり、今後研究すべき問題である。しかしこの場合の応力分布の最終的なものは、地山の強度が小さいこの応力によって降伏した場合であって、二次的に発生しおちついた終局的な応力分布に関しては第4章で摩擦性塑性体とみなされる地山中の素掘円形トンネルの周辺応力分布としてその理論式を導いた。重力という物体力の作用した場合この種の問題は今まで研究されておらず、著者は土の降伏条件式と応力平衡条件式を基にして、トンネル周辺の塑性領域中の応力分布を明かにし、トンネル周辺の応力緩和現象、及び応力はトンネル上盤で大きく、側壁を経て下盤にゆくに従って小となることが判った。しかしこの場合の弾塑性境界の求め方については厳密解は不明である。そこでこの概念を得るために第5章において粘土の地山中の円形トンネル周辺の弾塑性問題を取扱い、弾塑性境界の求め方及びトンネル周辺の塑性領域及びその外側の弾性領域の応力分布及び面領域の応力分布のつながりの様子を明かにした。これより上京要三郎博士の提唱されたAゾーン、Bゾーンの概念を明かにした。そうしてトンネル支保工圧力と弾塑性応力状態の関連性を求めることができた。

第6章においてこの特殊な場合として軟弱な水平層の厚さがトンネルの高さ位あり、トンネル周辺の地圧のため水平層が塑性状態になったときのトンネル周辺の応力分布と側壁に作用する土圧との関連性を研究し、従来これに関し *R. Grenell* が研究したものを批判し、より精密な計算法を提唱することができた。第7章においては、地山は普通均質等方性のときは少く一般には成層を有する互層地山よりなることが多く、この場合のトンネル周辺の応力分布を求めるのに擬似直交異方性体として理論を展開して、このような地山ではトンネル周辺に過度な応力集中現象がおこることを知ることができた。従来トンネル周縁の応力分布を求める理論は多くの権威者によって扱われてきたが、トンネル周辺深くの地山に応力が如何に分布するかはあまり取扱われていないので著者はこれを明かにして崩壊機構を説明することができた。

第8章において巻立トンネル周辺の応力分布を弾性論に基づいて *Muschelischvili* の複素変数の方法を用いて求める理論を導いた。これは谷本勉之助博士が別法で研究された所であるが、著者は覆工土圧及びコンクリート巻立の周縁応力について迅速に簡易に計算出来る方法を提唱し、しかもその精度は実用的にみて充分よいことを示した。

第3編 において以上述べた理論を検証するためトンネル模型実験を行った。第1章及び第2章においては地山土の力学的性質が *rheology* の立場より変形挙動を説明できる場合のトンネル周辺の変形の模型実験を行った結果を述べたものであって、前編の理論式に於てこの計算に必要な係数は第1編で述べた方法で求めた数値を用いて得たトンネル周辺の変形量とトンネル模型実験における変形量の測定値と比較して理論の妥当性を検討した。模型実験の条件と現実の条件と完全に一致させることのできない利約、その他の原因で理論値と測定値とは完全に合わないが定性的に理論の妥当なることが判った。第3章においてはトンネル周辺が塑性領域となった場合のトンネル模型実験で応力分布を測定することは技術的に困難な点があるので、その特殊な場合として摩擦性塑性体としての水平層を有する地山中のトンネル周辺応力及び掘り線に関する模型実験を行い理論と比較した。第2編第6章のこれに関する理論は第2編第4章の特殊な場合であって、理論の基本概念は同一であるからである。応力分布に関しては前述の模型実験と同様に実験箱の制約により完全に自然地山を作れず、この種の実験としては避けられない制約のために理論値と測定値との間にある差異は生じたが、少なくとも定性的には理論が妥当であると認めることができた。第4章においては巻立トンネル覆工に及ぼす土圧の模型実験を行い、定性的に土圧分布と地山荷重との関係を求めた結果実際のトンネルの巻立は掘削後巻立を施工してから全体が沈下することはあまりないので、これと同じ条件で実験をなした場合覆工土圧は拱頂で大而側壁を経て拱底にゆくに従って少となることが測定された。これは実際のトンネル現場で測定される土圧分布と相似た形となることが判った。この実験には模型実験用の *Goldbeck* 型の土圧計を試作してよい成果を得ることができた。第5章においては直交異方性体とみられるラワン材の中に穿った円孔に地山荷重にあたる荷重をかけてトンネル周縁応力分布をSR-4歪計利用の歪計で測定し、第2編第7章の理論式の検証を行った。理論式においてせん断弾性係数の取り方に近似法を用いたこと及び歪計の大きなためによる測定法の不満足な点のあるためある差異を生じたが、定性的には理論値の傾向と測定値の傾向とは相似た形となることより、応力分布の様相を推定することができた。

第4編 において以上述べた覆工土圧の理論式よりえられる土圧分布と模型実験によりえられた覆工土圧分布の傾向の異なる理由を明にした。第1章において理論によるものはトンネル円孔に覆工をはめ込んだ後重力という荷重をかけたときの応力分布であって、これと同じ荷重条件のときの素掘円形トンネル周辺の変形の理論値と前述の応力分布は直線関係にあるとした。このことは現場の経験及びその測定実績よりして、地山の押出し量の大なるときこれを抑制する支保工圧力は大きくなることより言えることである。実際の地山は已に重力による地山荷重をうけている所にトンネルを穿ち、そのときの変形量より上記の直線関係を利用して覆工土圧を求めれば、このときの土圧分布が実際現場を観測される土圧分布となることを提唱した。事実このようにして求めた土圧分布は拱頂より側壁を経て拱底に向い覆工土圧が減少した形となり現場実測の土圧分布と一致する。またこの方法によって盤膨の起る理論的説明をなすことができた。

つぎに第2章においてトンネル土圧の経時的変化を求める方法を述べた。これは今迄述べた素掘トンネルの変形量と巻立トンネル覆工土圧間に直線関係が成立することとを基にして、変形量の経時的変化より覆工土圧の経時的変化を求められることを示し、日振トンネルの実測例によってこの理論の検証をなした。しかしトンネル周辺の応力分布が上限降伏値にあるものより以上になった塑性

状態では、変形は流動的になり相当大的な変形量を示し、その経時的変化の探求を求める理論式は研究されていないので、今後この問題は難工事のトンネル施工上重要な問題となる。しかしこのときの覆工土圧と周辺応力分布の終局的な状態は弾塑性問題として第2編で求めることができ、これによって可塑性支保工設計の基本理論を得たこととなる。第3章においては主に日振トンネルの工事の施工例をあげて上述の著者の理論より批判しトンネル工法とトンネル土圧の相関性を述べた。第4章においては第2編第7章の理論において地山条件にあう鉛直地山荷重と水平地山荷重の作用する実際地山の条件で、トンネル周辺の応力分布を求め、成層が鉛直方向のとき側壁部分が崩壊の原因となることを指摘して、このときとるべき処置を述べたものである。このことは従来現場で経験されたことではあるが理論によってその原因を説明することができた。

以上の外に砂地盤のトンネルについて多少理論及び実験を行ったが、これに関して上盤圧力については伊藤博士によって研究されているが、トンネル周辺に作用する土圧分布に関しては覆工土圧との関連性もあり、基本的には著者の誘導した第2編第4章の方法を応用することによって解決は出来るが詳細は省略した。

以上は著者が軟弱な地山中のトンネル土圧に関する基礎的研究の内容である。これによって難工事となるこの種地山のトンネル工事の施工設計の合理化に資する所少なくないと信ずる。

終りに本研究に対し終始御指導を賜った京都大学教授村山博士、小西博士に、及び京都大学工学部土木教室土質工学講座の諸氏、ならびに徳島大学工学部瀬川講師はじめ土質関係の助手、学生諸氏の多大なる御援助を得たことに対し深甚の謝意を表する。

# 参 考 文 献

- 1) 土木工学ハンドブック下巻：土木学会編，技報堂，昭和32年8月20日発行。
- 2) 日本国有鉄道建設部工事課，昭和30年12月隧道会議記録，P.35
- 3) 鉄道大臣官房研究所，鉄道省土質調査委員会報告第四輯，昭和11年4月
- 4) 土質工学会：土と基礎，第二巻第五号，1954，P.32
- 5) 3) と同じ
- 6) 小田金治：「八幡線夜昼隧道工事に就いて」土木学会第25巻第1号，昭和14年1月
- 7) 土木学会編：トンネルと掘削工法，1959，P.245
- 8) 3) のP.64
- 9) 渡辺實：「粘土の膨張圧力の実験的研究」地質学雑誌 Vol. 42, No. 502, 1935
- 10) 3) のP.3
- 11) 日本国有鉄道札幌工務局，「八幡線内線日振ずい道工事誌」昭和34年12月，P.59
- 12) 小田英一：「粘弾性体としての地山中の素掘円形トンネルの変形挙動の実験的研究について」土木学会第14回年次学術講演会，昭和34年6月14日
- 13) 石本巳四雄，飯田汲事：「土の粘弾性とせん断抵抗」地震研究所彙報第14巻 P.534～P.542
- 14) Griggs, David T. : "Creep of Rocks" Journal of Geology. Vol. 47 pp. 225-251. 1939
- 15) 飯田汲事：「岩石の弾性及び粘性に関する研究」地震研究所彙報第17巻，P.59～P.78，1939
- 16) 宮部直巳：「土のプラスチック変形に関する実験」地震研究所彙報第14巻 P.543～P.552，1936
- 17) 篠田仁吉：「粘弾性体の圧密」土木学会誌第38巻第5号，昭和28年
- 18) 村山朔郎，柴田徹：「粘土のレオロジー的特性について」土木学会論文集，第40号，1956年
- 19) Markus Reiner : Twelve Lectures On Theoretical Rheology, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1949, Lec. V III (14)
- 20) 伊藤富雄：「土の静土圧係数に関する実験的研究」第12回土木学会年次学術講演会概要，P.141～142
- 21) 村山朔郎，柴田徹：「粘土のレオロジー的特性について」土木学会論文集，第40号，1956年，P.18～19
- 22) 小田英一：「レオロジー的特性の地山中の素掘円形トンネルの変形挙動について」第15回土木学会年次学術講演会，昭和35年5月29日
- 23) 21) と同じ P.3～P.8
- 24) 21) のP.12
- 25) 21) のP.20～P.23
- 26) Nanno Schmid : "Statische Probleme des Tunnel- und Druck-Stollenbaues und ihre gegenseitigen Beziehungen", 1926, Berlin

- 27) N. Yamaguti : "On the Stresses around a Horizontal Circular Hole in Gravitating Elastic Solid" *Journal of the Japan Society of Civil Engineering*. Vol. XV. No. 4 April 1929
- 28) 26) と同じ
- 29) 小田英一 : 「粘弾性体としての地山中の素掘円形トンネルの変形挙動について」土木学会論文集第68号, 昭和35年5月
- 30) 小田英一 : 「レオロジー的特性の地山中の素掘円形トンネル変形挙動について」第15回土木学会年次学術講演会, 昭和35年5月27日
- 31) Eiichi Oda "On the Distribution of Stress around a Circular Tunnel in Gravitating Plastic Ground", *Proceedings of the 4th Japan National Congress for Applied Mechanics*. 1954
- 32) 平松良雄, 岡行俊 : 「塑性地盤中の盤圧現象と支保について」日本鉱業会誌72巻826号 昭和32年4月
- 33) R. Fenner : "Untersuchung zur Erkenntnis des Gebirgsdrucks" *Glückauf*, 74 (1938), S. 681 ~ 695, S. 705 ~ 715
- 34) F. K. Van Iterson : "Earth Pressure in Mining" *Proceedings of the Second International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Rotterdam June 21 to 30-1948 Volume III
- 35) K. Terzaghi : *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley and Sons, INC, 1948 PP. 194~202
- 36) 犬井鉄郎 : 応用偏微分方程式論, 岩波書店, 1951, P. 335 (A41.7) 式
- 37) 35) の PP. 18 ~ P. 19
- 38) 36) の P. 172 (31.8) 式
- 39) 36) の第4章
- 40) P. S. Symonds : "The Determination of Stresses in Plastic Regions in Problems of Plane Flow" *Journal of Applied Physics*, Volume 20, January, 1949
- 41) 35) の PP. 209
- 42) R. Fenner : "Untersuchungen zur Erkenntnis des Gebirgsdrucks" *Glückauf* 13. August 1938, 74 Jahrgang S. 692~693
- 43) 伊藤富雄 : 「円形立て坑の周面における弾塑性応力状態」土木学会論文集第21号, 昭和29年12月
- 44) 川本勝万 : 「円形立坑周辺の弾塑性応力状態に対する近似解法」土木学会論文集 第39号, 昭和33年11月
- 45) N. M. Westergaard : "Plastic State of Stress Around a Deep Well" *Journal of Boston Soc. of Civil Eng.* Vol. 27, No. 1, Jan. 1940, PP. 1~5
- 46) Karl F. G. Keil : *Geotechnik*. Veb Wilhelm Knappe Verlag, Halle (Saale) 1959. S 1055 ~ 1056
- 47) 35) の PP. 413 ~ 414



- 48) 32)と同じ
- 49) 32)のp.13の(6)式
- 50) L. A. Galin: "Plane elastic-plastic problem: Plastic regions around circular holes in plates and beams (Russian)".  
Prikladnaia matematika i mekhanika 10. 365 ~ 386 (1946)
- 51) G. N. Sawin: "Spannungserhöhung am Rande von Löchern,  
Veb Verlag Technik Berlin, 1956. S.217~224
- 52) W. Prager and P. G. Hodge: Theory of Perfectly Plastic Solids. John Wiley and Sons. Inc. 1951 pp.201
- 53) N. I. Muschelischwili: "Einige Grundaufgaben der mathematischen Elastizitätstheorie" Akad. Wiss. Ud SSR, 1935.
- 54) 倉西正嗣: 弾性学, 日本機械学会, 機械工学講座Ⅲ-3, 昭和23年12月10日, p408
- 55) G. N. Sawin: "Spannungserhöhung am Rande von Löchern,  
Veb Verlag Technik Berlin, 1956, S.223
- 56) 54)のp.407
- 57) 52)のpp.202
- 58) 小田英一: 「塑性体としての水平層を有する地山中のトンネル応力について」土木学会論文  
集第19号, 昭和29年
- 59) 42)のS.708 ~ 712
- 60) 36)のp.335 (A41.7)式
- 61) 36)のp.332 (A41.11)式
- 62) Nobuo Inoue: "Application of the Theory of Supersonic Flow to the Two-dimensional Isostatic Problem in the Theory of Plasticity" Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 6.  
Nov. ~ Dec. 1951
- 63) R. Hill: "The Mathematical Theory of Plasticity" Oxford at the Clarendon Press, 1950, pp. 141
- 64) R. P. Shoemaker: "On Introduction to the Design of Underground Openings for Defense" Quarterly of the Colorado School of Mines, Vol. 46. No.1. January 1951, pp.139
- 65) 小田英一: 「軟弱な成層を有する互層地山中の素掘円形トンネルの周辺応力分布について」  
第12回土木学会中国四国支部学術講演会, 昭和25年12月14日
- 66) G. Sonntag: "Einfluss der Anisotropie auf die Beanspruchung des Gebirges in der Umgebung von Stollen" Der Bauingenieur.  
August 1958, Heft 8
- 67) G. N. Sawin: Spannungserhöhung am Rande von Löchern,  
Veb Verlag Technik Berlin 1956, S.167 ~ 185
- 68) 66)と同じ
- 69) 67)のS.173
- 70) 小田英一: 「巻立楕円形トンネル周辺の応力分布について」土木学会論文集第24号, 昭和  
30年4月
- 71) 谷本勉之助: 「巻立円形隧道の応力分布」土木学会誌第23巻第4号, 昭和13年

- 72) Yi-Yuan Yu: "Gravitational Stresses on Deep Tunnels" *Journal of Applied Mechanics*, December, 1952, Vol. 19, No. 4, P.P. 537
- 73) N. Muschelisvili: "Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen" *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 13, 1933, S. 264 ~ 282
- 74) 伊藤富雄: 「土の静圧係数に関する実験的研究」土木学会第12回年次学術講演会講演概要 昭和32年6月2日
- 75) 73) と同じ
- 76) 倉西正嗣: 弾性学, 日本機械学会, 昭和23年, P. 408
- 77) 71) と同じ
- 78) 小田英一: 「粘弾性体としての地山中の素掘円形トンネルの変形挙動について」土木学会論文集第68号, 昭和35年5月
- 79) 小田英一: 「レオロジ特性の地山中の素掘円形トンネルの変形挙動について」第15回土木学会年次学術講演会, 昭和35年5月29日
- 80) 小田英一: 「塑性体としての水平層を有する地山中のトンネル応力に関する実験について」第11回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和30年5月29日
- 81) 吉本彰: 「コンクリートの変形に関する一実験」土木学会誌第40巻第9号, 昭和30年, P. 22 ~ 27
- 82) 山内弘: 塑性変形と加工, 最新機械工業叢書19 (日刊工業新聞社) 昭和29年, P. 37 ~ 43
- 83) R. Hill: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford at the Clarendon Press, 1950, P.P. 228 ~ 229
- 84) 小田英一: 「軟弱な地山中のトンネル地圧の実験的研究」土木学会中国四国支部第10回学術講演会, 昭和33年11月27日
- 85) W. S. Housel: "Earth Pressure on Tunnels" *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 108, 1944, P.P. 1037 ~ 1058
- 86) 伊藤富雄: 「砂層中に掘った導坑の坑圧に関する理論的研究」土木学会第14回年次学術講演概要, 第Ⅱ部, P. 115 ~ 115
- 87) 高橋幸伯, 森田善代子: 「抵抗線歪計の木材への応用」生産研究 Vol. 6, No. 1, 1954
- 88) 野沢太三: 「膨脹性地山におけるすい道の土圧と施工法について (その2)」土と基礎, Vol. 8, No. 6, 1960, P. 31
- 89) 日本国有鉄道札幌工務局編: 辺富内線日振すい道工事誌, 昭和34年12月, P. 11 ~ 44
- 90) 88) の P. 38 の図 - 22
- 91) 88) の P. 37 の図 - 20
- 92) 88) の P. 33 の図 - 10
- 93) 村山朔郎: 「トンネル工事の安全対策」トンネル掘削工法, 土木学会編, 1959, P. 51 ~ 52
- 94) 上原要三郎: 「弾性的地圧論と深い隧道並びに豎坑の覆工」日本国有鉄道建設工事課発行, 隧道会議記録, 昭和30年12月, P. 37 ~ 39
- 95) 89) の P. 19 ~ 73

- 96) G. Sonntag: "Einfluss der Anisotropie auf die Beanspruchung des Gebirges in der Umgebung von Stollen", Der Bauingenieur August 1958, (1.09)式及び (1.12)式